N. B. Lebedinskaya, On one algorithm for finding an optimal structural schedule, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 124, 5–20

Н.Б.Лебединская

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО СТРУКТУРНОГО РАСПИСАНИЯ

Статья посвящена решению задачи построения оптимальных расписаний для одного класса функционалов, допускающих структурные расписания.

Статья существенным образом базируется на идеях [I] и поэтому ниже будут использоваться терминология и обозначения из [I]. Задача, решенная в данной статье есть задача, сформулированная в I.7^{0} из [I] для функционалов f специального вида, а метод обобщает метод, использованный ранее для решения задачи [3].

ЗАДАЧА. Пусть функционал f задан на множестве всех частичных расписаний множества работ $\mathfrak{T}$. При заданном t найти плотное расписание $R=\langle \Lambda, t\rangle$, минимизирующее функционал на множестве всевозможных плотных расписаний для $\mathfrak{T}$ с началом t. ■

Прежде всего опишем рассматриваемый класс функционалов. Пусть каждой работе $\lambda \in B(\mathfrak{T})$ сопоставлена функция $\lambda(t)$, которую будем обозначать тем же символом, что и работу, т.к. это не приводит к путанице. Обозначим это множество $\Phi(\mathfrak{T})=$ $=\{\lambda(t)\}_{\lambda\in B(\mathfrak{T})}$.

Пусть также задана функция F, определенная на любом конечном числе аргументов. Задание множества $\Phi(\mathfrak{T})$ и функции F определяет функционал $f(R)$, (называемый штрафом расписания) значения которого вычисляются по формуле

$$f(R)=f\left(\left\langle \begin{matrix}\lambda_1 \ldots \lambda_p\\ t_1 \ldots t_p\end{matrix}\right\rangle\right)=F(\lambda_1(t_1),\lambda_2(t_2),\ldots,\lambda_p(t_p)).$$

Относительно функции F будем предполагать следующее:

I) $F(x)=\varphi(x)$

$F(x_1,x_2)=\psi(x_1,x_2)$

$F(x_1,x_2,\ldots,x_s)=\psi(x_1,F(x_2,\ldots,x_s))\quad (s\geqslant 2)$

2) F – симметрическая функция

3) ψ,φ – возрастают по каждому своему аргументу и более того:

3а) ψ строго возрастает при возрастании обоих аргументов;

3б) если $\psi(x_1',x_2')>\psi(x_1,x_2)$, $\psi(x_2'',x_3')>\psi(x_2',x_3)$, то

$$F(x_1', x_2'', x_3') > F(x_1, x_2, x_3).$$

Для рассматриваемого класса функционалов предположения I из [I], при которых гарантируется существование оптимальных структурных расписаний сводятся к требованиям, предъявляемым к множеству $\Phi(\mathfrak{T})$, если функция F зафиксирована. А именно: множество $\Phi(\mathfrak{T})$ должно быть таким, чтобы функционал f, определенный выше, индуцировал на множестве $B(\mathfrak{T})$ отношения $\prec$ и $\subset$ – транзитивные, асимметричные и дополняющие друг друга до полного. Такое множество $\Phi(\mathfrak{T})$ называется структурным по отношению к F.

В качестве примера приведем функции $F=\sum x_i$ и $F=\max x_i$, для которых соответствующие структурные множества функций были изучены ранее в [2,4].

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА I. *Если* $\Phi(\mathfrak{T})$ есть структурное множество функций по отношению к F, то для функционала f и множества работ $\mathfrak{T}$ выполнены предположения II из [I] п.3.2^0. ■

ЛЕММА 2. Если $\Phi(\mathfrak{T})$ есть структурное множество функций по отношению к F, то для f и $\mathfrak{T}$ выполнены предположения III из [I]. п.5.2^0. ■

Следовательно, в классе CC – расписаний содержится хотя бы одно решение поставленной задачи и далее всегда можно рассматривать только структурные CC -расписания.

Рассмотрим частичное расписание $R_1=\left\langle\begin{matrix}\mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_s\\ t_1 & t_2 & \ldots & t_s\end{matrix}\right\rangle$ и R_2, полученное из R_1 циклической перестановкой элементов, сдвигающей μ_s влево, а именно, $R_2=\left\langle\begin{matrix}\mu_s & \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{s-1}\\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_s\end{matrix}\right\rangle$. Будем говорить, что R_1 является положительным левым циклом, если $F(R_2) < F(R_1)$. Если $R_2=\left\langle\begin{matrix}\mu_2 & \ldots & \mu_s & \mu_1\\ t_1 & \ldots & t_{s-1} & t_s\end{matrix}\right\rangle$ и $F(R_2)<F(R_1)$, то R_1 является положительным правым циклом. Аналогично определяются отрицательные и нулевые левые и правые циклы.

Для устранения технических трудностей мы будем предполагать, что функция F и множество Φ таковы, что не существует нулевых циклов, хотя все доказательства справедливы и при наличии их, если всюду доказывать нестрогие неравенства.

ЛЕММА 3. Пусть $\beta_i \subset \alpha$, $i=1,2,\ldots,K$ и для CC -расписаний $R_1=\left\langle\begin{matrix}\beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_K & \alpha\\ t_1 & t_2 & \ldots & t_K & t_{K+1}\end{matrix}\right\rangle$ и $R_2=\left\langle\begin{matrix}\alpha & \beta_1 & \ldots & \beta_{K-1} & \beta_K\\ t_1 & t_2 & \ldots & t_K & t_{K+1}\end{matrix}\right\rangle$

цикл R_1 является отрицательным левым циклом, тогда для любых CC -расписаний $R_1' = \left\langle \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & \alpha \\ t_1' & t_2' & \dots & t_k' & t_{k+1}' \end{matrix} \right\rangle$ и $R_2' = \left\langle \begin{matrix} \alpha & \beta_1 & \dots & \beta_{k-1} & \beta_k \\ t_1' & t_2' & \dots & t_k' & t_{k+1} \end{matrix} \right\rangle$, где $t_i' \geqslant t_i$ $(i=1,\dots,k+1)$ цикл R_1' также является отрицательным левым циклом.

Симметричный по отношению к α и правым циклам случай также имеет место.

