Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Б. Ильинский, Е. Г. Шешуков, Задача нелинейной фильтрации с неоднолистной областью годографа скорости,
Изв. вузов. Матем., 1972, номер 10, 34–40

https://www.mathnet.ru/ivm4126

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
7 декабря 2025 г., 13:37:45

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1972 МАТЕМАТИКА № 10 (125)

УДК 517.9

Н. Б. Ильинский, Е. Г. Шешуков

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕОДНОЛИСТНОЙ ОБЛАСТЬЮ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

В последние годы возрос интерес к задачам фильтрации, не подчиняющейся закону Дарси, т. е. когда

$$\operatorname{grad} h = -(f(v)/v)\,\overline{v}, \tag{1}$$

где h — функция напора, v — скорость фильтрации, $f(v)$ — положительная непрерывная функция [1]. Особый интерес среди этих задач представляют те, в которых фильтрация описывается нелинейным законом с начальным градиентом, т. е. когда

$$f(v) = \lambda_0 + f^*(v), \tag{2}$$

где $\lambda_0 > 0$ — начальный градиент. При рассмотрении таких задач, как и в газовой динамике, строится область в плоскости годографа скорости, соответствующая области фильтрации. В ряде случаев эта область получается неоднолистной. Для решения некоторых таких задач, когда $f^*(v) = v$, в работе [2] предложен способ перехода к системе парных интегральных уравнений путем введения дополнительных условий сопряжения на разрезе.

В настоящей работе, учитывая инвариантность уравнений фильтрации при конформных преобразованиях, предлагается переходить в подобных задачах на однолистную каноническую область и там исследовать разрешимость, а само решение строить методом конечных разностей. Указывается также метод электромоделирования подобных задач непосредственно в многолистной области годографа скорости. Сказанное излагается на примере задачи о двух источниках [2].

Постановка задачи. В плоскости фильтрации $z = x + iy$ на вещественной оси x в точках A и B на расстоянии l друг от друга расположены два источника интенсивности: $2q$ и $2Q$ соответственно ($Q > q$). В силу симметрии течения относительно оси x будем рассматривать лишь верхнюю полуплоскость, где область фильтрации обозначим через G_z. Вид этой области, исходя из физического смысла задачи, показан на рис. 1.

Уравнения фильтрации имеют (см. [1]) вид

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{f(v)}{v}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{f(v)}{v}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{3}$$

где ψ — функция тока; $f^*(v)$ в формуле (2) — непрерывная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $f^*(0) = 0$, $f^*(v) \sim \lambda_1 v^{\delta_1}$ при $v \to 0$ и $f^*(v) \sim \lambda_2 v^{\delta_2}$ при $v \to \infty$ (δ_1, δ_2, λ_1, λ_2 — положительные постоянные).

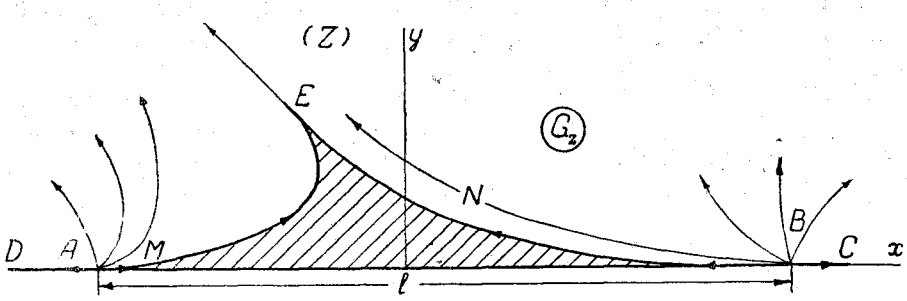

Рис. 1

Требуется найти решение нелинейной системы (3) в области $\bar{G}_z$, непрерывное и ограниченное в G_z, и построить границу застойной зоны MEN по краевым условиям

$$\psi_{AD} = q, \quad \psi_{BC} = -Q, \quad \psi_{AMENB} = 0, \tag{4}$$

причем на искомом участке границы MEN скорость $v = 0$; на бесконечности ψ линейно зависит от θ.

