Б. М. Гуревич, О совместном распределении случайных величин с заданными взаимными условными распределениями (дискретный случай),
Теория вероятн. и ее примен., 1991, том 36, выпуск 2, 352–355

ГУРЕВИЧ Б. М.

О СОВМЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМИ ВЗАИМНЫМИ УСЛОВНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

(дискретный случай)

1. В связи с подходом Р. Л. Добрушина к проблеме существования гиббсовского случайного поля с заданным потенциалом [1—3], по-видимому впервые возник вопрос о том, когда распределение случайного вектора однозначно определяется условными распределениями каждой из его компонент при условии остальных. Сформулируем этот вопрос более точно, ограничившись случаем, когда все компоненты рассматриваемого случайного вектора принимают конечное или счетное число значений (непрерывному случаю будет посвящена отдельная работа).

Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$,— конечные или счетные множества, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ — их прямое произведение, и $\hat{X}_k$, $k = 1, \ldots, n$,— такое же произведение, но без k-го сомножителя. Предположим, что при каждом k задана переходная функция $P_k(y, A)$, $y \in \hat{X}_k$, $A \subset X_k$, которая при фиксированном x является вероятностной мерой на X_k (здесь и ниже все подмножества рассматриваемых пространств считаются измеримыми). Введем проекции $\xi_k\colon X \to X_k$ и $\hat{\xi}_k\colon X \to \hat{X}_k$, $k = 1, \ldots, n$, первая из которых ставит в соответствие точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ ее k-ю координату x_k, а вторая — последовательность остальных координат.

Назовем вероятностную меру $\mathbf{P}$, определенную на X, *поднятием* переходной функции P_k, если при любом $y \in \hat{X}_k$, для которого $\mathbf{P}(\hat{\xi}_k = y) > 0$, выполняется равенство

$$\mathbf{P}(\xi_k \in A \mid \hat{\xi}_k = y) = \mathbf{P}_k(y, A), \qquad A \subset X_k. \tag{1}$$

Если (1) справедливо при $k = 1, \ldots, n$, назовем $\mathbf{P}$ *общим поднятием* переходных функций $P_1, \ldots, P_n$.

Пусть $\mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ — множество всех общих поднятий. Если это множество содержит не более одного элемента, будем говорить о единственности общего поднятия (не предполагая его существования).

В работе Р. Л. Добрушина [1] приведено условие единственности для случая, когда $n = 2$, а X_1 и X_2 конечны. В [4] имеется необходимое и достаточное условие существования и единственности общего поднятия двух положительных переходных функций, однако оно, в отличие от условия из [1], не выражено непосредственно через заданные функции. Настоящая заметка посвящена полному описанию множества $\mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ при любом $n \geqslant 2$. Из этого описания будет, в частности, видно, что условие единственности из [1] является лишь достаточным (см. ниже п. 3).

2. Чтобы сформулировать основные результаты, введем еще несколько понятий и обозначений.

Для любой меры $\mathbf{P}$, определенной на X, и любой точки $x \in X$ будем писать $\mathbf{P}(x)$ вместо $\mathbf{P}(\{x\})$. Аналогично, при $k = 1, \ldots, n$, $y \in \hat{X}_k$, $z \in X_k$ будем писать $P_k(y, z)$ вместо $P_k(y, \{z\})$. С учетом этого соглашения положим

$$\Lambda = \left\{x \in X\colon \prod_{k=1}^{n} P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)) > 0\right\}.$$

Точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $x' = (x_1', \ldots, x_n') \in X$ назовем соседними, если $x_i = x_i'$ при всех i, кроме, быть может, одного. Последовательность $x^1, x^2, \ldots, x^l \in X$ назовем путем, соединяющим x^1 и x^l, если при $j = 1, \ldots, l-1$ точки x^j и x^{j+1} являются соседними. Множество $B \subseteq \Lambda$ называется связным, если любые две его точки можно соединить путем, лежащим в B.

Теорема 1. *Если множество* Λ *связно, то* $\mathrm{Card}\, \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n) \leqslant 1$.

В случае связного Λ остается выяснить, когда общее поднятие существует, а когда — нет.

Определим для любых $B \subseteq X$, $x \in X$ и $k \in [1, n]$ множество $B_k(x) \subseteq X_k$ равенством

$$B_k(x) = \{\xi_k(x'):\ x' \in B,\ \hat{\xi}_k(x') = \hat{\xi}_k(x)\}. \tag{2}$$

Назовем B *полным*, если $P_k(\hat{\xi}_k(x),\ B_k(x)) = 1$ при всех $x \in B$, $k \in [1, n]$.