Доказанные теоремы I–3 по существу утверждают выполнение предположений IУ из [5] для произвольных множества работ $\mathfrak{T}$ и функционала F. Следовательно, для $\mathfrak{T}$ и F применим алгоритм сдвигов. Однако, для доказательства этого факта потребовалось ввести в рассмотрение алгоритм A, основанный на свойствах плотных множеств работ. Заметим также, что рассмотренный в [5] функционал f_Σ является частным случаем функционала F и потому из наших рассмотрений сразу следует применимость алгоритма сдвигов к $\mathfrak{T}$ и f_Σ.

Целью данной статьи является: I) описание алгоритма A, строящего для множества работ $\mathfrak{T}$ плотное расписание R с началом в точке t (будем обозначать такое расписание $R = \langle \mathfrak{T}_A ; t \rangle$); 2) доказательство того, что A строит оптимальное расписание; 3) доказательство того, что произвольное расписание R_0 для множества работ $\mathfrak{T}$ с началом в точке t можно монотонно преобразовать к оптимальному расписанию $R=\langle \mathfrak{T}_A ; t \rangle$ с помощью последовательности положительных левых и правых циклов.

Рассмотрим множество работ $\mathfrak{T}$ и граф вложенности $G_C(\mathfrak{T})$ и пусть k – число ярусов графа $G_C(\mathfrak{T})$. (При этом будем говорить, что $\mathfrak{T}$ является k-ярусным множеством).

Алгоритм A определяется ниже индукцией по числу ярусов k графа $G_C(\mathfrak{T})$. Для одноярусных множеств $\mathfrak{T}$ он очевидно представляет собой алгоритм упорядочения работ по отношению $\prec$. Будем далее считать, что алгоритм A определен для любых множеств с числом ярусов $\leqslant k-1$. Одновременно будем считать доказанным для алгоритма A следующие утверждения. Для любого множества V с числом ярусов $\leqslant k-1$ выполнены:

ЛЕММА 4. Если $R_1 = \langle V_A ; t \rangle$ и $R_2 = \langle V_A ; t+1 \rangle$, то существует сдвигающая последовательность S такая, что

$$R_2 = O_S(R_1).$$

ЛЕММА 5. $\langle V_A ; t \rangle$ CC -расписание.

(Эти леммы впоследствии будут доказаны для любого k-ярусного множества работ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество работ V называется α -плотным, если

I) $V \subset \alpha$, т.е. каждая работа из V вложена в α ;

2) всякое CC -расписание для множества работ $V \cup \alpha$, $p_\alpha = 1$, можно неухудшающими штрафа расписания циклическими перестановками элементов свести к такому, в котором все работы множества V выполняются подряд, не прерываясь элементом α ;

3) Пусть даны расписания $\langle V_A; t\rangle, \langle V_A, t+1\rangle$ и пусть $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_s \\ t & t_2 & \ldots & t_s \end{matrix} \right\rangle$ - сдвигающая последовательность для $\langle V_A; t\rangle$. Тогда

3а) либо расписание $\langle V_A, \alpha; t\rangle$, либо расписание $\langle \alpha V_A; t\rangle$ CC-расписания;

3б) если расписание $\langle \alpha V_A; t\rangle$ не является CC -расписанием, то расписание $\langle V_A, \alpha; t\rangle$ CC-расписание и при этом правый цикл $\left\langle \begin{matrix} \alpha & \mu_1 & \ldots & \mu_{s-1} & \mu_s \\ t & t_2 & \ldots & t_s & t+p_V \end{matrix} \right\rangle$ является положительным.

Симметричный случай аналогично.

3в) Если правый цикл, преобразующий расписание $\langle \alpha V_A; t\rangle$ в расписание $\langle V_A, \alpha; t\rangle$ положителен, то и правый цикл, преобразующий расписание $\langle \alpha V_A; t+1\rangle$ в расписание $\langle V_A, \alpha; t+1\rangle$ - положителен.

Симметрично, если левый цикл, преобразующий расписание $\langle V_A, \alpha; t+1\rangle$ в расписание $\langle \alpha, V_A; t+1\rangle$ положителен, то и левый цикл, преобразующий $\langle V_A, \alpha; t\rangle$ в $\langle \alpha V_A; t\rangle$ - положителен.

Заметим, что из условия 3в) и из определения функционала F следует, что если $F(\langle V_A, \alpha; t\rangle) \leqslant F(\langle \alpha V_A; t\rangle)$, то $F(\langle V_A, \alpha; t+1\rangle) \leqslant F(\langle \alpha V_A; t+1\rangle)$ и, следовательно, если $F(\langle \alpha V_A; t+1\rangle) \leqslant F(\langle V_A, \alpha; t+1\rangle)$, то $F(\langle \alpha V_A; t\rangle) \leqslant$ $\leqslant F(\langle V_A, \alpha; t\rangle)$.

Далее, из существования сдвигающей последовательности следует, что если $\langle V_A, \alpha; t\rangle$ - CC-расписание, то и $\langle V_A, \alpha; t+1\rangle$ CC -расписание, и, соответственно, если $\langle \alpha V_A; t+1\rangle$ - CC - расписание, то и $\langle \alpha V_A; t\rangle$ - CC-расписание.

Из определения и из предположения о том, что не существует нулевых циклов следует, что для α -плотного множества V имеет место следующее: существует такая точка $x(V,\alpha)$, что для всех $t < x(V,\alpha)$ правый цикл, преобразующий расписание $\langle \alpha V_A ; t \rangle$ в $\langle V_A, \alpha ; t \rangle$ является отрицательным, а для всех $t \geqslant x(V,\alpha)$, этот цикл является положительным, и расписание $\langle \alpha V_A, \alpha ; x(V,\alpha)-1 \rangle$ является CC -расписанием.

Если предположить, что алгоритм A строит оптимальное расписание, и множество V - α -плотно, то для множества работ $V \cup \alpha$, где α имеет кратность p_α, оптимальным будет расписание $R = \langle \alpha \ldots \alpha V_A \alpha \ldots \alpha ; t \rangle$, если $x(V,\alpha) \in (t, t+p_\alpha)$ и координата первого символа множества V равна $x(V;\alpha)$, расписание $R = \langle V_A \alpha \ldots \alpha ; t \rangle$, если $x(V,\alpha) \leqslant t$, и расписание $R = \langle \alpha \ldots \alpha V_A ; t \rangle$, если $x(V,\alpha) \geqslant t + p_\alpha$.

ЛЕММА 6. Множество работ V, состоящее из одной работы β кратности p_β, вложенной в α, является α -плотным множеством.

Для любого α -плотного множества V обозначим через $I(V,\alpha)$ интервал $[x(V,\alpha), x(V,\alpha)+p_V-1]$.