Сведение к задаче Дирихле для области видоизмененного годографа скорости. Путем преобразования годографа скорости от нелинейной системы (3) перейдем (см., например, [3]) к системе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{k(s)}\frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{1}{k(s)}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{5}$$

где $\varphi = -\varkappa_0 h$, $\varkappa_0$ — некоторое постоянное значение $\varkappa$, $k(s) = \varkappa/\varkappa_0$, θ — угол наклона вектора скорости к оси x,

$$ds = \left(\frac{f'(v)}{vf(v)}\right)^{1/2} dv, \quad \varkappa = \frac{v}{f(v)}\left(\frac{vf'(v)}{f(v)}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Возвращение к физической области течения осуществляется по формуле

$$dz = v^{-1}e^{i\theta}\left[v(\varkappa_0 f(v))^{-1}d\varphi + i d\psi\right]. \tag{7}$$

Таким образом, исходная задача свелась к построению комплексной функции $w(\chi) = \varphi(\theta, s) + i\psi(\theta, s)$, удовлетворяющей линейной эллиптической системе (5) и краевым условиям (4), в области видоизмененного годографа скорости G_χ, где $\chi = \theta + is$. Исходя из физического смысла задачи, решение $w(\chi)$ ищется в классе ограниченных и непрерывных в G_χ функций.

Следует отметить, что на участке границы G_χ, соответствующем границе застойной зоны MEN, система (5) вырождается (при $v = 0$ функция $k(s)$ обращается в нуль).

Если проследить за изменением функций $\theta(x, y)$ и $s(x, y)$ вдоль

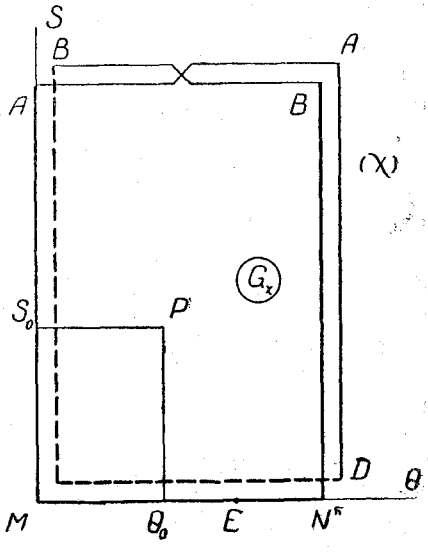

Рис. 2

границы области G_z, то в плоскости χ получим область G_χ, изображенную на рис. 2. Покажем, что эта область двулистна и имеет одну точку ветвления.

Допустим, что решение задачи (4), (5), непрерывное вплоть до границы области G_χ, существует. Рассмотрим функцию $\chi(w) = \theta(\varphi, \psi) + is(\varphi, \psi)$. Эта функция удовлетворяет в области G_w квазилинейной эллиптической системе

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = k(s)\frac{\partial s}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = -\frac{1}{k(s)}\frac{\partial s}{\partial\varphi}, \tag{8}$$

которая получается обращением системы (5). В тех точках, где якобиан

$$|I| = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2 + k\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)^2 \neq \begin{cases} 0, \\ \infty, \end{cases}$$

это преобразование взаимно однозначное. Обращение I в 0 или ∞ будет свидетельствовать о наличии точек ветвления, т. е. неоднолистности G_χ. Область G_w изображена на рис. 3.

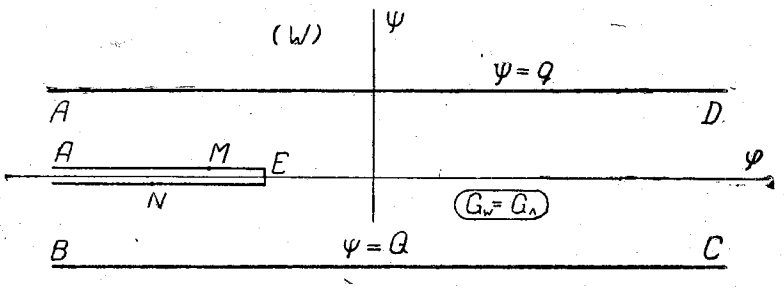

Рис. 3

Функция $\chi(w)$, как это следует из рассмотрения области G_z, во всех внутренних точках G_w ограничена и отлична от нуля. Более того, эта функция непрерывна вплоть до границы, за исключением точек w_A и w_B, где она имеет интегрируемую особенность; в точках w_M и w_C функция $\chi(w)$ обращается в нуль.

Согласно теореме из [4] (см. с. 391, 397, 398) любое решение системы (8) в области G_w может быть представлено в виде

$$\chi(w) = \Phi[\Lambda(w)], \tag{9}$$

где $\Lambda = \Lambda(w)$ — гомеоморфизм области G_w на себя, $\Phi(\Lambda)$ — аналитическая функция комплексного переменного Λ.

