П. Самовол, М. Аппельбаум, А. Жуков, Дополняй и властвуй,
Квант, 2006, номер 5, 25–27

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Гирьки набора 1 г, 2 г, ..., 100 г разложили по 50 штук на 2 чашки весов так, что весы показали равновесие. Верно ли, что с каждой чашки можно снять по 2 гирьки так, что равновесие сохранится?

В. Произволов

7. Укажите две целочисленные арифметические прогрессии такие, чтобы в первой было сколько угодно квадратов целых чисел, но ни одного куба, а во второй – сколько угодно кубов, но ни одного квадрата.

А. Зайчик

8. Многоугольник имеет 400 углов, каждый из которых равен целому числу градусов. Докажите, что у многоугольника найдутся 3 параллельные стороны.

В. Произволов

9. Неотрицательные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\geq\frac{5}{2}.$$

В.Шарич, В.Сендеров

10. Какое наибольшее количество шахматных коней можно расставить на доске 101×101 клеток так, чтобы они не били друг друга?

В.Брагин (ученик 8 кл.)

Дополняй и властвуй

П.САМОВОЛ, М.АППЕЛЬБАУМ, А.ЖУКОВ

Принцип «DIVIDE ET IMPERA», или «разделяй и властвуй», приписывают Александру Македонскому. В науке он тоже находит свое применение. Так, большую проблему бывает полезно разложить на ряд небольших задач. Иногда, однако, помогает и обратное преобразование, т.е. дополнение «части» до «целого». Это довольно часто происходит при решении геометрических задач, когда дополнительные построения помогают справиться с задачей быстро и эффективно. В алгебре прием «дополняй и властвуй» менее популярен. Но не менее эффективен. Вот примеры.

Задача 1. Разложите на множители:

$$1)\ x^4+1;\quad 2)\ x^8+x+1.$$

Решение. В первом примере дополним выражение до полного квадрата:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=$$
$$=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right).$$

Во втором примере дополнение выстраивается «лесенкой»:

$$x^8+x+1=$$
$$=\left(x^8+x^7+x^6\right)-\left(x^7+x^6+x^5\right)+\left(x^5+x^4+x^3\right)-$$
$$-\left(x^4+x^3+x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right).$$

Задача 2. Докажите равенство

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}=\frac{7}{2}-\frac{6}{3}+\frac{5}{4}-\frac{4}{5}+\frac{3}{6}-\frac{2}{7}+\frac{1}{8}.$$

Решение. Конечно, действуя стандартно, можно было бы привести дроби к одному знаменателю, но это делать как-то не хочется... Давайте попробуем прибавить к обеим частям равенства одну и ту же сумму $\frac{7}{2}+\frac{6}{3}+\frac{5}{4}+\frac{4}{5}+\frac{3}{6}+\frac{2}{7}+\frac{1}{8}$ и посмотрим, что получится.

В левой части:

$$\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{4}+\frac{6}{3}+\frac{7}{2}=$$
$$=4+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(1+\frac{3}{3}\right)+\left(1+\frac{5}{2}\right).$$

В правой части:

$$2\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{4}+\frac{3}{6}+\frac{1}{8}\right)=7+\frac{5}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}$$

– но ведь это то же самое, что и в левой части!

Упражнение 1. Докажите равенство

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{3}{2n+2}+\frac{5}{2n+3}+\ldots+\frac{4n-1}{4n}=$$

$$=\frac{4n-1}{2}-\frac{4n-2}{3}+\frac{4n-3}{4}-\ldots-\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{4n}.$$

Задача 3. Упростите выражение

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Решение. Эта классическая задача допускает множество красивых решений. Наиболее известное из них такое. Заметим, что дробь вида $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ можно «расщепить» на алгебраическую сумму дробей попроще: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Если расписать таким образом каждое слагаемое в сумме, то обнаружится, что в новом выражении почти все дроби чудесным образом взаимно уничтожаются:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Расскажем еще об одном, не менее изящном, способе решения этой задачи. Дополним данное выражение дробью $\frac{-n}{n+1}$ (справа) и начнем складывать дроби «с конца»:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{n}{n+1}=\frac{1-n^2}{n\cdot(n+1)}=\frac{1-n}{n}=\frac{-(n-1)}{n}.$$

Как видим, получилась дробь такого же вида, что и прибавка $\frac{-n}{n+1}$, но с уменьшенными на единицу числителем и знаменателем. Значит, продолжая складывать полученный результат с предыдущей дробью, мы от шага к шагу будем «сворачивать» всю цепочку и «на финишной прямой» получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2}=0.$$

Итак, исходная сумма равна $\frac{n}{n+1}$.