ЛЕММА 7. Пусть множество V является α -плотным и β -плотным множеством и пусть $\beta \subset \alpha$. Тогда имеют место либо $x(V,\beta) \leqslant x(V,\alpha) \leqslant x(\beta^{p_V}, \alpha)$, либо $x(\beta^{p_V}, \alpha) \leqslant x(V,\alpha) \leqslant x(V,\beta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество работ V называется α -единым, если $V \subset \alpha$ и целочисленные точки объединения интервалов $I(\beta^{p_\beta}, \alpha)$, взятого по всем работам $\beta \in V$ образуют целочисленный интервал, где β^{p_β} - α -плотное множество, состоящее из единственного β кратности p_β.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ α -плотные множества V_i, $i = 1, \ldots, s$, называются конфликтующими, если целочисленное объединение интервалов $\bigcup_{i=1}^{s} I(V_i, \alpha)$ является целочисленным интервалом.

Для определения алгоритма A нам потребуется формулировка теорем, справедливость которых мы также будем предполагать для любых α -плотных множеств V, число ярусов которых $\leqslant k-1$, и доказывать для k -ярусных множеств.

ТЕОРЕМА I.

I) Всякое α -единое множество работ - α-плотно.

2) Объединение конечного числа конфликтующих α -плотных множеств α -плотно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество $\mathcal{J}$ - α -плотно и пусть дана точка $X(\mathcal{J},\alpha)$. Тогда для любого α -плотного подмножества $\mathcal{J}^1 \subset \mathcal{J}$ выполнено

$$X(\mathcal{J},\alpha) \leqslant X(\mathcal{J}^1,\alpha) \leqslant X(\mathcal{J},\alpha)+p_{\mathcal{J}}-p_{\mathcal{J}^1}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{J} \subset \alpha$. Для того, чтобы в расписании $\langle \mathcal{J}_A, \alpha; t \rangle$ существовал положительный цикл необходимо и достаточно, чтобы существовало α -плотное множество $\mathcal{J}^1 \subset \mathcal{J}$ такое, что $X(\mathcal{J}^1,\alpha)+p_{\mathcal{J}^1} > t+p_{\mathcal{J}}$.

Аналогичное утверждение имеет место для положительных циклов в расписании $\langle \alpha\, \mathcal{J}_A; t \rangle$.

АЛГОРИТМ А. Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ - работы первого яруса графа $G_C(\mathcal{J})$. Найдем в графе $G_C(\mathcal{J})$ множество $\mathcal{J}^{\alpha_1} \subset \alpha_1$ и для каждой $\gamma \in \mathcal{J}^{\alpha_1}$ вычислим $X(\gamma_1,\alpha_1)$ и $I(\gamma^{p_\gamma},\alpha_1)$.

Пусть целочисленное объединение $\bigcup\limits_{\gamma\in\mathcal{J}^{\alpha_1}} I(\gamma^{p_\gamma},\alpha)$ состоит из s непересекающихся целочисленных интервалов. Тогда множество $\mathcal{J}^{\alpha_1}$ распадается на s α_1 -единых множеств $\mathcal{J}^{i\alpha_1}$ $(i=1,\ldots,s)$. Так как число ярусов графа $G_C(\mathcal{J}^{i\alpha_1})$ меньше k, то по индукционному предположению для $\mathcal{J}^{i\alpha_1}$ применима теорема I и следовательно, множество $\mathcal{J}^{i\alpha_1}$ - α_1 -плотно.

Найдем интервалы $I(\mathcal{J}^{i\alpha_1},\alpha_1)$ для $i=1,\ldots,s$. Если среди множеств $\mathcal{J}^{i\alpha_1}$ $(i=1,\ldots,s)$ окажутся конфликтующие множества, то по теореме I их объединения также α_1 -плотно. Объединим конфликтующие множества и снова проверим, есть ли среди этих получившихся множеств конфликтующие. Продолжим этот процесс объединения конфликтующих множеств, пока они присутствуют. В результате получим разбиение множества $\mathcal{J}^{\alpha_1}$ на r α_1 -плотных множеств $\widetilde{\mathcal{J}}^{i\alpha_1}$ $(i=1,\ldots,r)$, не конфликтующих между собой. Предположим, что они перенумерованы в порядке возрастания величины $X(\widetilde{\mathcal{J}}^{i\alpha_1},\alpha_1)$ $(i=1,\ldots,r)$. Итак, для любого множества работ $\mathcal{J}$ мы определили множества $\widetilde{\mathcal{J}}^{i\alpha_1}$ $(i=1,\ldots,r)$.

Определим теперь расписание $R=\langle \mathcal{J}_A; t \rangle$ рекурсивно.

а) Если $r=0$, то положим:

$$R=\langle \alpha_1^{p_{\alpha_1}}, \widehat{\mathcal{J}}_A; t \rangle,$$

где $\widehat{\mathcal{J}}$ получается из $\mathcal{J}$ удалением работы α_1.

б) Если $X(\widetilde{\mathcal{J}}^{1\alpha_1},\alpha_1) > t+p_{\alpha_1}$, то построим множество

$Z^1=\{\beta\in\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1}\mid \beta\subset\alpha_1,\ \beta<\alpha_2\}$ и положим

$$R=\langle \alpha_1^{p_{\alpha_1}}, Z_A^1, \hat{\mathcal{T}}_A ; t\rangle,$$

где $\hat{\mathcal{T}}$ получается из множества $\mathcal{T}$ удалением множества Z^1.

в) Если $x(\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1},\alpha_1)\leqslant t+p_{\alpha_1}$, то составим расписание

$$R_1=\langle \alpha_1^{u}, \widetilde{\mathcal{T}}_A^{1\alpha_1} ; t\rangle,$$

где

$$u=\begin{cases} x(\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1},\alpha_1)-t, & \text{если } x(\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1},\alpha_1)-t\geqslant 0 \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Положим

$$R=R_1\cdot\langle \hat{\mathcal{T}}_A,\ t+u+p_{\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1}}\rangle,$$

где $\hat{\mathcal{T}}$ получается из $\mathcal{T}$ удалением работ из $\widetilde{\mathcal{T}}^{1\alpha_1}$ и уменьшением кратности работы α_1 на u.

