B. L. Baĭdel'dinov, An analogue of the first boundary value problem for an elliptic equation of order $2m$ with power degeneration on the boundary, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, Volume 270, Number 5, 1038–1042

Б.Л. БАЙДЕЛЬДИНОВ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА $2m$ СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

(Представлено академиком С.М. Никольским 4 XI 1982)

В данной работе обобщаются и дополняются результаты исследований С.М. Никольского и П.И. Лизоркина (см. [1–3]) первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$:

$$(1)\qquad Au \equiv \sum_{|i|,\ |j|\leqslant m} (-1)^{|j|} D^j(a_{ij}D^i u(x)) = f(x), \qquad x\in\Omega,$$

коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого имеют степенное вырождение на границе $\partial\Omega$ ограниченной области Ω. Вначале исследуются вопрос существования и единственности обобщенного решения однородной задачи типа Дирихле для уравнения (1) и вопрос повышения гладкости решения этой задачи в зависимости от гладкости коэффициентов $a_{ij}(x)$ и гладкости правой части $f(x)$. Затем исследуются аналогичные вопросы в случае неоднородных краевых условий; кроме того, в этом случае устанавливается зависимость класса решений от гладкости граничных функций. Методы исследований указанных вопросов существенно используют результаты теории функциональных пространств, в частности теоремы вложения для весовых классов функций.

1. Перечислим некоторые определения и факты, относящиеся к используемым в работе функциональным пространствам. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассматривается ограниченная область Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega\equiv\Gamma$. Расстояние точки $x\in\Omega$ до Γ обозначается символом $\rho(x)$. Через $\mathbf{C}$ будем обозначать поле комплексных чисел. Отметим, что, кроме $\rho(x)$, все рассматриваемые в данной работе функции, вообще говоря, комплекснозначны. Пусть m – неотрицательное целое число, α действительное. Функция $u(x)$ по определению принадлежит классу $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$, если $u(x)\in L_2(\Omega)$, у нее существуют обобщенные (по Соболеву) производные порядка m, и конечна норма

$$\|u\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega)} = \left\{\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|i|=m}\int_\Omega (\rho^\alpha(x)|D^i u(x)|)^2 dx\right\}^{1/2},$$

$$i=(i_1, i_2, \ldots, i_n), \quad |i| = i_1+i_2+\ldots+i_n.$$

Утверждение 1. *Если*

$$(2)\qquad -1/2<\alpha<m-1/2,$$

а s_0 – наименьшее натуральное число такое, что

$$(3)\qquad -1/2\leqslant \alpha-m+s_0<1/2,$$

то на функциях $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ определен оператор "следа"

$$T:\ u\to\left(u|_\Gamma,\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{s_0-1}u}{\partial n^{s_0-1}}\bigg|_\Gamma\right),$$

действующий линейно и непрерывно из $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ в $\sum_{k=0}^{s_0-1} B_2^{m-\alpha-k-1/2}(\Gamma)$.

Доказательство этого факта и определения B-классов, а также описание других свойств классов $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ можно найти в монографии С.М. Никольского [4]. Отметим, что если α удовлетворяет условию (2), можно рассматривать класс $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ – подпространство функций из $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$, имеющих на Γ нулевые следы до порядка $s_0 - 1$ включительно.

У т в е р ж д е н и е 2 (см. [2]). *Пусть* α *и* s_0 *определены в* (2) *и* (3), *кроме того,*

(4) $\alpha + ½ \neq 1, 2, \ldots, m;$

(5) $2s_0 \geqslant m.$

Тогда существуют $C_i > 0$, $|i| \leqslant m$, *такие, что* $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ *верно*

(6) $$\int_\Omega (\rho^{\alpha-m+|i|}(x)\,|D^i u(x)\,|)^2\,dx \leqslant C_i \sum_{|j|=m} \int_\Omega (\rho^\alpha(x)|D^j u(x)|)^2\,dx.$$

Далее, пусть l – целое число, β – действительное. Введем в рассмотрение классы $V^l_{2,\beta}(\Omega)$. По определению $u \in V^l_{2,\beta}(\Omega)$ при $l \geqslant 0$, если для нее конечна норма

$$\|u\|_{V^l_{2,\beta}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|i|\leqslant l} \int_\Omega (\rho^{\beta-l+|i|}(x)\,|D^i u(x)|)^2\,dx \right\}^{½}.$$

Если $l \leqslant 0$, то $V^l_{2,\beta}(\Omega) \equiv [V^{-l}_{2,-\beta}(\Omega)]^*$, т.е. пространство $V^l_{2,\beta}(\Omega)$ определяется в этом случае как пространство, сопряженное к $V^{-l}_{2,-\beta}(\Omega)$. Основные свойства и структура этих классов (в более общей ситуации) изучены в [2, 3].