Для ограниченной и непрерывной функции, представимой в виде (9), справедлив принцип аргумента. Воспользуемся им. Проведем в $G_\Lambda = G_w$ некоторый замкнутый контур L^*, достаточно близкий к границе области. Обозначим через G^* область, ограниченную L^*. Пусть $\Phi^* = \Phi(\Lambda^*)$ — значение $\Phi(\Lambda)$ в произвольной внутренней точке $\Lambda^* = w^*$ области G^*. По принципу аргумента $(1/2\pi)\arg|\Phi(\Lambda) - \Phi^*| = n - p$, где n — число нулей, p — число полюсов функции $\Phi(\Lambda) - \Phi^*$. Но $p = 0$ в силу ограниченности $\Phi(\Lambda)$ в G_Λ. При обходе L^* конец вектора $\Phi(\Lambda) - \Phi^*$ делает два оборота, т. е. $n = 2$. Следовательно, произвольному значению Λ^* из G^* соответствуют два значения $\Phi(\Lambda^*) = \Phi^*$, т. е. область G^*_χ двулистна. Осуществляя пре-

дельный переход от L^* к L (границе области G_w), что возможно вследствие сделанного предположения о существовании непрерывного вплоть до границы решения $w(\chi)$, докажем двулистность области G_χ.

Воспользовавшись еще раз принципом аргумента для функции $d\Phi/d\Lambda$ $((1/2\pi)\arg(d\Phi/d\Lambda)=n-p,\ p=0,\ n=(1/2\pi)(4\pi-2\pi)=1)$, находим, что лишь в одной точке Λ_0 $d\Phi/d\Lambda=0$, т. е. в $G_\Lambda=G_w$ имеется одна точка ветвления; соответствующую точку в G_χ обозначим через $P(\chi_0)$, где $\chi_0=\theta_0+is_0$. Таким образом, области фильтрации G_z в плоскости видоизмененного годографа скорости $\chi=\theta+is$ соответствует двулистная полуполоса шириной π с одной точкой ветвления χ_0.

При заданных величинах q, Q, l картина течения в G_z должна определяться, а следовательно, должно находиться и положение точки ветвления χ_0. Однако мы, как и в [2], будем использовать полуобратный прием: положение точки ветвления в G_χ, т. е. χ_0, будем задавать, а картину области течения в G_z — находить. При этом χ_0 будем задавать так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{MEN}\frac{\sin\theta}{f(v)}\,d\varphi=0. \tag{10}$$

Тогда расстояние между источниками будет определяться по формуле

$$l=\frac{1}{\varkappa_0}\int\frac{\cos\theta}{f(v)}\,d\varphi. \tag{11}$$

Заметим, что (10) является условием расположения источников на оси x (аналог условия расположения границ бьефов на одной высоте в обратных краевых задачах теории фильтрации (см., например, [5], с. 243)).

Таким образом, исходная задача свелась к построению ограниченной и непрерывной в известной двулистной области G_χ комплексной функции $w(\chi)$, удовлетворяющей системе (5), краевым условиям (4) и условию

$$\psi_{CD}=(Q+q)\,\theta/\pi-Q\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{12}$$

Сведение к краевой задаче для прямоугольника. Предварительно рассмотрим два способа построения функции $\chi(\zeta)$, осуществляющей конформное отображение двулистной области G_χ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$. Первый способ заключается в непосредственном конформном отображении области G_χ на $\operatorname{Im}\zeta>0$, а второй состоит в том, что аналитическая функция $\chi(\zeta)$ строится как решение смешанной краевой задачи для верхней полуплоскости.

1 *способ.* С помощью функции $\tilde\zeta=-\cos\chi$ конформно отобразим область G_χ на двулистную полуплоскость $\operatorname{Im}\tilde\zeta>0$. Далее функцией $t=(\tilde\zeta-c)/(\tilde\zeta-\bar c)$ область $\operatorname{Im}\tilde\zeta>0$ отобразим на двулистный круг $|t|<1$ так, чтобы в центр круга перешла точка $c=-\cos\chi_0$. Наконец, преобразованием $\zeta=i(c^{i\alpha}+\sqrt{t})(c^{i\alpha}-\sqrt{t})^{-1}\operatorname{ctg}(\beta/2)$, где $\alpha=(\gamma_1+\gamma_0)/4$, $\beta=(\gamma_1-\gamma_0)/4$, $\gamma_0=-i\ln[(1+c)/(1+\bar c)]$, $\gamma_1=-i\ln[(1-c)/(1-\bar c)]$, этот круг переходит на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$:

