И. В. Станкевич, Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла, *Докл. АН СССР*, 1970, том 192, номер 1, 34–37

Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

И. В. СТАНКЕВИЧ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 13 X 1969)

1°. Оператором Хилла называется минимальный замкнутый дифференциальный оператор H, порождаемый в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением

$$l[y] = -y''(x) + q(x)y(x), \tag{1}$$

где $q(x)$ — периодическая функция периода a.

Будем предполагать, что $q(x)$ — вещественная функция, ограниченная на отрезке $[0, a]$. Тогда оператор H самосопряжен и его спектр хорошо изучен (см., например, ([1])).

Обозначим через $\theta(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ решения уравнения Хилла

$$l[y] = \lambda y, \tag{2}$$

удовлетворяющие при $x = 0$ граничным условиям $\theta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0$; $\theta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = 1$, и через θ, θ', φ и φ' — значения, которые эти функции вместе со своими производными по x принимают в точке $x = a$. Параметр λ для простоты записи опущен. Функция

$$\Delta(\lambda) = \theta + \varphi' \tag{3}$$

называется дискриминантом уравнения Хилла. Обозначим

$$\Phi_\pm(\lambda) = \Delta(\lambda) \mp 2. \tag{4}$$

Пусть λ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ — нули функции $\Phi_+(\lambda)$, расположенные в порядке неубывания их вещественных частей, и μ_j — нули функции $\Phi_-(\lambda)$, упорядоченные тем же способом. Известно ([1]), что λ_j и μ_j — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda_0 < \mu_0 \leqslant \mu_1 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_3 \leqslant \mu_4 < \ldots \tag{5}$$

Интервалы

$$Z_{2k} = [\lambda_{2k}, \mu_{2k}], \quad Z_{2k+1} = [\mu_{2k+1}, \lambda_{2k+1}] \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

называются интервалами устойчивости. Интервалы

$$\tilde{Z}_{2k} = (\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}), \quad \tilde{Z}_{2k+1} = (\mu_{2k}, \mu_{2k+1}) \quad (k = 0, 1, \ldots; \lambda_{-1} = -\infty) \tag{7}$$

называются интервалами неустойчивости. Множество интервалов устойчивости образует спектр оператора H.

Изучению вопроса об определении уравнения Хилла по его дискриминанту посвящен ряд работ. В частном случае, когда все интервалы неустойчивости исчезают, в работах ([5], [6]) было доказано, что $q(x)$ — постоянная величина.

В случае, когда не исчезает лишь конечное число интервалов неустойчивости, свойства потенциала $q(x)$ были изучены в работе ([5]). М. Г. Крейн ([2]), изучая обратную задачу спектрального анализа для уравнения колебания бесконечной струны с периодическим распределением масс, показал, что даже в случае симметричной струны существует бесконечное множество струн с одним и тем же дискриминантом. Учитывая связь между уравнением колебания струны и уравнением типа Штурма — Лиувилля, из результатов М. Г. Крейна следует, что дискриминант $\Delta(\lambda)$ не может в общем случае определять однозначно потенциал $q(x)$.

Возникает естественный вопрос, какие спектральные характеристики, кроме дискриминанта $\Delta(\lambda)$, должны быть известны, чтобы по ним потенциал $q(x)$ определялся единственным образом?

В настоящей работе дается одно из решений этой задачи.

2^0. Определим матрицу второго порядка $\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}(\lambda)\|_{i,j}^{1,2}$ с элементами $\sigma_{ij}(\lambda)$, являющимися аналитическими функциями комплексного переменного λ

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi & {}^1/_2(\varphi' - \theta) \\ {}^1/_2(\varphi' - \theta) & -\theta' \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Используя равенство $\theta\varphi' - \varphi\theta' = 1$, несложно показать, что

$$\det\sigma(\lambda) = [4 - \Delta(\lambda)^2]/4. \tag{9}$$

Матрицу $\sigma(\lambda)$, определенную по формуле (8), будем называть в дальнейшем σ-матрицей. Эта матрица играет важную роль в спектральной теореме уравнения Хилла, ибо с ее помощью определяется спектральная матрица $\rho(\lambda)$ ([1]) для оператора H:

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} (-1)^k 4\sigma(\lambda)(\det\sigma(\lambda))^{-1/2}, & \lambda \in Z_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \\ 0, & \lambda \in \tilde{Z}_j \quad (j = 0, 1, \ldots). \end{cases} \tag{10}$$

В настоящей статье мы решим задачу о восстановлении периодического потенциала $q(x)$ по некоторым элементам σ-матрицы.