Пусть x, x' — точки множества Λ, причем $\hat{\xi}_k(x) = \hat{\xi}_k(x')$ при некотором $k \in [1, n]$ (если $x \neq x'$, такое k может быть только одно). Положим тогда

$$\lambda(x, x') = \begin{cases} P_k(\hat{\xi}_k(x'), \xi_k(x'))/P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)), & x \neq x', \\ 1, & x = x'. \end{cases} \tag{3}$$

Для любого пути $\gamma = (x^1, \ldots, x^l)$ положим

$$\lambda(\gamma) = \prod_{i=1}^{l-1} \lambda(x^i, x^{i+1}).$$

Назовем множество $B \subseteq \Lambda$ *правильным*, если для любого замкнутого пути $\gamma \subset B$ выполняется равенство $\lambda(\gamma) = 1$.

Из (3) вытекает, что если x, x' — произвольные точки правильного множества B, то $\lambda(\gamma)$ принимает одно и то же значение $\mu(x, x')$ для всех путей γ, лежащих в B и соединяющих x с x'. Если путей указанного вида не существует (B может быть несвязным), положим $\mu(x, x') = 0$.

Назовем множество $B \subseteq \Lambda$ *вполне правильным*, если оно правильно и если для любого $x \in B$ выполняется неравенство $\sum_{x' \in B} \mu(x, x') < \infty$. Очевидно, всякое конечное правильное множество является вполне правильным, а для бесконечных множеств это уже не так.

Теорема 2. *Если множество Λ связно, то для существования общего поднятия необходимо и достаточно, чтобы Λ было непустым, полным и вполне правильным.*

Перейдем к случаю несвязного Λ. Разобьем Λ на связные компоненты Λ^i, $i = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. 1) *Если компонента Λ^i множества Λ — полная и вполне правильная, то существует в точности одна мера $\mathbf{P}^i \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$, сосредоточенная на Λ^i;*

2) *множество $\mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ образовано всеми мерами вида $\sum_{i \in J} q_i \mathbf{P}^i$, где J — множество тех i, для которых Λ^i — полная и вполне правильная компонента, и $\{q_i, i \in J\}$ — произвольный вероятностный вектор.*

Из этой теоремы следует, что *для единственности общего поднятия необходимо и достаточно, чтобы множество Λ имело не более одной полной и вполне правильной компоненты.*

3. Пример. Прежде чем приступать к доказательству сформулированных утверждений, обсудим упомянутое выше условие единственности из [1]. Беря в качестве второго аргумента переходных функций P_1, P_2 одноточечные множества, будем рассматривать эти функции как стохастические матрицы. Р. Л. Добрушин заметил, что если $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, P_2)$, то проекция меры $\mathbf{P}$ на X_1 служит стационарным распределением цепи Маркова с матрицей перехода P_1P_2, причем разные общие поднятия имеют и разные проекции (разумеется, индексы 1 и 2 можно поменять ролями). Отсюда получается следующее условие единственности общего поднятия двух переходных функций (см. [1], подстрочное примечание к с. 205), равносильное требованию, чтобы все состояния цепи Маркова с матрицей перехода P_1P_2 сообщались друг с другом: для любых $u', u'' \in X_1$ найдутся такие $n \geqslant 2$, $u_1, \ldots, u_n \in X_1$ и $v_1, \ldots, v_n \in X_2$, что

$$u_1 = u', \qquad u_n = u'', \qquad \prod_{k=1}^{n-1} P_2(u_k, v_k) P_1(v_k, u_{k+1}) > 0.$$

Это условие, не являясь необходимым для единственности стационарного распределения, не может быть таковым и для единственности общего поднятия. Однако и более слабое достаточное условие единственности общего поднятия, состоящее просто в том, чтобы цепь Маркова с матрицей перехода P_1P_2 или P_2P_1 обладала единственным стационарным распределением, не является необходимым. В этом можно убедиться с помощью простого примера. А именно, положим

$$X_1 = X_2 = \{1, 2, 3\}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что состояния цепей Маркова с матрицами перехода P_1P_2 и P_2P_1 разбиваются на два замкнутых класса, а потому у каждой из этих цепей стационарное распределение неединственно. С другой стороны, множество Λ состоит из двух связных компонент: $\Lambda^1 = \{(1, 1)\}$ и $\Lambda^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$, каждая из которых полна, но первая правильна, а вторая — нет. Поэтому $\mathscr{P}(P_1, P_2)$ согласно теореме 3 сводится к единственной мере, сосредоточенной в точке (1, 1).