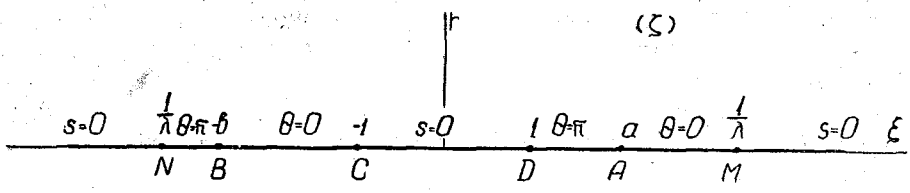

Рис. 4

2 *способ*. В верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ по краевым условиям, приведенным на рис. 4, ищем аналитическую функцию $\chi = \theta + is$, ограниченную в точках $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm 1/\lambda$ и на бесконечности.

По формуле Келдыша — Седова

$$\chi(\zeta) = R(\zeta)\left[\int_{-1/\lambda}^{-b} \frac{1}{|R(\tau)|}\,\frac{d\tau}{\tau-\zeta} - \int_{1}^{a} \frac{1}{|R(\tau)|}\,\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\right],$$

где за $R(\zeta)$ принята ветвь корня $\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-1/\lambda^2)}$, положительная на отрезке $1/\lambda < \xi < \infty$, $\eta = 0$. Параметры a, b и λ связаны соотношением

$$\int_{-1/\lambda}^{-b} \frac{d\tau}{|R(\tau)|} = \int_{1}^{a} \frac{d\tau}{|R(\tau)|}.$$

Для дальнейших исследований целесообразно перейти от полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ к ограниченной области. При помощи функции $g = F(\lambda, \arcsin\zeta)$, где $g = p + ir$, F — эллиптический интеграл 1-го рода, отобразим верхнюю полуплоскость G_ζ на прямоугольник G_g. Так как система уравнений (5) инвариантна относительно конформного отображения, то в G_g имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{1}{k(p, r)}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{k(p, r)}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}, \quad k(p, r) = k(s(p, r)). \tag{13}$$

Таким образом, исходная задача свелась к решению системы (13) в области G_g, удовлетворяющей краевым условиям (4), (12), где $\theta = \theta(p)$, $-K < p < K$, а K — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Приближенное решение этой задачи в G_g можно находить методом конечных разностей.

Геометрические и гидродинамические параметры области фильтрации, в том числе и граница застойной области, находятся с использованием формулы перехода (7).

Исследование существования и единственности решения. Принимая во внимание, что на горизонтальных сторонах прямоугольника G_g уравнения (13) вырождаются, отобразим конформно G_g на полукольцо G_ω так, чтобы линии вырождения перешли в отрезки оси абсцисс $\nu = 0$ $(\omega = \mu + i\nu)$, а вертикальные стороны — в полуокружности. Область G_ω оказывается удобной при исследовании разрешимости полученной задачи (см. [6]).

В области G_ω функции φ и ψ удовлетворяют системе уравнений, аналогичной (13), в которой независимые переменные суть μ, ν, а вместо коэффициента $k(p, r)$ стоит коэффициент $\sigma = k(s(\mu, \nu))$. Ис-

ключая φ из этой системы, придем к одному уравнению для функции ψ:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)=0. \tag{14}$$

Коэффициент $\sigma(\mu, \nu)$ в $\overline{G}_\omega$ может быть представлен в виде

$$\sigma=\nu^m\rho(\mu, \nu), \tag{15}$$

где $m=(1+2/\delta_1)>1$, $\rho(\mu, \nu)$ — ограниченная непрерывная функция в G_ω, положительно непрерывная в $\overline{G}_\omega$. Причем при $\delta_2\geqslant 1$ функция $\rho(\mu, \nu)$ ограничена в $\overline{G}_\omega$, а при $0<\delta_2<1$ обращается в бесконечность в точках A и B.

Переходя к новым независимым переменным $\tilde{\mu}=\mu$ и $\tilde{\nu}=b\nu^{m+1}$, где $b=(m+1)^{-(m+1)}$, и учитывая (15), уравнение (14) запишем в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\mu}^2}+\tilde{\nu}^n\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\nu}^2}+a_1\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\mu}}+a_2\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\nu}}=0, \tag{16}$$