Теорема 1. *Пусть $q_j(x) \in L_1(0, a)$, $j = 1, 2$,— вещественные функции и пусть H_1 и H_2 — операторы Хилла с потенциалами $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Обозначим $\sigma_j(\lambda)$ σ-матрицы для этих операторов. Тогда, если $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda)$, то и $q_1(x) = q_2(x)$ почти везде.*

Доказательство. По условиям теоремы 1 $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda)$. Введем обозначения

$$\sigma(\lambda) = \sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\lambda) & \sigma_{12}(\lambda) \\ \sigma_{12}(\lambda) & \sigma_{22}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Так как $\sigma(\lambda)$ является σ-матрицей для оператора Хилла, то должно быть $\sigma_{11}(\lambda) = \varphi(\lambda)$; $\sigma_{12}(\lambda) = {}^1/_2(\varphi_p' - \theta_p)$; $\sigma_{22}(\lambda) = -\theta'$; $\det\sigma(\lambda) = [4 - (\varphi_p' + \theta_p)^2]/4$, где $\varphi(\lambda) \equiv \varphi_p, \varphi_p', \theta_p, \theta' \equiv \theta_p$ — значения в точке $x = a$ решений $\theta_p(x, \lambda)$ и $\varphi_p(x, \lambda)$, построенных для уравнений $-y'' + q_p(x)y = \lambda y$.

Пусть γ — нуль функции $\sigma_{11}(\lambda)$. Этот нуль принадлежит одному из интервалов неустойчивости $\tilde{Z}_j$ и $\operatorname{sign}(\varphi_p' + \theta_p)(\gamma) = (-1)^j$. Учитывая это равенство, найдем

$$\varphi_p'(\gamma) - \theta_p(\gamma) = 2\sigma_{12}(\gamma); \quad \varphi_p'(\gamma) + \theta_p(\gamma) = (4 - 4\det\sigma(\gamma))^{1/2}(-1)^j, \quad (*)$$

где $\sigma_{12}(\gamma)$ и $\det\sigma(\gamma)$ считаются известными величинами. Решив систему уравнений $(*)$ относительно величин $\varphi_p'(\gamma)$ и $\theta_p(\gamma)$, найдем значения функций φ_p' и θ_p в точках γ, где $\varphi(\gamma) = 0$. В результате получим, что двум различным потенциалам $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответствует одна и та же функция $\varphi(\lambda) = \sigma_{11}(\lambda)$ и значения функции φ_1' и φ_2' совпадают: $\varphi_1'(\gamma) = \varphi_2'(\gamma)$ во всех точках γ, где $\varphi(\gamma) = 0$.

Таким образом, мы пришли к двум граничным задачам: $-y'' + q_p(x)y = \lambda y$, $y(0) = y(a) = 0$ $(p = 0, 1)$, которые имеют один и тот же спектр, определяемый нулями γ_n функции $\varphi(\lambda)$, и одну и ту же спектральную функцию $\tau(\lambda)$, скачки a_n которой в точках γ_n определяются числами $a_n = d\varphi(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=\gamma_n}\varphi'(\gamma_n)$, где $\varphi'(\gamma_n) = \varphi_p'(\gamma_n)$.

В силу теоремы единственности (см., например, ([4])), найдем $q_1(x) = q_2(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ почти везде, и в силу периодичности $q_1(x) = q_2(x)$ при любых $-\infty < x < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы полностью определить σ-матрицу оператора Хилла, достаточно задать следующие ее элементы: 1) диагональный элемент $\sigma_{11}(\lambda)$ (или $\sigma_{22}(\lambda)$); 2) $\det\sigma(\lambda)$; 3) знаки недиагонального элемента $\sigma_{12}(\lambda)$ в тех точках λ, где $\sigma_{11}(\lambda) = 0$, $\det\sigma(\lambda) \neq 0$* *.