Задача 4. Вычислите

$$52\cdot 50-53\cdot 49+54\cdot 48-55\cdot 47+\ldots+100\cdot 2-101\cdot 1.$$

Решение. Дополним выражение алгебраическими слагаемыми, в сумме дающими ноль (они подчеркнуты):

$$(52\cdot 50-\underline{50\cdot 49})+(\underline{50\cdot 49}-53\cdot 49)+$$

$$+(54\cdot 48-\underline{48\cdot 47})+(\underline{48\cdot 47}-55\cdot 47)+\ldots$$

$$\ldots+(100\cdot 2-\underline{2\cdot 1})+(\underline{2\cdot 1}-101\cdot 1)=$$

$$=(50\cdot 3-49\cdot 3)+(48\cdot 7-47\cdot 7)+\ldots$$

$$\ldots+(2\cdot 99-1\cdot 99)=3+7+11+\ldots+99=$$

$$=\frac{3+99}{2}\cdot 25=1275.$$

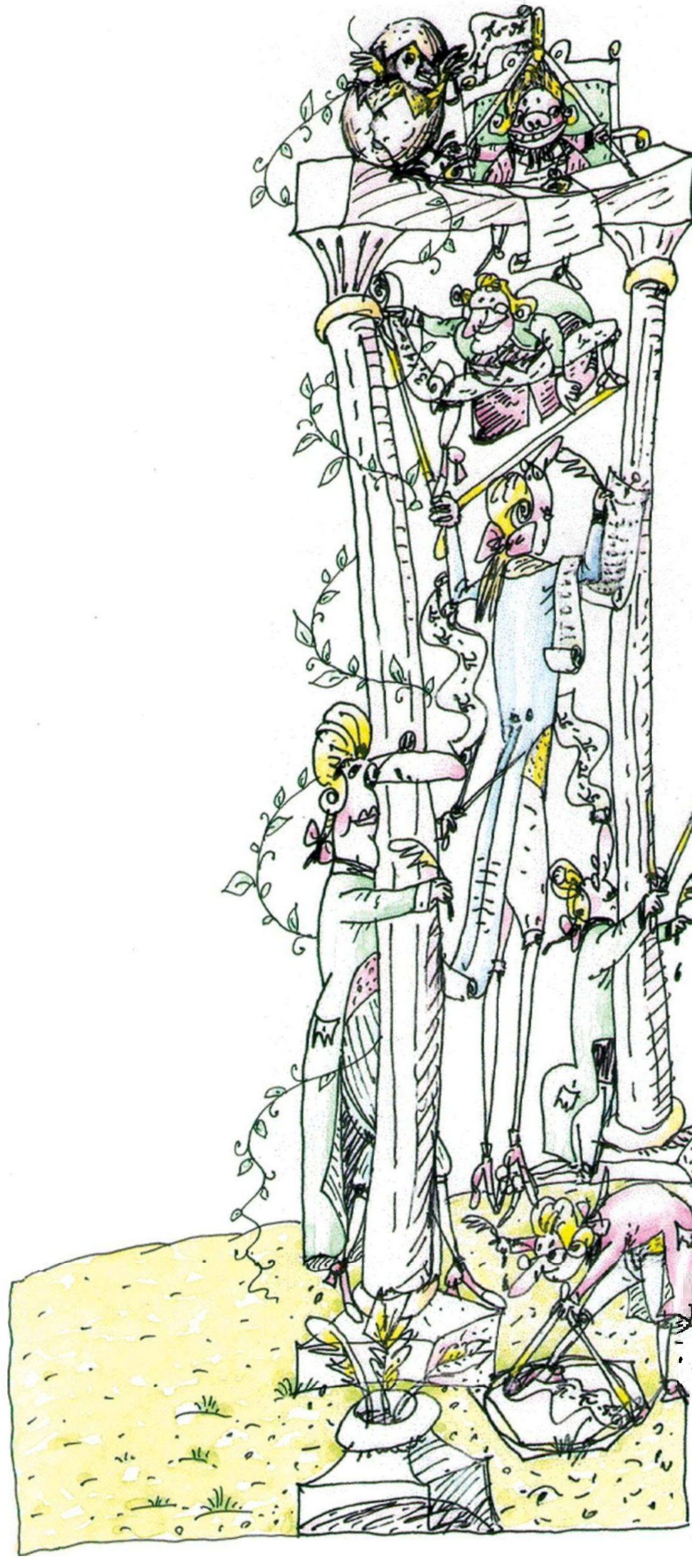

Иллюстрация В.Иванюка

Задача 5. Докажите, что каждый член последовательности 16, 1156, 111556, ... является квадратом целого числа.

Решение. Рассмотрим n-й член последовательности:

$$a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot 10^n + 5\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1,$$

n цифр в числе $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ и n-я степень десятки (10^n) наводят на мысль «дополнить» единицы до девяток:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n} = \frac{1}{9}\cdot\left(10^n - 1\right).$$

А дальше обычная техника:

$$a_n = \frac{1}{9}\cdot\left(10^n - 1\right)\cdot 10^n + \frac{5}{9}\cdot\left(10^n - 1\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(10^{2n} - 10^n + 5\cdot 10^n\right) - \frac{5}{9} + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4\right) = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2.$$

(Подумайте, почему число $10^n + 2$ делится на 3.)

