А. С. Горшков, Обобщенная система линейных алгоритмов цифровой обработки информации, *Докл. РАН*, 1994, том 336, номер 5, 605–609

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 336, № 5, с. 605 - 609

ИНФОРМАТИКА

УДК 681.3.06

ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

© 1994 г. А. С. Горшков

Представлено академиком О.М. Белоцерковским 01.07.93 г.

Поступило 02.07.93 г.

1. Известные линейные вычислительные методы, лежащие в основе алгоритмов цифровой обработки информации, представляют собой главным образом умножение вектора данных на матрицу линейной системы [1 - 4]. Для случая линейных инвариантных к сдвигу систем матрица системы приобретает циркулянтный вид, и умножение на такую матрицу сводится к операции свертки с фильтрующей функцией. Далее оказывается возможным заменить свертку парой ортогональных преобразований, что упрощает структуру вычислительных операций.

Данная структура линейной обработки информации может быть обобщена на основе теоретико-числовых подходов [1, 3, 5] и теории атомарных функций [6 - 12], что позволяет существенно расширить возможности класса линейных алгоритмов. Представленная в настоящей работе система линейных вычислительных методов ориентирована на наиболее полное использование возможностей цифровых устройств обработки, а также оптимизацию их архитектуры.

2. Естественным объектом из класса элементарных функций, отвечающим описанию линейной системы, является полином (линейная суперпозиция степеней или просто степенной ряд) некоторого порядка $N-1$, заданный над некоторым числовым полем F [1]:

$$P_{N-1}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) z^n \tag{1}$$

(коэффициенты являются элементами поля F: $a(n) \in F$ и $a(N-1) \neq 0$).

При суммировании двух полиномов их одноименные коэффициенты складываются:

$$P_{N-1}(z) + Q_{N-1}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) z^n + \sum_{n=0}^{N-1} b(n) z^n = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} (a(n) + b(n))\, z^n. \tag{2}$$

При перемножении полиномов имеет место свертка их коэффициентов:

$$P_{N-1}(z) \cdot Q_{N-1}(z) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cdot z^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} b(n) z^n\right] = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} [a(n) * b(n)]\, z^n, \tag{3}$$

где символ $*$ обозначает операцию свертки.

Если произведение полиномов выполняется по $\mathrm{mod}(z^N - 1)$, то свертка является циклической.

Линейная свертка описывает поведение линейных инвариантных к сдвигу систем (линейных фильтров) [1, 2]:

$$g(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) h(n-k), \tag{4}$$

где $f(n)$ – входной сигнал, $g(n)$ – выходной отклик, $h(n)$ – фильтрующая функция (импульсный отклик) линейной системы.

Алгоритм вычисления дискретной свертки основывается на прямом поточечном перемножении полиномов и сводится к следующим трем последовательным операциям [1, 3]:

1) вычисление значений полиномов $P_{N-1}(z)$ и $Q_{N-1}(z)$ в точках некоторого контура $z(t)$ в выбранном числовом множестве,

2) перемножение значений полиномов в одинаковых точках,

3) определение коэффициентов результирующего полинома по его отсчетам на контуре $z(t)$.

В качестве числового множества и контура в нем обычно выбираются [1, 4, 5]:

1) множество действительных комплексных чисел, в котором $z(t)$ – разомкнутый контур (в линейной свертке), например, $z = x$ (действительная ось, алгебраический полином) или $z = \exp(x)$; $z(t)$ – замкнутый контур (z-преобразование, циклическая свертка), например, $z = \exp(jx)$ (единичная окружность, тригонометрический полином или ряд Фурье);

Научно-исследовательский институт точных приборов, Москва

2) множество целых положительных чисел, ограниченных сверху модулем q (конечное кольцо или поле), аналогом контура $z(t)$ является циклическая подгруппа по умножению $\{\alpha^n \bmod q\}$.