Доказательство. Пусть $\sigma_{11}(\gamma) = \varphi(\gamma) = 0$. Тогда $\theta\varphi' = 1$. Отсюда найдем $4\sigma_{12}(\gamma)^2 = (\theta - \varphi')^2 = -4\det\sigma(\gamma) > 0$. Поэтому система уравнений (*) может быть переписана в виде

$$\varphi'(\gamma) - \theta(\gamma) = 2|\det\sigma(\gamma)|^{1/2}\operatorname{sign}(\varphi' - \theta),$$
$$\varphi'(\gamma) + \theta(\gamma) = (4 - 4\det\sigma(\gamma))^{1/2}(-1)^j.$$

Следовательно, значения функции φ' в точках, где $\varphi = 0$, определяются заданием $\det\sigma(\gamma)$ и функции $\operatorname{sign}(\varphi' - \theta)$.

Повторяя дословно конец доказательства теоремы 1, мы придем к теореме 2.

Следствие 1. *Дискриминант $\Delta(\lambda)$ определяет уравнение Хилла однозначно только в случае, когда исчезают все интервалы неустойчивости.*

Теорема 3. *Пусть заданы две целые функции $D(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ и в точках γ, в которых $\varphi(\gamma) = 0$, определена функция $\chi(\gamma)$, принимающая значение $+1$ или -1 для тех γ, где $D(\gamma) \neq 0$, и значение, равное нулю, если $D(\gamma) = 0$.*

Для того чтобы существовал оператор Хилла с потенциалом $q(x)$ периода a, где $q^{(m)}(x) \in L_1(0, a)$, $m \geqslant 1$, и с σ-матрицей $\sigma(\lambda)$ такой, что $D(\lambda) = \det\sigma(\lambda)$, $\varphi(\lambda) = \sigma_{11}(\lambda)$ и $\operatorname{sign}\sigma_{12}(\gamma) = \chi(\gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1) *Функция $\varphi(\lambda)$ представляется в виде*

$$\varphi(\lambda) = a\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k - \lambda}{(k+1)^2c^2}, \tag{11}$$

где γ_k — вещественные числа, $\gamma_k < \gamma_j$, $k < j$, удовлетворяющие асимптотическим формулам

$$\gamma_k = (k+1)^2c^2 + a_0 + o(1), \tag{12}$$

$c = \pi / a$, a_0 — постоянное число.

2) *Функция $D(\lambda)$ представляется в виде*

$$D(\lambda) = \Phi_+(\lambda)\Phi_-(\lambda), \tag{13}$$

где

$$\Phi_+(\lambda) = 4\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{2k} - \lambda}{(2k+1)^2c^2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{2k+1} - \lambda}{(2k+1)^2c^2}; \tag{14}$$

$$\Phi_-(\lambda) = a^2\lambda_0\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k} - \lambda}{4k^2c^2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1} - \lambda}{4k^2c^2}; \tag{15}$$

здесь μ_ν, λ_ν — вещественные числа, такие что

$$\lambda_{2n-1(2n)} = (2n)^2c^2 + a_0 + o(1), \tag{16}$$

$$\mu_{2n(2n+1)} = (2n+1)^2c^2 + a_0 + o(1). \tag{17}$$

3) *Имеют место равенства*

$$\Phi_+(\lambda_\nu) = -4, \quad \Phi_-(\lambda_\nu) = 4 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

4) *Числа γ_n, μ_n, λ_n удовлетворяют неравенствам $\lambda_0 < \mu_0 \leqslant \gamma_0 \leqslant \mu_1 < \lambda_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant \mu_3 < \lambda_3 < \ldots$*

---

* Можно показать, что в точках λ, где $\sigma_{11}(\lambda) = 0$, $\det\sigma(\lambda) = 0$, будет $\sigma_{12}(\lambda) = 0$.