Из определения алгоритма A и из определения α-плотных множеств следует, что расписание $\langle \mathcal{T}_A ; t\rangle$ для k-ярусного множества $\mathcal{T}$ является CC-расписанием. Сравнение расписаний $\langle \mathcal{T}_A ; t\rangle$ и $\langle \mathcal{T}_A ; t+1\rangle$ определяет различные сдвигающие последовательности. В дальнейшем нас будет интересовать самая длинная из сдвигающих последовательностей, характеризующаяся тем, что если символ α прыгает через символ β, то $\beta\subset\alpha$. Более того, очевидно, что каждый символ λ в сдвигающей последовательности прыгает разве лишь через λ-плотное множество V, остающееся неподвижным в своем интервале $I(V,\lambda)$.

ТЕОРЕМА 4. Любое CC-расписание с помощью последовательности положительных циклов можно привести к виду $\langle \mathcal{T}_A ; t\rangle$.

ТЕОРЕМА 5. Алгоритм A строит для k-ярусного структурного множества работ $\mathcal{T}$ оптимальное CC-расписание, не содержащее ни правых, ни левых положительных циклов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4 и 5. Основная идея доказательства теоремы 4 состоит в следующем. Пусть $R_A=\langle \mathcal{T}_A ; t\rangle$ имеет вид,

$$R_A=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathcal{T}_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \mathcal{T}_2 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \mathcal{T}_3 & \ldots & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \mathcal{T}_l & \alpha_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{\alpha_1\ldots\alpha_1}_{u_2}\quad \underbrace{\alpha_1\ldots\alpha_1}_{u_3}\quad \underbrace{\alpha_1\ldots\alpha_1}_{u_l};\qquad t=t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_l,\ \bar{t}$$

где α_2 – вторая работа первого яруса, $\mathcal{T}_i$ $(i=2,\ldots,l-1)$ – α_1-плотные множества, находящиеся в интервалах $I(\mathcal{T}_i,\alpha_1)$, $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_l$ – объединения α_1-плотных множеств V, для которых

$x(V,\alpha_1) < t_2$ и соответственно $x(V,\alpha_1) > t_\ell + u_\ell$.
В промежутке между $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{T}_{i+1}$ находится u_{i+1} символов α_1, $i=1,\dots,\ell-1$, так, что $\sum_{i=1}^{\ell} u_i = p_{\alpha_1}$, где $u_1=0$, и мы выделяем координату t_i, $i=2,\dots,\ell$, первого вхождения символа α_1 в каждый промежуток.

Пусть $R=\langle \Lambda, t\rangle$ любое CC-расписание

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c}\hline \mathcal{T}_1' & \mathcal{T}_2' & \qquad\qquad & \mathcal{T}_\ell' & \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$
$$t=t_1 \quad t_2 \quad t_3 \qquad\qquad t_\ell \quad \bar{t}$$

Докажем, что расписание R можно с помощью положительных правых и левых циклов свести к такому, у которого множество символов в интервале $[t_i, t_{i+1})$ совпадает с $\alpha_1^{u_i} \cup \mathcal{T}_i$, $i=1,\dots,\ell$. Дальнейшее сведение к R_A очевидно.

Пусть $\sigma \in \mathcal{T}_1'$ – элемент с максимальной координатой в частичном расписании $\langle \mathcal{T}_1'; t\rangle$ расписания R, для которого $x(\sigma,\alpha_1) > t_2$ и пусть t_σ – его координата в R.

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c}\hline \qquad & \sigma & \quad & \quad & \tau & \quad & \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$
$$t=t_1 \quad t_\sigma \quad t_2 \quad t_\tau$$

Так как расписание R CC-расписание, то в интервале (t_σ, t_2) могут находиться только символы работ δ, $\delta \subset \sigma$ и $x(\delta,\alpha_1) \in (t_\sigma, t_1)$. Это следует из леммы I и из того факта, что $x(\sigma,\alpha_1) > t_2$, а $x(\delta,\alpha_1) \leqslant t_2$. Обозначим $V = \mathcal{T}\langle R[t_\sigma+1, t_2-1]\rangle$. Далее, пусть $\tau \in \mathcal{T}_2'$ – символ с наименьшей координатой в частичном расписании $\langle \mathcal{T}_2', t_2\rangle$ расписания R с условием $x(\tau,\alpha_1) < t_2$ и пусть t_τ – его координата в R. Обозначим $U = \mathcal{T}\langle R[t_2, t_\tau - 1]\rangle$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\rho_i \in U \Rightarrow x(\rho_i,\alpha_1) \in (t_2, t_\tau)$. Пользуясь индукционным предположением о справедливости теорем 4 и 5 для множеств работ с числом ярусов, меньших k, расписание $\langle U; t_2\rangle$ можно с помощью положительных циклов свести к CC-расписанию $\langle U_A; t_2\rangle$, не содержащему положительных циклов. Если предположить, что в расписании $\langle U_A, \tau; t_2\rangle$ нет положительных циклов, то можно доказать, что U является как τ-плотным, так и α_1-плотным множеством. Тогда по лемме 7 $x(U,\tau) > t_2$ и, следовательно, если $\left\langle \begin{smallmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_q \\ s_1 & \dots & s_q \end{smallmatrix} \right\rangle$ сдвигающая последовательность для U в точке t_2, то левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_q & \tau \\ s_1 & \dots & s_q & t_\tau \end{matrix} \right\rangle$ является положительным. Следовательно, положительный цикл с τ в расписании $\langle U_A, \tau; t_2 \rangle$ существует. Совершив его, мы сдвигаем τ в направлении σ, и рассуждая аналогичным образом, вплоть до t_2.

Далее, переставляем σ с τ, если $\sigma \subset \tau$, или если $\tau \subset \sigma$ и $X(\tau, \sigma) \leq t_\sigma$. Если $\tau \subset \sigma$ и $X(\tau, \sigma) \in (t_\sigma, t_2)$, то из соображений симметрии получим существование положительного цикла со сдвигающей последовательностью множества $V \cup \tau$.

Таким образом, для $\tau \in \mathcal{T}_2'$ и нового R имеем $t_\sigma \geq t_2$, $t_\tau < t_2$. Аналогичные рассуждения позволяют любое τ с наименьшей координатой такое, что $X(\tau, \alpha_1) < t_2$ поменять с любым $\sigma \in \mathcal{T}_1'$, $X(\sigma, \alpha_1) > t_2$ с помощью положительных циклов так, что $t_\tau < t_2$, а $t_\sigma \geq t_2$.