Последний этап задачи фильтрации совпадает с задачей линейной интерполяции: необходимо найти последовательность коэффициентов $\{F(k)\}$ интерполяционного полинома $P_{N-1}(z)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) z^k, \qquad (5)$$

значения которого в заданной последовательности N точек $z(n)$ совпадают с отсчетами исходной последовательности $\{f(n)\}$:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) z^k(n). \qquad (6)$$

К числу наиболее известных методов интерполяции относятся следующие [1]:

интерполяционный алгебраический полином Лагранжа (а также эквивалентные ему Бесселя, Гаусса, Ньютона, Стирлинга, Эверетта)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} \frac{x - x(i)}{x(k) - x(i)} \right) f(k); \qquad (7)$$

сплайн-методы (кусочные алгебраические полиномы);

тригонометрический полином (ряд Фурье, коэффициенты вычисляются с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ));

теорема Котельникова (критерий Найквиста–Шеннона)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \operatorname{sinc}[\pi (x-k)] \qquad (8)$$

(здесь $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$).

Указанные методы носят частный характер и имеют те или иные недостатки. Более общий и более эффективный подход обеспечивается теорией атомарных функций, согласно которой интерполяционный полином определенного типа реализуется в виде свертки с финитной фильтрующей функцией.

3. Атомарные (финитные бесконечно дифференцируемые) функции [6, 7] представляют собой сверточные разложения решений линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k) \varphi(x-k), \qquad (9)$$

где

$$L[f(x)] = 0 \qquad (10)$$

($L = \sum_{k=0}^{N} A(k) \frac{d^k}{dx^k}$ – линейный дифференциальный оператор), вследствие чего удовлетворяют дифференциально-сдвиговым уравнениям вида

$$L\varphi(x/a) = \sum_{k=-M}^{M} c(k) \varphi(x-k), \quad |a| > 1. \qquad (11)$$

В зависимости от вида и кратности $K(m)$ корней λ_m характеристического уравнения, отвечающего (10),

$$\sum_{k=0}^{N} A(k) \lambda^k = 0 \qquad (12)$$

общее решение (10) имеет вид

$$f(x) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[e^{\lambda_m x} \sum_{k=0}^{K(m)-1} C(k) x^k \right]. \qquad (13)$$

Можно выделить три следующих частных случая:

1) $A(N) = 1$, $A(k) \equiv 0$ ($k = 0, \ldots, (N-1)$), так что (13) имеет вид алгебраического полинома $(N-1)$-го порядка $P_{N-1}(x)$.

2) Все корни (12) действительные и различные; (13) является экспоненциальным полиномом $P_{N-1}(\exp(x))$.

3) Все корни уравнения (10) чисто мнимые ($\lambda_k = jk$); (13) является рядом Фурье:

$$f(x) = P_{N-1}(e^{jx}) = \sum_{k=0}^{N-1} C(k) e^{jkx}. \qquad (14)$$

Соответствующим образом образуются три важнейших семейства атомарных функций. Наиболее простой и важной среди атомарных функций является функция $\mathrm{up}(x)$ [6]:

$$\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}(u \cdot 2^{-k}) du, \qquad (15)$$

удовлетворяющая уравнению типа (11)

$$\mathrm{up}'(x/2) = 2\mathrm{up}(x+1) - 2\mathrm{up}(x-1). \qquad (16)$$

Все основные атомарные функции получены на основе функции $\mathrm{up}(x)$. Следующая атомарная функция обеспечивает разложение алгебраических полиномов

$$\mathrm{fup}_N(x) = = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux}\mathrm{sinc}^N(u/2)\prod_{k=1}^{\infty}\mathrm{sinc}(u\cdot 2^{-k})du, \quad (17)$$

$$P_N(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k)\mathrm{fup}_N(x-k). \quad (18)$$

Атомарная функция $\mathrm{eup}_a(x)$ обеспечивает разложение показательной функции a^x:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k\mathrm{eup}_a(x-k) = a^x\mathrm{eup}_a(0), \quad (19)$$

где

$$\mathrm{eup}_a(0) = F(j\ln(a)/2) = = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{shc}[\,(\ln(a)/2)\,(1+2^{-k})\,]}{\mathrm{shc}[\ln(a)/2]}, \quad (20)$$

$$\mathrm{eup}_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{shc}[\ln(a)/2-ju/2^k]}{\mathrm{shc}[\ln(a)/2]}du \quad (21)$$

(введено обозначение $\mathrm{shc}(x) = \mathrm{sh}(x)/x$).