Упражнение 2. а) Докажите, что каждое число последовательности

$$\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}, \ldots$$

является кубом целого числа.

б) (по мотивам задачи «Турнира городов», 2006). Докажите, что можно найти бесконечно много пар целых чисел таких, чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 7 и произведение чисел каждой пары тоже было числом, все цифры которого не меньше 7.

(*Подсказка*: докажите, что для любого целого $k \ge 0$ пара чисел $m = 8\underbrace{99\ldots9}_{k}87$, $n = 8\underbrace{77\ldots7}_{k+2}$ удовлетворяет условию задачи.)

Задача 6. Докажите неравенство

$$\frac{20\cdot18}{19\cdot17} + \frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{19\cdot17\cdot15\cdot13} + \ldots + \frac{20\cdot18\cdot16\cdot14\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{19\cdot17\cdot15\cdot13\cdot\ldots\cdot3\cdot1} > 10$$

(в каждой дроби четное количество множителей в числителе и в знаменателе).

Решение. При рассмотрении суммы в левой части неравенства – обозначим ее S_1 – невольно возникает впечатление, что ее можно дополнить промежуточными слагаемыми. Попробуем: давайте добавим к ней сумму

$$S_2 = \frac{20}{19} + \frac{20\cdot18\cdot16}{19\cdot17\cdot15} + \ldots + \frac{20\cdot18\cdot16\cdot\ldots\cdot4}{19\cdot17\cdot15\cdot\ldots\cdot3}.$$

Складывая дроби в общей сумме $S_1 + S_2$ «с конца» (т.е. начиная с наиболее громоздких дробей), мы обнаружим, что вся сумма великолепным образом складывается – как телескопическая антенна. Действительно, сумма двух последних слагаемых равна

$$\frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot4}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot3} + \frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot3\cdot1} = 4\cdot\frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot6}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot5}.$$

Сложим этот результат с предыдущим слагаемым:

$$4\cdot\frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot6}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot5} + \frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot6}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot5} = 6\cdot\frac{20\cdot18\cdot\ldots\cdot8}{19\cdot17\cdot\ldots\cdot7}.$$

Продолжая подобным образом «поедать» слагаемые и дальше, в итоге придем к началу ряда:

$$\frac{20}{19} + \frac{20\cdot18}{19\cdot17} + \frac{20\cdot18\cdot16}{19\cdot17\cdot15} + 14\cdot\frac{20\cdot18\cdot16}{19\cdot17\cdot15} =$$

$$= \frac{20}{19} + \frac{20\cdot18}{19\cdot17} + 16\cdot\frac{20\cdot18}{19\cdot17} = \frac{20}{19} + 18\cdot\frac{20}{19} = 20.$$

Итак, $S_1 + S_2 = 20$. Поскольку в суммах S_1 и S_2 равное количество слагаемых, причем каждое слагаемое суммы S_1 больше соответствующего слагаемого суммы S_2, то $S_1 > S_2$ и, значит, $S_1 > 10$.

Задача 7 (из вступительного задания на Малый механико-математический факультет МГУ, 1985). Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{78}} + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4.$$

Решение. Сначала стандартным способом избавимся от всех иррациональностей в знаменателях левой части неравенства. Найдем сумму

$$S_1 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{6} -$$

$$- \sqrt{5} + \ldots + \sqrt{78} - \sqrt{77} + \sqrt{80} - \sqrt{79}.$$

Структура этого выражения «подсказывает» добавить к нему число

$$S_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{7} -$$

$$- \sqrt{6} + \ldots + \sqrt{79} - \sqrt{78} + \sqrt{81} - \sqrt{80}.$$

Очевидно, после целого ряда сокращений получим

$$S_1 + S_2 = \sqrt{81} - 1 = 8.$$

Далее замечаем, что для всех натуральных k

$$\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+1}} = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k},$$

поэтому $S_1 > S_2$ и, следовательно, $S_1 > 4$.

Упражнение 3 (олимпиада «Оранж», 2005–2006, Израиль). а) Найдите 100 первых цифр числа

$$N = 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{6}{9\cdot11\cdot13} + \frac{7}{9\cdot11\cdot13\cdot15} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1002}{9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2005} + \frac{1003}{9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2007}.$$

б) Расположите числа A, B, C в порядке возрастания:

$$A = 2,$$

$$B = \frac{8000}{7999}\cdot\frac{7997}{7996}\cdot\frac{7994}{7993}\cdot\ldots\cdot\frac{1004}{1003}\cdot\frac{1001}{1000},$$

$$C = \sqrt[3]{\sqrt{576} - \sqrt{575} + \sqrt{573} - \sqrt{572} + \ldots + \sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$