4. Доказательство теоремы 1. Вначале покажем, что множество Λ служит носителем любой меры из $\mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$. Для меры $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ равенство $\mathbf{P}(\Lambda) = 1$ непосредственно вытекает из определения Λ. Это значит, что $\operatorname{supp} \mathbf{P} \subseteq \Lambda$. Обратно, предположим, что $\mathbf{P}(x) = 0$ для некоторой точки $x \in \Lambda$. Так как $P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)) > 0$ при любом $k \in [1, n]$, из определения общего поднятия следует, что $\mathbf{P}(\hat{\xi}_k = \xi_k(x)) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Но тем самым $\mathbf{P}(x') = 0$ для любой точки x', соседней по отношению к x, и — вследствие связности Λ — для любой точки $x' \in \Lambda$. Это противоречит равенству $\mathbf{P}(\Lambda) = 1$, и, следовательно, $\operatorname{supp} \mathbf{P} = \Lambda$.

Предположим теперь, что $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$, и возьмем любые две соседние точки $x, x' \in \Lambda$. По определению найдется такое $k \in [1, n]$, что $\hat{\xi}_k(x) = \hat{\xi}_k(x')$, откуда следует, что $\mathbf{P}_1(x) / \mathbf{P}_1(x') = \mathbf{P}_2(x) / \mathbf{P}_2(x')$, так как каждое из этих двух отношений совпадает с $P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)) / P_k(\hat{\xi}_k(x'), \xi_k(x'))$. Таким образом, оказывается, что для любых двух соседних точек $x, x' \in \Lambda$ выполняется соотношение $\mathbf{P}_1(x) / \mathbf{P}_2(x) = \mathbf{P}_1(x') / \mathbf{P}_2(x')$, которое в силу связности Λ моментально распространяется на любые $x, x' \in \Lambda$. Так как $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ — вероятностные меры, отсюда вытекает, что $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$.

5. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Предположим, что $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$. По доказанному в п. 4 $\operatorname{supp} \mathbf{P} = \Lambda$ и, следовательно, $\Lambda \neq \varnothing$. По той же причине для любой точки $x \in X$ и любого $k \in [1, n]$ справедливы равенство $\mathbf{P}(\xi_k \in X_k \setminus \Lambda_k(x),\ \hat{\xi}_k = \hat{\xi}_k(x)) = 0$ и неравенство $\mathbf{P}(\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_k(x)) > 0$, из которых вытекает, что $\mathbf{P}(\xi_k \in \Lambda_k(x) / \hat{\xi}_k = \hat{\xi}_k(x)) = 1$, т. е. Λ — полное множество. Остается заметить, что если $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ и точки $x, x' \in \Lambda$ являются соседними, то $\lambda(x, x') = \mathbf{P}(x') / \mathbf{P}(x)$ (см. (1), (3)). Отсюда следует, что $\mu(x, x') = \mathbf{P}(x') / \mathbf{P}(x)$ для любых $x, x' \in \Lambda$, а это непосредственно ведет к полной правильности множества Λ.

Достаточность. Пусть Λ — связное, полное и вполне правильное множество. Зафиксировав произвольную точку $x^0 \in \Lambda$, заметим, что если x, x' — соседние точки множества Λ, то

$$\mu(x^0, x') = \mu(x^0, x)\, \lambda(x, x'). \tag{4}$$

Определим вероятностную меру $\mathbf{P}$ равенством

$$\mathbf{P}(x) = \begin{cases} \mu(x^0, x)/M(x^0), & x \in \Lambda, \\ 0, & x \in X \setminus \Lambda, \end{cases}$$

где $M(x^0) = \sum\limits_{x \in \Lambda} \mu(x^0, x)$, и проверим, что $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$.

