А. В. Губарев, В. И. Ковбасюк, К анализу эффекта холла в движущейся плазме, *ТВТ*, 1964, том 2, выпуск 2, 156–159

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 2 *1964* *№ 2*

УДК 533.9

К АНАЛИЗУ ЭФФЕКТА ХОЛЛА В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

А. В. Губарев, В. И. Ковбасюк

В сильных магнитных полях или в разреженной плазме произведение циклотронной частоты на время свободного пробега для электрона, $\omega\tau$, может оказаться сравнимым или больше 1, проводимость среды будет существенно анизотропной, и при исследовании характера магнитогидродинамических течений становится необходимым учитывать эффект Холла. В работах [1, 2] предложен аналитический метод исследования влияния эффекта Холла. В работе [3] показано, что для анализа таких задач может успешно использоваться графический метод. В статье рассматривается один из способов построения энергетических характеристик потока плазмы, движущейся в скрещенных магнитном и электрическом полях.

Рассмотрим элемент объема невязкой, несжимаемой и нетеплопроводной плазмы с постоянными σ_0 и $\omega\tau$, движущейся в направлении оси x со скоростью u (рис. 1). Примем также, что магнитное число Рейнольдса мало ($\mathrm{Re} \ll 1$) и эффект скольжения ионов отсутствует. Будем считать вектор индукции магнитного поля **B** параллельным оси z, а вектор электрического поля **E** — лежащим в плоскости xy.

Для удобства векторных операций представим **E** и **J** (**J** — вектор плотности электрического тока в плазме) в виде чисел на комплексной плоскости [3], т. е.

$$E = E_x + iE_y, \qquad J = J_x + iJ_y.$$

Тогда обобщенный закон Ома [4]

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}\left(\mathbf{E} - \omega\tau\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{|B|}\right)$$

можно записать в комплексной форме:

$$J = \frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}(E' + i\omega\tau E'), \qquad E' = E_x + i(E_y - uB); \tag{1}$$

uB — э. д. с., индуцированная в газе; σ_0 — проводимость при отсутствии магнитного поля.

Так же просто записывается и выражение для удельной электрической мощности, вводимой в поток или отдаваемой им источнику внешнего электрического поля:

$$N = -\mathrm{Re}(EJ^*) \qquad \text{или} \qquad N = -\mathrm{Re}(E^*J); \tag{2}$$

J^*, E^* — числа, комплексно сопряженные, соответственно, J и E.

Подстановка (1) в (2) дает:

$$N = \sigma_0 u^2 B^2\left[\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}X - X^2 + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}Y - Y^2\right],$$
$$X = -\frac{E_x}{uB\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \qquad Y = \frac{E_y}{uB\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}. \tag{3}$$

Нормируя N по $N_{\text{макс}} = 0{,}25\ \sigma_0 u^2 B^2$ и обозначив нормированное значение через N^*, после несложных преобразований получим:

$$0{,}25(1 - N^*) = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2,$$
$$X_0 = 0{,}5\ \omega\tau / \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}, \qquad Y_0 = 0{,}5 / \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}. \tag{4}$$

На плоскости XY уравнение (4) представляется семейством концентрических окружностей радиуса $r = 0{,}5\sqrt{1 - N^*}$. Центр окружностей находится на конце радиуса-вектора с модулем $\rho = 0{,}5$, проведенного из начала координат под углом $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(\omega\tau)$ к оси Y. Отметим, что окружность $N^* = 0$ проходит через начало координат $(0, 0)$ и пересекает оси Y и X, соответственно, в точках $P[0, (1 + \omega^2\tau^2)^{-1}]$, $S[\omega\tau(1 + \omega^2\tau^2)^{-1}, 0]$.

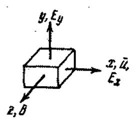

Рис. 1

Область $N^* > 0$ соответствует случаю, когда электроэнергия отводится от потока, а указанные характерные точки представляют следующие граничные условия: а) внешнее электрическое поле отсутствует, $E_x = E_y = 0$ $(X = 0,\ Y = 0)$; б) продольное поле отсутствует, $E_x = 0$ и $J_y = 0$; в) поперечное поле равно нулю, $E_y = 0$ и $J_x = 0$.

Поток плазмы, испытывая при $N^* \geqslant 0$ воздействие тормозящих сил, совершает работу, величина которой за единицу времени в единице объема (так называемая «тормозная мощность») определяется выражением:

$$N_{\text{т}} = -uJ_yB.$$

Определив J_y из (1) и используя (3), можно получить:

$$N_{\text{т}} = \frac{\sigma_0 u^2 B^2}{1 + \omega^2\tau^2}\left(1 + \omega\tau\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\,X - \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\,Y\right). \tag{5}$$

На плоскости XY уравнению (5) соответствует семейство прямых $N_{\text{т}} = \text{const}$, образующих с осью X угол наклона $\theta = \operatorname{arc\,tg}\omega\tau$.