5) *Функция*

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin\sqrt{\gamma_n}\, x \cdot \sin\sqrt{\gamma_n}\, y}{\gamma_n B_n} - \frac{2}{\pi} \sin(n+1)x \sin(n+1)y \right), \quad (19)$$

где

$$B_n = (-1)^n \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\gamma_n} ((-1)^n \chi(\gamma_n) D^{1/2}(\gamma_n) + \sqrt{-D(\gamma_n)+1}), \quad (20)$$

имеет $(m+1)$*-суммируемые производные в области* $(0 \leqslant x, t \leqslant \pi)$.

Теорема 4. *Если*

$$\sqrt{\gamma_n} = (n+1)c + A_0/n + A_1/n^3 + O(1/n^4), \quad (21)$$

$$\lambda_{2n-1(2n)} = (2n)^2 c^2 + a_0 + O(1/n^{1+\delta}), \quad (22)$$

$$\mu_{2n+1(2n)} = (2n+1)^2 c^2 + a_0 + O(1/n^{1+\delta}), \quad \delta > 0, \quad (23)$$

то существует оператор Хилла с абсолютно непрерывной функцией $q(x)$.

3^0. Решение обратной задачи для уравнения Хилла на всей прямой связано существенным образом с обратной задачей для уравнения Хилла на полупрямой.

Будем рассматривать в пространстве $L_2(0, \infty)$ самосопряженный оператор H_+, порождаемый дифференциальным выражением (1) и граничным условием $y(0) = 0$.

Теорема 5. *Пусть заданы три последовательности вещественных чисел* λ_ν, μ_ν, γ_ν, *удовлетворяющие условиям* (11)—(18) *и условию* 5) *теоремы* 3, *и пусть выполняются строгие неравенства*

$$\lambda_0 < \mu_0 < \gamma_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \gamma_1 < \lambda_2 < \ldots \quad (24)$$

Тогда существует и при том только один оператор Хилла H_+ *с потенциалом* $q(x)$, $q^{(m)}(x) \in L_1(0, a)$ *периода* a, *спектр которого совпадает с множеством* Σ

$$\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\lambda_{2k}, \mu_{2k}] + \bigcup_{k=0}^{\infty} [\mu_{2k+1}, \lambda_{2k+1}] + \bigcup_{k=0}^{\infty} \gamma_k.$$

Числа γ_k *являются собственными числами оператора* H_+.

Теорема 6. *Пусть заданы две последовательности вещественных чисел* $\{\lambda_\nu\}$, $\{\mu_\nu\}$, *удовлетворяющие неравенствам* (5), *и пусть интервалы* Z_j *вещественной прямой определены по формуле* (6). *Предположим, что на множестве* $\bigcup_{j=0}^{\infty} Z_j$ *задана вещественная функция* $p(\lambda)$. *Для того чтобы существовал оператор Хилла с потенциалом* $q(x)$ *периода* a, *где* $q^{(m)}(x) \in L_1(0, a)$, *и спектральной матрицей* $\rho(\lambda) = \|\rho_{ij}(\lambda)\|_{i,j}^{1,2}$ *такой, что* $\rho_{11}(\lambda) = p(\lambda)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $p(\lambda)$ *допускала факторизацию вида* $p(\lambda) = \varphi(\lambda) / (D(\lambda))^{1/2}$, *где* $\varphi(\lambda)$ *и* $D(\lambda)$ — *целые функции, удовлетворяющие условиям теоремы* 3.

В заключение выражаю благодарность профессорам Б. М. Левитану и А. Г. Костюченко за предоставленную возможность обсудить полученные результаты на руководимом ими семинаре.

Институт элементоорганических соединений
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 2, ИЛ, 1961. [2] М. Г. Крейн, ДАН, 76, № 3, 315 (1951). [3] Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 63 (1964). [4] Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, УМН, 19, в. 2 (116) (1964). [5] H. Hochstadt, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 19, № 5, 353 (1965). [6] G. Borg, Acta Math, 78, 1 (1946).