В результате таких преобразований приводим расписание R к виду

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}\hline \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \cup W_2 & (\mathcal{T}_3 \setminus Z_3) \cup W_3 & \dots & (\mathcal{T}_\ell \setminus Z_\ell) \cup W_\ell & \\ \hline \end{array}$$
$$t = t_1 \qquad t_2 \qquad t_3 \qquad\qquad t_\ell \qquad\qquad \bar{t}$$

где $Z_i \subset \bigcup_{j=2}^{i-1} W_j$, $i = 3, \dots, \ell$, а W_i может содержать разве лишь α_1 и символы работ δ такие, что $X(\delta, \alpha_1) > t_{i+1}$.

Очевидно, что каждому символу δ расписания $R[t_1, \bar{t}-1]$ такому, что $X(\delta, \alpha_1) > \bar{t}$ взаимнооднозначно соответствует один символ α_1 из $R[\bar{t}, t + p_{\mathcal{T}} - 1]$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, каждый символ α_1 из $R[\bar{t}, t + p_{\mathcal{T}} - 1]$ с помощью положительных циклов переместим в координату $\bar{t}$, а затем обменяем его с соответствующим символом δ из $R[t, \bar{t}-1]$. После завершения этой процедуры кратность α_1 в множестве $\mathcal{T} \langle R[t, \bar{t}-1] \rangle$ равна p_{α_1} и каждое множество W_i $(i = 2, \dots, \ell)$ содержит лишь символы α_1 и такие символы δ, для которых $t_{i+1} < X(\delta, \alpha_1) < \bar{t}$. Заметим, что W_ℓ содержит только символы α_1.

Если $Z_\ell \neq \emptyset$, то аналогично $\alpha_1 \in W_\ell$ можно обменять на символ $\delta \in Z_\ell$, координата которого $t_\delta < t_\ell$ в расписании R. В результате таких обменов множество Z_ℓ становится пустым, а кратность α_1 в W_ℓ становится равной u_ℓ, кратности вхождения α_1 в промежуток между $\mathcal{T}_{\ell-1}$ и $\mathcal{T}_\ell$ в расписании R_A. Аналогичные рассуждения применяем к $(\mathcal{T}_{\ell-1} \setminus Z_{\ell-1}) \cup W_{\ell-1}$ и т.д., в результате чего получим, что в расписании R множество символов в интервале $[t_i, t_{i+1})$ совпадает с $\alpha_1^{u_i} \cup \mathcal{T}_i$ $i = 1, \dots, \ell$ $(u_1 = 0)$. Дальнейшее очевидно. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Тот факт, что алгоритм A строит оптимальное CC-расписание, очевидным образом, вытекает из теоремы 4 и определения алгоритма A. Оптимальные CC-расписания, вообще говоря, могут содержать положительные циклы, однако отсутствие в $\langle \mathcal{T}_A ; t \rangle$ положительных циклов следует из теоремы 3 и определения α -плотных множеств. ■

Итак, для k -ярусных множеств теоремы 4 и 5 доказаны и перейдем теперь к доказательству теорем I,2,3 для k -ярусных множеств работ $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть множество $\mathcal{T}$ является k -ярусным α-единым множеством работ, вложенных в α и пусть $I = \bigcup_{\beta \in \mathcal{T}} I(\beta, \alpha)$. Нужно доказать, что $\mathcal{T}$ является α -плотным множеством. Докажем сначала пункт 2 определения α -плотного множества. Легко видеть, что всякое CC -расписание для множества работ $\mathcal{T} \cup \alpha$, $\rho_\alpha = 1$, обладает тем свойством, что α не может прерывать выполнение работ множества $\mathcal{T}$, т.к. в любом расписании $R = \langle \Lambda; t \rangle$, где $\Lambda = H_1 \alpha H_2$, $H_1 \cup H_2 = \mathcal{T}$, H_1 и H_2 не пусты, существует несогласованная пара символов. Таким образом, CC -расписание для α -единого множества $\mathcal{T}$ и α может иметь вид либо $\langle \mathcal{T}, \alpha; t \rangle$, либо $\langle \alpha, \mathcal{T}; t \rangle$. Пункт 3) для определения α -плотных множеств доказывается для α -единых множеств аналогично тому, как он доказывается для объединения конечного числа конфликтующих α-плотных множеств, поэтому мы его докажем для случая объединения конфликтующих α -плотных множеств. Рассмотрим сначала пункт 2) для объединения конфликтующих α-плотных множеств и предположим для простоты, что мы имеем два α -единых множества $\mathcal{T}^1$ и $\mathcal{T}^2$ таких, что интервалы $\bigcup_{\beta \in \mathcal{T}^1} I(\beta, \alpha)$ и $\bigcup_{\beta \in \mathcal{T}^2} I(\beta, \alpha)$ не пересекаются, а объединение $I(\mathcal{T}^1, \alpha) \cup I(\mathcal{T}^2, \alpha)$ образует целочисленный интервал. Докажем, что в любом CC -расписании для множества работ $\mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2 \cup \{\alpha\}$, α не прерывает выполнение множества работ $\mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2$. Очевидно, что в любом CC -расписании $R = \langle \Lambda, t \rangle$ с $\Lambda = \mathcal{T}_1^1 \cup \mathcal{T}_1^2, \alpha, \mathcal{T}_2^1 \cup \mathcal{T}_2^2$, где $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}_1^1 \cup \mathcal{T}_2^1$, $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}_1^2 \cup \mathcal{T}_2^2$, α находится между интервалами $\bigcup_{\beta \in \mathcal{T}_1} I(\beta, \alpha)$ и $\bigcup_{\beta \in \mathcal{T}_2} I(\beta, \alpha)$, множества $\mathcal{T}_2^1$, $\mathcal{T}_1^2$ пусты. Поскольку множества $\mathcal{T}^1$ и $\mathcal{T}^2$ конфликтуют, то в расписании R, приведенном к виду $R = \langle \mathcal{T}_A^1 \alpha \mathcal{T}_A^2 ; t \rangle$, либо левый цикл α со сдвигающей последовательностью для $\mathcal{T}^1$ в t является положительным, либо правый цикл α со сдвигающей последовательностью для $\mathcal{T}^2$

в точке $t+p_{\mathcal{T}_1}+1$ оказывается положительным. Аналогичные рассуждения доказывают пункт 2) в случае объединения конечного числа конфликтующих α-плотных множеств. Перейдем теперь к доказательству пункта 3). Пусть множество $\mathcal{T}$ является k-ярусным объединением конфликтующих α-плотных множеств. Докажем сначала пункт 3б), пункт 3а) тогда будет очевиден. Рассмотрим расписания $\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t\rangle$ и $\langle \alpha, \mathcal{T}_A; t\rangle$. Так как $\langle \mathcal{T}_A; t\rangle$ – CC-расписание, то вопрос идет о согласовании α с элементами множества $\mathcal{T}$. Предположим, что расписание $\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t\rangle$ является не согласованным с α, и докажем, что расписание $\langle \alpha, \mathcal{T}_A; t\rangle$ является согласованным с α, и, если $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ t & t_2 & \dots & t_s \end{matrix} \right\rangle$ сдвигающая последовательность для $\mathcal{T}$ в точке t, то левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & t_2 & \dots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является положительным циклом в $\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t\rangle$.