где $n=2m/(m+1)$ (т. е. $1<n<2$), $a_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})=-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial\tilde{\mu})$, $a_2(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})=$ $=\rho^{-1}b^{1-n/2}\tilde{\nu}^n(\partial\rho/\partial\tilde{\nu})$. Коэффициенты a_1 и a_2 оказываются ограниченными во всей замкнутой области $\overline{G}_{\tilde{\omega}}$ $(\tilde{\omega}=\tilde{\mu}+i\tilde{\nu})$, за исключением точек A и B, в которых может нарушаться конформность отображения G_χ на G_ω. При $\delta_2=1$ и $\delta_2\geqslant(3+\sqrt{5})/2$ коэффициенты a_1 и a_2 в точках A и B ограничены, при $1<\delta_2<(3+\sqrt{5})/2$ они имеют интегрируемые особенности, а при $0<\delta_2<1$ — неинтегрируемые. Из работ [6], [7] следует, что решение задачи Дирихле для уравнения (16) с ограниченными коэффициентами a_1 и a_2 существует и притом единственно. Следовательно, рассматриваемая нами задача (4), (5), (12) при $\delta_2=1$ и $\delta_2\geqslant(3+\sqrt{5})/2$ разрешима однозначно. Таким образом, сделанное нами допущение о существовании непрерывного решения $w(\chi)$ в $\overline{G}_\chi$ является обоснованным.

О применении метода электромоделирования. Заметим, что решение задачи относительно функции $\psi(\theta, s)$ можно искать приближенно методом моделирования на сеточных интеграторах (см., например, [8]) непосредственно в многолистной области G_χ. Для этого нужно из точки ветвления по линии перехода с листа на лист провести разрезы и, учитывая, что соответствующие значения функции $\psi(\theta, s)$ и ее нормальные производные на берегах разрезов должны совпадать, соединить проводником узлы сетки, попавшие на соответствующие стороны разрезов. При этом каждый лист римановой поверхности моделируется отдельно; разрезы моделируются полуполосой шириной в один шаг сетки, а узлы сетки, приходящиеся на продолжение полуполос, попарно замыкаются.

Замечание. Аналогично предлагаемыми методами может быть исследован ряд других задач подземной гидромеханики и теории фильтрации.

Для нелинейных законов фильтрации без начального градиента решение упрощается, так как в этом случае неизвестных границ застойных зон, на которых уравнения вырождаются, не будет.

В заключение авторы выражают благодарность Л. А. Аксентьеву за полезные советы и замечания, способствовавшие выполнению работы.

г. Казань

Поступило
12 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, т. 4, вып. 1, 1940, с. 33—52.
2. Ентов В. М. Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднолистности отображения. ИАН СССР, Мех. жидкости и газа, 1972, № 1, с. 45—59.
3. Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г. О решении одной обратной краевой задачи нелинейной теории фильтрации. Тр. семин. по краевым задачам. Казанск. ун-т, 1971, вып. 8, с. 86—98.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., „Мир", 1964.
5. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд. Казанского ун-та, 1965.
6. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., „Наука", 1966.
7. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, т. 77, № 2, 1951, с. 181—183.
8. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., ГИФМЛ, 1960.

В. А. ДЕМЬЯНЕНКО. О ГИПОТЕЗЕ А. ШИНЦЕЛЯ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Кэ Чжао доказал, что, если натуральные числа x, y, z, бóльшие 1, удовлетворяют уравнению $x^x y^y = z^z$, то числа x, y должны иметь общий делитель $d > 1$. Позднее А. Шинцель установил, что во всяком таком решении или каждый простой делитель числа x является делителем числа y, или каждый простой делитель числа y является делителем числа x.

В 1958 году А. Шинцель поставил более общий вопрос: если x, y, z — натуральные числа, бóльшие 1, такие, что $x^x y^y = z^z$, то должны ли x, y иметь одинаковые простые делители?

В настоящей статье дается утвердительный ответ на вопрос А. Шинцеля. (Работа поступила в журнал „Математика" 20.I.1972.)

Ю. А. КИРЮТЕНКО. ОБ ОПЕРАТОРАХ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ, АНАЛИТИЧЕСКИ ПРОДОЛЖИМЫХ ИЗ НУЛЯ

(аннотация статьи, принятой к печати)

В статье рассматривается оператор обобщенного интегрирования, определенный на пространстве $\overline{A}_0$ функций, аналитических в $z = 0$. Для таких операторов вводится понятие аналитической продолжимости из нуля в некотором классе $\mathfrak{B}$ областей, содержащих начало координат, и находятся необходимые и достаточные условия аналитической продолжимости оператора обобщенного интегрирования в тех случаях, когда $\mathfrak{B}$ есть: 1) класс всех областей, содержащих начало координат; 2) класс звездных областей с центром в $z = 0$; 3) класс конечных односвязных областей, содержащих начало координат. (Работа поступила в журнал „Математика" 9.III.1972.)