Разложение экспоненциальных полиномов N-го порядка достигается с помощью атомарных функций:

$$\mathrm{fxp}_N(x) = \frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{sinc}(u\cdot 2^{-k})\prod_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{shc}[n/2-ju/2^k]}{\mathrm{shc}(n/2)}\right]du, \quad (22)$$

$$\mathrm{fxh}_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(ux)\prod_{k=0}^{\infty}\left\{\mathrm{sinc}(u\cdot 2^{-k-1})\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{ch}(n)-\cos(u\cdot 2^{-k})}{[\mathrm{ch}(n)-1]\,(1+u^2\cdot 2^{-2k}/n^2)}\right\}du. \quad (23)$$

Тогда имеем

$$P_N(e^x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k)\mathrm{fxp}_N(x-k), \quad (24)$$

$$P_N(e^x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D(k)\mathrm{fxh}_N(x-k). \quad (25)$$

Семейство атомарных гармонических функций возникает при формальной замене $a^x \to e^{j2\pi\alpha x}$. Так, для функции

$$\mathrm{tup}_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sinc}(\pi\alpha-u\cdot 2^{-k})}{\mathrm{sinc}(\pi\alpha)}du \quad (26)$$

(здесь $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{shc}(jx)$) имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\alpha k}\mathrm{tup}_\alpha(x-k) = \mathrm{tup}_\alpha(0)e^{j\cdot 2\pi\alpha x}, \quad (27)$$

где

$$\mathrm{tup}_\alpha(0) = F(-\pi\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sinc}[\pi\alpha\,(1+2^{-k})\,]}{\mathrm{sinc}(\pi\alpha)}. \quad (28)$$

Соответственно разложение N-точечных рядов Фурье обеспечивается функциями

$$\mathrm{ftr}_{N-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\mathrm{sinc}(u\cdot 2^{-k})\prod_{n=1}^{N-1}\frac{\mathrm{sinc}[\pi n/N-u/2^k]}{\mathrm{sinc}(\pi n/N)}\right\}du, \quad (29)$$

$$\mathrm{fsc}_{N-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(ux)\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\mathrm{sinc}(u2^{-k})\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{n=1}^{N-1}\frac{\cos(u\cdot 2^{-k+1})-\cos(2\pi n/N)}{[1-\cos(2\pi n/N)]\cdot\left[1-\dfrac{u^2N^2}{\pi^2n^2\cdot 2^{2k}}\right]}\right\}du, \quad (30)$$

для которых

$$P_{N-1}(e^{j\cdot 2\pi x/N}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k)\mathrm{ftr}_{N-1}(x-k), \quad (31)$$

$$P_{N-1}(e^{j\cdot 2\pi x/N}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D(k)\mathrm{fsc}_{N-1}(x-k). \quad (32)$$

4. Таким образом, обобщенная система линейных методов построена на основе дуализма операций свертки и суммирований степенных рядов (полиномов), что может быть представлено с помощью схемы согласно рис. 1.

Операция свертки реализуется на основе перемножения полиномов, которые являются решениями линейных однородных дифференциальных уравнений. В свою очередь полиномы этого типа могут быть разложены в свертки с атомарными функциями, что реализует решение задачи интерполяции дискретных последовательностей коэф-