Предположим сначала, что

$$\alpha(t) * \mu_1(t+p_{\mathcal{T}}) \qquad (I)$$

и рассмотрим расписание

$$\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t\rangle = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \mu_1 & & \mu_2 & & \mu_3 & \dots & \mu_s & & \alpha \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccccc} t & & t_2 & & t_3 & & t_s & & t+p_{\mathcal{T}} \end{array}$$

и расписание R, полученное из него перестановкой μ_1 и α

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & & \mu_2 & & \mu_3 & \dots & \mu_s & & \mu_1 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccccc} t & & t_2 & & t_3 & & t_s & & t+p_{\mathcal{T}} \end{array}$$

Левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_s & \mu_1 \\ t_2 & t_3 & \dots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ будет положительным, т.к. он приводит $R[t+1, t+p_{\mathcal{T}}]$ к расписанию $\langle \mathcal{T}_A; t+1\rangle$. Применим этот цикл к R и получим

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & & \mu_1 & & \mu_2 & & \mu_{s-1} & & \mu_s \\ \hline \end{array} = \langle \alpha, \mathcal{T}_A; t\rangle.$$
$$\begin{array}{ccccccccc} t=t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_s & & t+p_{\mathcal{T}} \end{array}$$

Заметим, что левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & t_2 & \dots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является положительным.

Покажем, что в $\langle \alpha, \mathcal{T}_A; t\rangle$ символ α строго согласован с каждым μ_i с координатой t_{i+1} $(i=1,\dots,s,\ t_{s+1}=t+p_{\mathcal{T}})$, откуда легко будет следовать строгая согласованность $\langle \alpha, \mathcal{T}_A; t\rangle$.

Действительно, пусть α не согласован с μ_i. Тогда

$$(1) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mu_i(t_1) * \alpha(t_{i+1}) \\ \alpha(t_1) * \mu_1(t_{i+1}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu_i(t_1) * \mu_1(t_{i+1}). \tag{2}$$

Из того, что $\langle \mathfrak{T}_A ; t \rangle$ - СС и того, что $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 \dots \mu_s \\ t_1 \dots t_s \end{matrix} \right\rangle$ - сдвигающая последовательность для $\mathfrak{T}$, следует $\mu_1(t_1) * \mu_i(t_i)$ и $\mu_1(t_2) * \mu_i(t_{i+1})$, что противоречит (2).

Итак, мы доказали, что из (I) вытекает строгая согласованность $\langle \alpha, \mathfrak{T}_A ; t \rangle$. Предположим теперь, что (I) не имеет места, но что в расписании $\langle \mathfrak{T}_A , \alpha ; t \rangle$ символ α не согласован с символом μ_i с координатой t_i. По только что доказанному, левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_s & \alpha \\ t_i & t_{i+1} & \dots & t_s & t+p_{\mathfrak{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является положительным и в расписании

μ_1		μ_{i-1}		α		μ_i		μ_{s-1}		μ_s
$t=t_1$		t_{i-1}		t_i		t_{i+1}		t_s		$t+p_{\mathfrak{T}}$

$\alpha(t_i) * \mu_j(t_{j+1})$, $j = i, \dots, s$. Если среди $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}$ есть элементы, с которыми α не согласовано, то опять возникает положительный цикл.

Если таких элементов нет, т.е. $\mu_q(t_q) * \alpha(t_i)$, $q = 1, \dots, i-1$, то левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{i-1} & \alpha \\ t & t_2 & \dots & t_{i-1} & t_i \end{matrix} \right\rangle$ будет положительным, т.к. множество $\mathfrak{T}$ является объединением конфликтующих α-плотных множеств. Осталось рассмотреть случай несогласованности α с символом, не являющимся членом сдвигающей последовательности, но он легко сводится к рассмотренному. Итак, пункт 3б) доказан.

Докажем пункт 3в), а именно, пусть $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ t & t_2 & \dots & t_s \end{matrix} \right\rangle$ является сдвигающей последовательностью для $\langle \mathfrak{T}_A ; t \rangle$, а левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & \dots & t_s & t+p_{\mathfrak{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является отрицательным. Построим сдвигающую последовательность для $\langle \mathfrak{T}_A ; t+1 \rangle$ и выделим ее на рисунке стрелками, указывающими, куда прыгают элементы сдвигающей последовательности.

$\langle \mathfrak{T}_A , \alpha ; t \rangle =$

μ_1						μ_2	...	μ_i					μ_{i+1}		μ_{i+2}		μ_s		α
α	ν_1		ν_2	...	ν_l	μ_1	...	μ_{i-1}		τ_1	...	τ_l	μ_i		μ_{i+1}		μ_{s-1}		μ_s

щей последовательности. Отметим, что если элемент τ_1 прыгнул через μ_{i-1}, то найдется элемент τ_l сдвигающей последовательности с координатой t_l, $t_i < t_l < t_{i+1}$, который сдвинется в t_{i+1} , т.к. он не может перепрыгнуть через μ_i такое, что $\tau_l \subset \mu_i$. Нужно показать, что левый цикл, указанный на следующем рисунке, будет отрицательным:

ν_1		ν_2	...	ν_q		μ_1		τ_1		τ_2	...	τ_l		μ_i		μ_{i+1}	...	μ_{s-1}		μ_s	α
$t+1$						t_2	t_i	t_i'						t_{i+1}		t_{i+2}		t_s		t_{s+1}	$t_{s+1}+1$

где $t_{s+1}=t+p_{\mathcal{T}}$.