2. Рассмотрим интегродифференциальную форму

(7) $$a(u, v) = \sum_{|i|,\,|j|\leqslant m} \int_\Omega a_{ij}(x) D^i u(x)\,\overline{D^j v(x)}\,dx$$

в предположении, что:

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ измеримы в Ω и

(8) $|a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{2(\alpha-m)+|i|+|j|}(x), \quad x \in \Omega, \quad |i|, |j| \leqslant m,$

где $M > 0$ – фиксированная постоянная, α – вещественное число.

Доказывается, что если α удовлетворяет условиям (2) и (4), то форма (7), коэффициенты которой подчинены требованию 1), определена и непрерывна для любых двух функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$, т.е.

$$|a(u, v)| \leqslant C\|u\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega)} \|v\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega)}, \qquad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega),$$

где постоянная C не зависит от u и v.

Далее параметры α и s_0, удовлетворяющие (2)–(5), для краткости будем называть р е г у л я р н ы м и.

З а д а ч а D_0. Пусть α и s_0 – регулярные параметры. В классе $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ ищется функция $u(x)$, удовлетворяющая соотношению

(9) $a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega),$

где f принадлежит пространству $[\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)]^*$, сопряженному к $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается отношение двойственности.

З а м е ч а н и е. При регулярных α и s_0 классы $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ и $V^m_{2,\alpha}(\Omega)$ совпадают с точностью до эквивалентности норм (см. [2]), поэтому в (9) можно считать $f \in V^m_{2,\alpha}(\Omega)$. Кроме того, в силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ можно требовать выполнения (9) на функциях $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Отметим связь задачи D_0 с первой краевой задачей для уравнения (1) с однородными граничными условиями

(10) $$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Именно, если $f \in L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $a_{ij} \in C^{|j|}(\Omega)$, а решение ищется среди функций $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$, обладающих производными до порядка $2m$ из $L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, то задача D_0 совпадает с краевой задачей (1), (10). Если же $a_{ij} \overline{\in} C^{|j|}(\Omega)$ (или $f \overline{\in} L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$), то тогда говорят о краевой задаче, понимая уравнение (1) в смысле соотношения (9). При этом оператор A понимается в обобщенном смысле как оператор, удовлетворяющий равенству

(11) $\quad a(u, v) = \langle Au, v\rangle \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega).$

Решение задачи D_0 называется обобщенным решением задачи (1), (10).

Т е о р е м а 1. *Пусть α и s_0 регулярные, коэффициенты формы* (7) *подчинены условию* 1) *и выполнено одно из условий*:

(12) $\quad \operatorname{Re} \sum\limits_{|i|,\,|j| \leqslant m} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \geqslant \kappa\rho^{2\alpha}(x) \sum\limits_{|j|=m} |\xi_j|^2; \quad \xi_i \in \mathbf{C}, \quad |i| \leqslant m;$

(13) $\quad \operatorname{Re} \sum\limits_{|i|=|j|=m} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \geqslant E\rho^{2\alpha}(x) \sum\limits_{|j|=m} |\xi_j|^2, \quad \xi_i \in \mathbf{C}, \quad |i| = m,$

(14) $\quad E - M \sum\limits_{|i|+|j| \leqslant 2m-1} (C_iC_j)^{1/2} > 0$

(M – *константа из* (8), C_i – *константы из* (6)).

Тогда оператор A, определяемый соотношением (12), *есть алгебраический и топологический изоморфизм $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)$ на $[\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\alpha}(\Omega)]^*$. Если при некотором целом $\gamma \geqslant 0$ коэффициенты удовлетворяют дополнительному условию*

2) $a_{ij}(x) \in C^{|j|-m+\gamma}(\Omega)$, *когда $|j| \geqslant m-\gamma$ и для любого мультииндекса τ, $|\tau| \leqslant |j| - m + \gamma$, имеют место оценки*

(15) $\quad |D^\tau a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{2(\alpha-m)+|i|+|j|-|\tau|}(x), \quad x \in \Omega, \quad |i| \leqslant m,$

то сужение оператора A на класс $\overset{\circ}{W}{}^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega)$ является алгебраическим и топологическим изоморфизмом $\overset{\circ}{W}{}^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega)$ на $V^{\gamma-m}_{2,\gamma-\alpha}(\Omega)$.