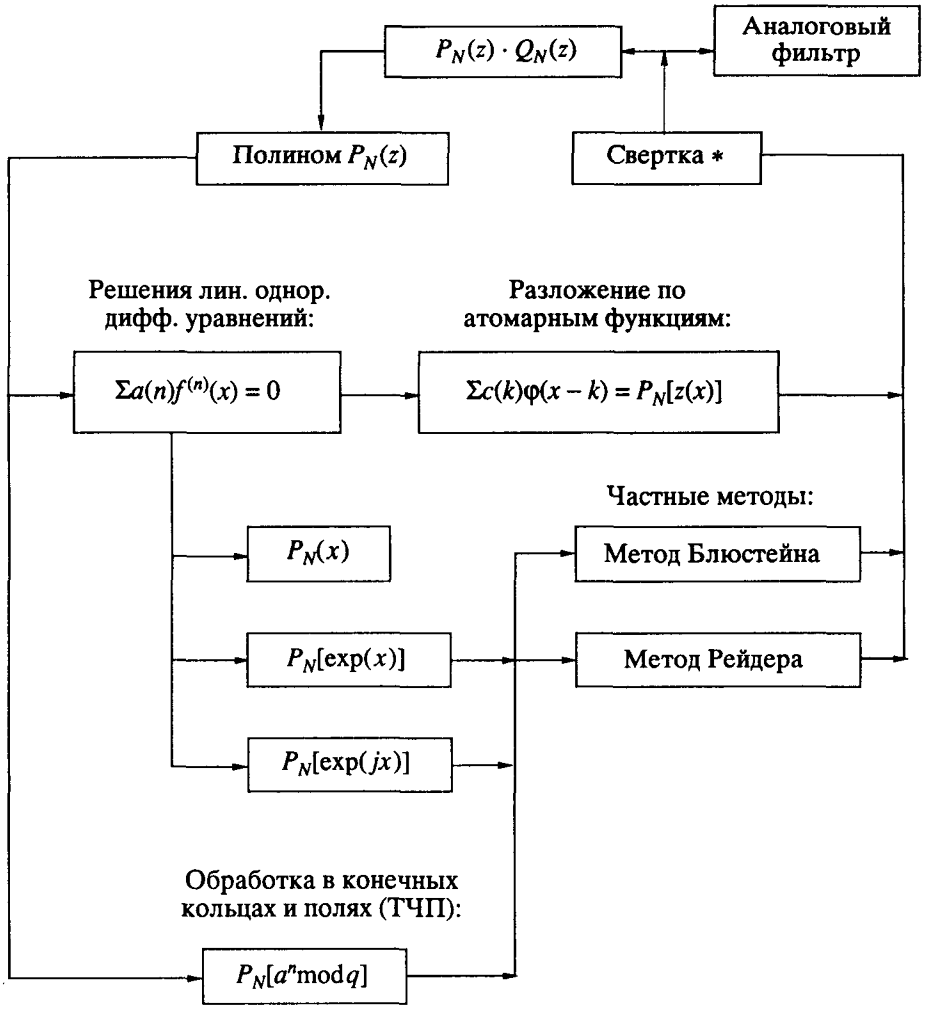

Рис. 1.

фициентов разложения финитными бесконечно дифференцируемыми функциями. По виду такое разложение аналогично ряду Котельникова (8), поэтому может быть реализовано посредством аналогового фильтра, имеющего импульсную характеристику в виде соответствующей атомарной функции.

Для повышения производительности при вычислении сверток наибольшую эффективность обеспечивает теоретико-числовое преобразование Ферма, система арифметических операций для которого позволяет усовершенствовать в целом методику вычислений в двоичном коде с фиксированной запятой [1 - 3, 5, 8 - 10]. Учитывая, что операции с числами в коде с плавающей запятой сводятся к обработке мантиссы и порядка как чисел с фиксированной запятой, предложенный подход можно использовать для оптимизации системы операций и архитектуры цифровых вычислительных систем.

В схеме также отражены два частных способа замены полиномов экспоненциального типа свертками – метод Блюстейна и метод Рейдера, заключающиеся в преобразовании произведения индексов в разность с помощью формулы разности квадратов или логарифмирования–потенцирования [1, 3].

5. Предложенная и обоснованная в настоящей работе методика построения вычислительных процессов и структур в рамках линейных операций позволяет значительно усовершенствовать операционные системы и архитектуру современных вычислительных машин, обеспечивая повышенную точность и скорость вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.

3. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1988.
4. *Каппелини В., Константинидис А.Дж., Эмилиани П.* Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
5. *Вариченко Л.В. и др.* Абстрактные алгебры в цифровой обработке сигналов. Киев: Наук. думка, 1986.
6. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1979.
7. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л.* // ДАН. 1991. Т. 319. № 2. С. 347 - 351.
8. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л.* // ДАН. 1991. Т. 320. № 2. С. 303 - 306.
9. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л.* // ДАН. 1991. Т. 320. № 3. С. 577 - 580.
10. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф.* // ДАН. 1991. Т. 320. № 4. С. 835 - 838.
11. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л.* // ДАН. 1991. Т. 321. № 4. С. 697 - 700.
12. *Горшков А.С., Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л.* // ДАН. 1991. Т. 321. № 5. С. 914 - 918.