Так как по предположению нулевых циклов нет, то мы штраф этой последовательности не уменьшим, совершив отрицательные циклы

μ_1		ν_1	...	ν_{q-1}	...	ν_q		μ_i		τ_1	...	τ_{l-1}		τ_l		μ_{i+1}	...	μ_{s-1}		μ_s	α
$t+1$						t_2	t_i	t_i'						t_{i+1}		t_{i+2}		t_s		t_{s+1}	$t_{s+1}+1$

Далее, мы увеличим штраф этой последовательности, совершив левый отрицательный цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_s & \alpha \\ t+1 & t_i' & t_{i+2} & \dots & t_{s+1} & t_{s+1}+1 \end{matrix} \right\rangle$. То, что этот цикл отрицательный, следует из леммы 3 и из того факта, что если левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & t_2 & \dots & t_i & t_{i+1} & \dots & t_s & t_{s+1} \end{matrix} \right\rangle$ является отрицательным, то и левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & t_i & t_{i+1} & \dots & t_s & t_{s+1} \end{matrix} \right\rangle$ является отрицательным. Теорема I доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\mathcal{T}$ – k-ярусное α-плотное множество и пусть дано расписание $\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t \rangle$, где $t = X(\mathcal{T}, \alpha)$. Пусть $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ t & t_2 & \dots & t_s \end{matrix} \right\rangle$ – сдвигающая последовательность для $\langle \mathcal{T}_A; t \rangle$. Тогда левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s & \alpha \\ t & t_2 & \dots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ будет отрицательным. Пусть $\mathcal{T}^1$ – любое α-плотное подмножество множества $\mathcal{T}$. Покажем, что если $\left\langle \begin{matrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_l \\ t+p_{\mathcal{T}}-p_{\mathcal{T}^1} & t_2' & \dots & t_l' \end{matrix} \right\rangle$ сдвигающая последовательность для $\langle \mathcal{T}_A^1; t+p_{\mathcal{T}}-p_{\mathcal{T}^1} \rangle$, то левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_l & \alpha \\ t+p_{\mathcal{T}}-p_{\mathcal{T}^1} & t_2' & \dots & t_l' & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является отрицательным, откуда будет следовать теорема. Рассмотрим расписание $R=\langle \mathcal{T}_A, \alpha; t \rangle$ и найдем в нем все работы множества $\mathcal{T}^1$. Пусть t_{ζ_1} – координата первого вхождения символа работы множества $\mathcal{T}^1$ в расписание R . Обозначим эту работу через ζ_1 . Так как $t = X(\mathcal{T}, \alpha)$, а множество $\mathcal{T}$ α-плотно, то все циклы в R – отрицательные. Рассмотрим $\bar{\mathcal{T}}=\mathcal{T}\langle R[t_{\zeta_1}, t+p_{\mathcal{T}}-1]\rangle$ – множество работ, координаты которых в расписании R принадлежат интервалу $[t_{\zeta_1}, t+p_{\mathcal{T}}-1]$. Пусть $\left\langle\begin{matrix}\zeta_1 & \zeta_2 \dots \zeta_u\\ t_{\zeta_1} & t_{\zeta_2}\dots t_{\zeta_u}\end{matrix}\right\rangle$ – сдвигающая последовательность для $\langle\bar{\mathcal{T}}_A;\ t_{\zeta_1}\rangle$ тогда левый цикл $\left\langle\begin{matrix}\zeta_1\dots\zeta_u & \alpha\\ t_{\zeta_1}\dots t_{\zeta_u} & t+p_{\mathcal{T}}\end{matrix}\right\rangle$ будет отрицательным. Очевидно $\mathcal{T}^1\subset\bar{\mathcal{T}}$. Если $\bar{\mathcal{T}}\neq\mathcal{T}^1$, то удаляя по одному элементу, не принадлежащему множеству $\mathcal{T}^1$ и сдвигая полученное расписание на одну единицу вправо, покажем, что левый цикл с α сдвигающей последовательности полученного множества работ будет отрицательным. Рассмотрим расписание, и пусть мы удаляем элемент σ с координатой t_σ, не принадлежащий

$R=[t_{\zeta_1}, t+p_{\mathcal{T}}]=$

ζ	ρ		ζ_2		σ		ζ_3	$\dots$	ζ_s		α
t_{ζ_1}			t_{ζ_2}		t_σ		t_{ζ_3}		t_{ζ_5}		$t+p_{\mathcal{T}}$

сдвигающей последовательности. Тогда расписание $\langle(\bar{\mathcal{T}}\setminus\sigma)_A, t_{\zeta_1}+1\rangle$ будет иметь следующий вид в силу индукционного предположения о справедливости теоремы 2, если элемент ζ_1 сдвигается в t_{ζ_2},

ρ		ζ_1		ζ_2		ζ_3	$\dots$	ζ_i		ζ_{i+1}	$\dots$	ζ_s	
$t_{\zeta_1}+1$		t_{ζ_2}		$\bar{t}$		t_{ζ_3}		t_{ζ_i}		$t_{\zeta_{i+1}}$		t_{ζ_5}	

где $\bar{t}\in(t_{\zeta_2}, t_{\zeta_3})$. Тогда сдвигающая последовательность для $\langle(\bar{\mathcal{T}}\setminus\sigma)_A; t_{\zeta_1}+1\rangle$ будет иметь следующий вид

$\left\langle\begin{matrix}\rho & \zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1}\dots\zeta_s\\ t_{\zeta_1}+1 & t_{\zeta_2} & t_\varkappa & t_{\zeta_{i+1}}\dots t_{\zeta_s}\end{matrix}\right\rangle$, где $t_{\zeta_i}\leqslant t_\varkappa<t_{\zeta_{i+1}}, i\in\{1,\dots,s\}$

(если $t_\varkappa=t_{\zeta_i}$, то $\varkappa=\zeta_i$ и при $i=1$, $t_\varkappa>t_{\zeta_1}$). Левый цикл $\left\langle\begin{matrix}\rho & \zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1}\dots\zeta_s & \alpha\\ t_{\zeta_1}+1 & t_{\zeta_2} & t_\varkappa & t_{\zeta_{i+1}}\dots t_{\zeta_s} & t+p_{\mathcal{T}}\end{matrix}\right\rangle$ является отрицательным, т.к. является отрицательным левый цикл $\left\langle\begin{matrix}\zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1}\dots\zeta_s & \alpha\\ t_{\zeta_1}+1 & t_\varkappa & t_{\zeta_{i+1}}\dots t_{\zeta_s} & t+p_{\mathcal{T}}\end{matrix}\right\rangle$.

Случай, когда элемент ζ_1 сдвигается в координату, большую t_{ζ_2}, рассматривается аналогично.