Из определения $\mathbf{P}$ видно, что для $y \in \hat{X}_k$ условие $P(\hat{\xi}_k = y) > 0$ равносильно непустоте множества

$$\Lambda(y) = \{x \in \Lambda\colon \hat{\xi}_k(x) = y\}.$$

В силу (3), (4) и определения $\mu(x^0, \cdot)$ для любой точки $x \in \Lambda(y)$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(\xi_k = \xi_k(x) | \hat{\xi}_k(y)) = \mathbf{P}(x) / \sum_{x' \in \Lambda(y)} \mathbf{P}(x') = \mu(x^0, x) / \sum_{x' \in \Lambda(y)} \mu(x^0, x') =$$

$$= 1 / \sum_{x' \in \Lambda(y)} \lambda(x, x') = P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)) / \sum_{x' \in \Lambda(y)} P_k(\hat{\xi}_k(x'), \xi_k(x')) =$$

$$= P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x)) / P_k(\hat{\xi}_k(x'), \Lambda_k(x)).$$

Вследствие полноты Λ знаменатель последней дроби равен единице, т. е. $\mathbf{P}(\xi_k = \xi_k(x) \mid \hat{\xi}_k = y) = P_k(\hat{\xi}_k(x), \xi_k(x))$, $x \in \Lambda(y)$, откуда, как легко видеть, вытекает (1).

6. Доказательство теоремы 3. 1) Пусть Λ^i — полная и вполне правильная компонента множества Λ. Положим

$$L_k^i = \{\xi_k(x)\colon x \in \Lambda^i\},\ k = 1, \ldots, n;\ L^i = L_1^i \times \ldots \times L_n^i. \tag{5}$$

Очевидно, L^i — наименьшее из содержащих Λ^i множеств вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_k \subset X_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Пусть $\hat{L}_k^i$ — такое же произведение, как L^i, но без сомножителя L_k^i. Ограничив функцию $P_k(\cdot, \cdot)$ по первой переменной на множество $\hat{L}_k^i \subset \hat{X}_k$, а по второй — на совокупность подмножеств множества $L_k^i \subset X_k$, получим новую функцию, которую обозначим P_k^i, $k = 1, \ldots, n$. Полнота Λ^i позволяет утверждать, что P_k^i — вероятностная мера по второй переменной. Благодаря полной правильности Λ^i теперь можно применить теорему 2, заменив X_k, P_k (при $k = 1, \ldots, n$) и Λ на L_k^i, P_k^i и Λ^i соответственно. Общее поднятие переходных функций $P_1^i, \ldots, P_n^i$, которое по этой теореме существует, единственно и сосредоточено на Λ^i (см. п. 5), продолжим на X, положив его равным нулю на $X \setminus \Lambda^i$, и полученную меру обозначим $\mathbf{P}^i$. Из построения видно, что $\mathbf{P}^i \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$.

2) Множество Λ^i, как нетрудно понять, обладает следующим свойством: если $x \in \Lambda^i$, $x' \in \Lambda^{i'}$, где $i \neq i'$, то $\hat{\xi}_k(x) = \hat{\xi}_k(x')$ при $k = 1, \ldots, n$. Отсюда с учетом соотношения $\operatorname{supp} \mathbf{P} = \Lambda$ (см. п. 4) непосредственно следует (см. доказательство необходимости в п. 5), что если $\mathbf{P} \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$ и $\mathbf{P}(\Lambda^i) > 0$ при некотором i, то Λ^i — полная и правильная компонента множества Λ. Для любого такого $\mathbf{P}$ положим $\mathbf{Q}^i(A) = \mathbf{P}(A \mid \Lambda^i)$, $A \subset X$. Из тех же соображений вытекает, что $\mathbf{Q}^i \in \mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$. В силу теоремы 1 ограничение меры $\mathbf{Q}^i$ на L^i (см. (5)) совпадает с аналогичным ограничением меры $\mathbf{P}^i$, так как каждое из этих ограничений служит общим поднятием переходных функций $P_1^i, \ldots, P_n^i$, введенных в первой части доказательства. Заметив, что $\mathbf{P}^i(L^i) = \mathbf{Q}^i(L^i) = 1$, получаем $\mathbf{Q}^i = \mathbf{P}^i$. Отсюда следует, что если мера $\mathbf{P}$ принадлежит $\mathscr{P}(P_1, \ldots, P_n)$, то она имеет вид, указанный в формулировке теоремы. Обратное утверждение очевидно. Этим завершается доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добрушин Р. Л.* Задание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.— Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 2, с. 201—229.
2. *Добрушин Р. Л.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, в. 3, с. 469—497.
3. *Добрушин Р. Л.* Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины.— Теор. и матем. физ., 1970, т. 4, № 1, с. 101—118.
4. *Abrahams J., Thomas J. B.* A note on the characterization of bivariate densities by conditional densities.— Commun. Statist.: Theory and Math., 1984, v. 13, № 3, p. 395—400.

Поступила в редакцию
22.IX.1989