3. Перейдем к случаю неоднородных краевых условий. В этом случае на коэффициенты формы вида (7) приходится накладывать более жесткие условия. Пусть α и s_0 – регулярные параметры, и пусть коэффициенты формы $a(u, v)$ удовлетворяют условию

1') $a_{ij}(x)$ измеримы в Ω, $|i|$, $|j| \leqslant m$, и при некоторой постоянной $M > 0$ подчиняются оценкам

$$|a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{2(\alpha-m)+|i|+|j|}(x), \quad |j| \leqslant m, \quad s_0 \leqslant |i| \leqslant m,$$

$$|a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{\beta+\alpha-m+|j|}(x), \quad |j| \leqslant m, \quad 0 \leqslant |i| \leqslant s_0 - 1,$$

$\beta > -1/2$ – фиксированное число.

З а д а ч а D. В классе $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ ищется функция $u(x)$, которая при заданном $f \in V^{-m}_{2,-\alpha}(\Omega)$ и заданных граничных условиях

(16) $\quad \left.\dfrac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma = \varphi_k \in B_2^{m-\alpha-k-1/2}(\Gamma), \quad k = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$

удовлетворяет соотношению

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Аналогично случаю однородных краевых условий задачу D можно интерпретировать как первую краевую задачу для уравнения $Au = f$ с краевыми условиями (16), где A есть оператор, задаваемый соотношением

(17) $\quad a(u, v) = \langle Au, v\rangle \quad \forall u \in W^m_{2,\alpha}(\Omega), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$

Нетрудно показать, что оператор A есть линейный непрерывный оператор из $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ в $V^{-m}_{2,-\alpha}(\Omega)$.

Определим оператор $P=(A;\ T)$ – оператор задачи D. Каждой функции $u \in W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ поставим в соответствие "пару" $(Au;\ Tu)$ или, учитывая определение оператора T (см. п. 1, утверждение 1), вектор-функцию с s_0+1 компонентами – $\left(Au;\ u|_\Gamma,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{s_0-1}u}{\partial n^{s_0-1}}\right|_\Gamma\right)$. Учитывая линейность и непрерывность операторов A и T в соответствующих пространствах, получим линейный непрерывный оператор

$$P = (A;\ T)\colon\ W^m_{2,\alpha}(\Omega) \to V^{-m}_{2,-\alpha}(\Omega) \times \prod_{k=0}^{s_0-1} B_2^{m-\alpha-k-1/2}(\Gamma).$$

Далее определим класс $W^{\gamma,\sigma}$ (γ, σ – натуральные числа) как множество функций u, допускающих представление

$$u = \omega + \Phi, \tag{18}$$

где

$$\omega \in V^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega), \qquad \Phi \in W^{m+r}_{2,\alpha+\mu}(\Omega), \qquad r=\max(\gamma,\ \sigma), \qquad \mu=\max(0,\ \gamma-\sigma),$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{\gamma,\sigma}} = \inf\left\{\|\omega\|_{V^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega)} + \|\Phi\|_{W^{m+r}_{2,\alpha+\mu}(\Omega)}\right\}, \tag{19}$$

infimum берется по всем представлениям функции $u(x)$ вида (18).

Т е о р е м а 2. *Пусть параметры α и s_0 регулярные, коэффициенты формы $a(u,\ v)$ подчинены условию* 1$'$) *и выполнено одно из условий* (12) *и* (13) *теоремы* 1.