Удалим теперь из расписания $R[t_{\zeta_1}, t+p_{\mathcal{T}}]$ элемент сдвигающей последовательности, отличный от ζ_1, например, ζ_3. Тогда расписание $\langle(\bar{\mathcal{T}}-\zeta_3)_A; t_{\zeta_1}+1\rangle$ будет иметь следующий вид, если ζ_2 сдвигается в точку t_{ζ_3}.

ρ	ζ_1	ζ_2	$\zeta_4 \ldots$	ζ_i	$\varkappa$	ζ_{i+1}	ζ_s
$t_{\zeta_1}+1$	t_{ζ_2}	t_{ζ_3}	t_{ζ_4}	t_{ζ_i}	$t_{\varkappa}$	$t_{\zeta_{i+1}}$	t_{ζ_s}

При этом сдвигающая последовательность для $\langle(\bar{\mathfrak{T}}\setminus\zeta_3)_A;\ t_{\zeta_1}+1\rangle$ будет иметь следующий вид:

$$\left\langle\begin{matrix}\rho & \zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1} \ldots \zeta_s\\ t_{\zeta_1}+1 & t_{\zeta_2} & t_{\varkappa} & t_{\zeta_{i+1}} \ldots t_{\zeta_s}\end{matrix}\right\rangle, \text{где } t_{\zeta_i} \leqslant t_{\varkappa} \leqslant t_{\zeta_{i+1}}$$

и дальше аналогично случаю удаления неподвижного элемента.

Для того, чтобы избежать необходимости удалять первый элемент сдвигающей последовательности, мы будем удалять все те элементы из множества $\mathfrak{T}$, одновременно, через которые ζ_1 прыгает и которые не принадлежат множеству $\mathfrak{T}^1$. Покажем, что в этом случае левый цикл с α сдвигающей последовательности полученного множества работ также будет отрицательным.

Действительно, пусть ζ_1 прыгает через непустое множество H вложенных в ζ_1 элементов, и мы удалим из H подмножество H_0 из ℓ элементов, не принадлежащих $\mathfrak{T}^1$. Тогда расписание $\langle(\bar{\mathfrak{T}}\setminus H_0)_A;\ t_{\zeta_1}+\ell\rangle$ будет иметь вид, если ζ_1 не прыгает

ρ	ζ_1	ζ_2	$\ldots$	ζ_{i-1}	$\varkappa$	ζ_i	ζ_s
$t_{\zeta_1}+\ell$	$\bar{t}$	t_{ζ_2}		$t_{\zeta_{i-1}}$	$t_{\varkappa}$	t_{ζ_i}	t_{ζ_s}

дальше t_{ζ_2}, $\rho\in\mathfrak{T}^1$ и сдвигающая последовательность для $\langle(\bar{\mathfrak{T}}\setminus H_0)_A;\ t_{\zeta_1}+\ell\rangle$ будет опять иметь вид

$$\left\langle\begin{matrix}\rho & \zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1} & \ldots & \zeta_s\\ t_{\zeta_1}+\ell & \bar{t} & t_{\varkappa} & t_{\zeta_{i+1}} & \ldots & t_{\zeta_s}\end{matrix}\right\rangle, \text{где } t_{\zeta_i} \leqslant t_{\varkappa} \leqslant t_{\zeta_{i+1}},$$

и следовательно левый цикл $\left\langle\begin{matrix}\rho & \zeta_1 & \varkappa & \zeta_{i+1} \ldots \zeta_s & \alpha\\ t_{\zeta_1}+\ell & \bar{t} & t_{\varkappa} & t_{\zeta_{i+1}} \ldots t_{\zeta_s} & t+p_{\mathfrak{T}}\end{matrix}\right\rangle$ является отрицательным. Таким образом, теорема 2 доказана. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из доказательства теоремы 2 следует, что если в множестве $\mathfrak{T}$ существует α-плотное подмножество $\mathfrak{T}^1$ такое, что $X(\mathfrak{T}^1,\alpha)+p_{\mathfrak{T}^1} > t+p_{\mathfrak{T}}$, то в расписании $\langle\mathfrak{T}_A,\alpha;\ t\rangle$ существует положительный цикл. Таким образом, достаточность теоремы 3 следует из доказательства теоремы 2. Покажем теперь, что если в расписании $R_A=\langle\mathfrak{T}_A,\alpha;\ t\rangle$ существует положительный цикл, то существует α-плотное подмножество $\mathcal{T}^1$ такое, что $x(\mathcal{T}^1, \alpha) + p_{\mathcal{T}_1} > t + p_{\mathcal{T}}$ (3) . Если $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 \ldots & \mu_s \\ t & t_2 \ldots & t_s \end{matrix} \right\rangle$ является сдвигающей последовательностью для $\langle \mathcal{T}_A ; t \rangle$, то из существования положительного цикла следует, что левый цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_s & \alpha \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ является положительным. Выберем среди левых циклов $\left\langle \begin{matrix} \mu_i & \mu_{i+1} & \ldots & \mu_s & \alpha \\ t_i & t_{i+1} & \ldots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$ наименьший по длине положительный цикл. Пусть это будет цикл $\left\langle \begin{matrix} \mu_q & \ldots & \mu_s & \alpha \\ t_q & \ldots & t_s & t+p_{\mathcal{T}} \end{matrix} \right\rangle$. Тогда можно доказать, что множество работ $\mathcal{T}\langle R_A [t_q, t+p_{\mathcal{T}}-1]\rangle$ является α -плотным множеством и для него выполнено условие (3). Теорема 3 доказана, а следовательно, доказано, что алгоритм A строит оптимальное CC-расписание без положительных циклов для любого структурного множества работ.

Литература

1. Ш а х б а з я н К.В. Решение двух задач упорядочения работ. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.124, с.44-72.
2. Ш а х б а з я н К.В. Упорядочение структурного множества работ, минимизирующее суммарный штраф. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1979, т.90, с.229-264.
3. Ш а х б а з я н К.В., Л е б е д и н с к а я Н.Б. Об оптимальных расписаниях с прерываниями для независимых работ в системе обслуживания с N приборами. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1977, т.70, с.205-231.
4. Л е б е д и н с к а я Н.Б. Минимизация максимального отклонения в случае прерывания работ. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1978, т.80, с.117-124.
5. Ш а х б а з я н К.В. Алгоритм сдвигов для оптимальных структурных расписаний. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.124, с.73-92.