Нетрудно показать, что выражение для удельных диссипативных потерь на джоулево тепло:

$$q = \frac{Q}{N_{\text{т}}} = \frac{N_{\text{т}} - N}{N_{\text{т}}},$$

можно представить на плоскости XY в виде семейства окружностей радиуса $r_1 = 0{,}5\ q$. Действительно, после преобразований из (3) и (5) получим:

$$0{,}25q^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2,$$
$$X_1 = \frac{q}{2}\,\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad Y_1 = \left(1 - \frac{q}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}. \tag{6}$$

Геометрическим местом центров окружностей $q = \text{const}$ является прямая, проходящая через точки P, S, т. е. точки пересечения окружности $N^* = 0$ с осями координат. Заметим, что точка P является общей для всего семейства окружностей равных q при заданном $\omega\tau$. Окружности $N^* = 0$ и $q = 1$ совпадают.

В качестве примера на рис. 2, 3 и 4 в области $N^* \geqslant 0$ построены изолинии N^* и q при трех значениях $\omega\tau$, равных соответственно 0, 1 и ∞. Построенные графики позволяют провести несложный анализ процессов в движущейся плазме. Рассмотрим несколько случаев.

1. Продольное поле отсутствует. $E_x = 0$ и $X = 0$ является характеристической прямой режимных характеристик течения. Отсчет значений N^*

и q производится непосредственно по оси Y. Очевидно, в точке (0,0) поперечное поле также равно нулю, $N^* = 0$ и $q = 1$. В точке P внешнее электрическое поле E_y равно электродвижущей силе в потоке uB, причем $N^* = 0$, $q = 0$. В приложении к конкретным магнитогидродинамическим

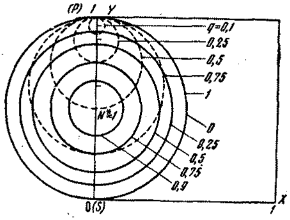

Рис. 2

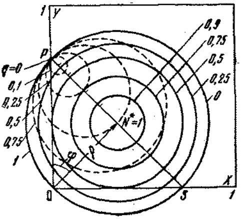

Рис. 3

устройствам указанные точки соответствуют режимам короткого замыкания и холостого хода. Параметр $(1 - q)$ характеризует эффективность процессов преобразования в потоке.

2. Поперечное поле равно нулю. Характеристической прямой $E_y = 0$ служит $Y = 0$, т. е. отсчет характеристик производится непосредственно по оси X. Заметим, что в соответствии с (1) $J_x = 0$ при $N^* = 0$ в точке S, т. е. при $E_x^0 = \omega\tau\, u B$. Назовем $m = E_x / E_x^0$ параметром продольной нагрузки, тогда $q = m$ при $\omega\tau \to \infty$.

3. Продольный ток отсутствует. Из (1) находим, что условию $J_x = 0$ соответствует характеристическая прямая:

$$Y = (1 + \omega^2\tau^2)^{-1/2} - X / \omega\tau,$$

проходящая через точки пересечения окружности $N^* = 0$ с осями координат. Отметим, что в этом случае $q = 1 - n$, где n — параметр нагрузки, равный E_y / E_y^0 (E_y^0 — поле при $J_y = 0$), и вдоль характеристической прямой $J_x = 0$ N^* не зависит от $\omega\tau$.

4. Эквипотенциали электрического поля $\mathbf{E}$ наклонены к вектору скорости $\mathbf{u}$ под определенным углом, т. е.

$$E_y / E_x = \text{const} = a.$$

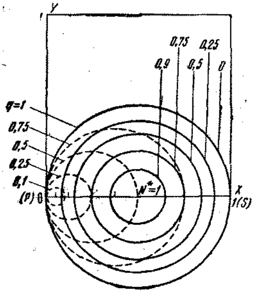

Рис. 4

Характеристическая прямая проходит через начало координат под углом $\operatorname{arc\,tg} a$ к оси X. Следует отметить, что в этом случае ни на одном из возможных режимов, кроме $a = \infty$ или $\omega\tau = \infty$, нельзя получить $q = 0$.

Рассмотрим вопрос об оптимальном режиме течения плазмы в перекрестном магнитном поле, условившись считать режим оптимальным в том случае, когда отдача электрической энергии N^* внешнему источнику поля происходит при минимальном значении диссипативных потерь джоулева тепла. Очевидно, оптимальным является режим, определяемый верхней ветвью характеристической прямой п. 3 в области $1 \geqslant N^* \geqslant 0{,}5$; $0{,}5 \geqslant q \geqslant 0$. В оптимальном режиме любому значению q соответствует наибольшее из возможных значений N^*.

Научно-исследовательский
институт высоких температур

Поступила в редакцию
12 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Harris, J. Cobine, Trans. ASME, ser. A, 83, № 4, 392, 1961.
2. A. Montardy, Rep. on the «Symposium on magnetoplasmadynamic electrical power generation». Newcastle upon Tyne, 6—8 sept., 1962.
3. B. Bürgel, Rep. on the «Symposium on magnetoplasmadynamic electrical power generation». Newcastle upon Tyne, 6—8 sept., 1962.
4. Т. Каулинг, Магнитная гидродинамика. ИЛ, 1959.