Тогда оператор $P=(A;\ T)$ есть алгебраический и топологический изоморфизм $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ на $V^{-m}_{2,+\alpha}(\Omega) \times \prod_{k=0}^{s_0-1} B_2^{m-\alpha-k-1/2}(\Gamma)$

Если при некотором фиксированном целом числе $s \geqslant 0$ коэффициенты формы $a(u,\ v)$ подчинены дополнительному условию

2$'$) $a_{ij}(x) \in C^{|j|-m+s}(\Omega)$, *когда $|j| \geqslant m-s$ и для любого мультииндекса τ, $|\tau| \leqslant |j|-m+s$, имеют место оценки*

$$|D^\tau a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{2(\alpha-m)+|i|+|j|-|\tau|}(x), \qquad |j| \geqslant m-s, \qquad s_0 \leqslant |i| \leqslant m;$$

$$|D^\tau a_{ij}(x)| \leqslant M\rho^{\beta+\alpha-m+|j|-|\tau|}(x), \qquad |j| \geqslant m-s, \qquad 0 \leqslant |i| \leqslant s_0-1,$$

то сужение оператора P на класс $W^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega)$ (γ – целое число, $0 \leqslant \gamma \leqslant s$) есть алгебраический и топологический изоморфизм $W^{m+\gamma}_{2,\alpha+\gamma}(\Omega)$ на $V^{-m+\gamma}_{2,-\alpha+\gamma}(\Omega) \times \prod_{k=0}^{s_0-1} B_2^{m-\alpha-k-1/2}(\Gamma)$ и сужение оператора P на класс $W^{\gamma,\sigma}$ (γ, σ – целые числа, $0 \leqslant \gamma \leqslant s$, $0 \leqslant \sigma \leqslant s$) есть алгебраический и топологический изоморфизм:

$$W^{\gamma,\sigma} \rightleftarrows V^{-m+\gamma}_{2,-\alpha+\gamma}(\Omega) \times \prod_{k=0}^{s_0-1} B_2^{m+\sigma-\alpha-k-1/2}(\Gamma). \tag{20}$$

4. Перечисленные результаты обобщают и дополняют исследования [1, 2] в следующих направлениях. Во-первых, за счет использования метода билинейных форм удается освободиться от условия симметричности коэффициентов $a_{ij}(x)$. Более того, этот метод позволяет рассматривать уравнения с комплекснозначными

коэффициентами. При этом несколько конкретизируются требования к форме $a(u, v)$ (см. (13), (14)). Во-вторых, на основании оценок из [6] в теореме о повышении гладкости ослаблены требования к коэффициентам уравнения. Наконец, неоднородная краевая задача изучена для более общих уравнений.

В работах [1, 2] не изучался вопрос о зависимости гладкости решения от гладкости граничных условий. В данной работе введено пространство $W^{\gamma,\sigma}$ и доказан изоморфизм (20).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. П.И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР, Москва

Поступило
1 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С.М.* Тр. МИАН, 1979, т. 150, с. 212–238. 2. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* – Там же, 1981, т. 157, с. 90–118. 3. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* – ДАН, 1981, т. 259, № 1, с. 21–23. 4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с. 5. *Лионс Ж., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с. 6. *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton, 1965. 291 p.

УДК 517.941

МАТЕМАТИКА

А.Б. ВЕНКОВ

ОБ АКЦЕССОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В УРАВНЕНИИ ШВАРЦА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 14 X 1982)

Дифференциальное уравнение Шварца появляется при изучении конформного отображения верхней полуплоскости $H \subset \mathbf{C}$ на многоугольник M, ограниченный дугами окружностей. Если z – отображающая функция, то

$$\{z, J\} = Q_M(J), \tag{1}$$

где $\{z, J\}$ – производная Шварца, $\{z, J\} = z'^{-1}z'' - \frac{3}{2}z''^2 z'^{-2}$, Q_M – рациональная функция, однозначно определяемая M и имеющая полюсы второго порядка в точках a_k, которые соответствуют вершинам M. Коэффициенты при этих полюсах выражаются простыми формулами через величины внутренних углов M (см. [1–4]). Однако, насколько нам известно, до настоящего времени нет точных формул для $n - 2$ коэффициентов X_k (акцессорных коэффициентов) при полюсах первого порядка в точках a_k, которые выражали бы эти коэффициенты в терминах M или группы монодромии Γ_M соответствующего линейного уравнения Фукса.

В настоящей заметке мы приводим некоторые формулы для искомых акцессорных коэффициентов X_k в предположении, что группа Γ_M является фуксовой группой первого рода и M имеет по крайней мере один нулевой внутренний угол. Вывод формул проводится в два этапа. Сначала мы выражаем X_k через коэффициенты Фурье A_k соответствующего инварианта Клейна $J_M(z)$. Затем вычисляем все коэффициенты A_k (за исключением постоянного члена) в терминах взвешен-