А. М. Елизаров, О смешанных обратных краевых задачах в двусвязных областях, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1982, выпуск 18, 53–61

Замечание. При доказательстве необходимости можно вместо условия $h(0)>0$ считать, что

$$h(0) \neq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|g(t)|}{S(t)^{\rho}}.$$

Автор благодарен проф. Л. И. Чибриковой за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарифьянов Ф. Н. К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 27—34.
2. Гришин А. Ф. О функциях голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 1. Харьков, 1965, с. 41—66.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956,
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше 1/2.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 6. Харьков, 1968, с. 151—168.

Доложено на семинаре 4 февраля 1980 г.

УДК 517.544

А. М. Елизаров

О СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматриваются внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи в двусвязной области с граничными условиями типа [1].

§ 1. Внутренняя задача для регулярной функции и функции с полюсом

1°. *Постановка задачи*

Пусть в плоскости z задана простая гладкая кривая Γ_0 с началом в точке z_0, уходящая в бесконечность, и $\Psi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \infty$,— угол наклона к вещественной оси касательной к Γ_0, причем

$$\Psi \in C_\lambda,\ 0<\lambda\leqslant 1;\ K=\sup_{0\leqslant s\leqslant\infty}\Psi(s)-\inf_{0\leqslant s\leqslant\infty}\Psi(s)<\pi \tag{1}$$

(C_λ — пространство гельдеровых функций, λ — показатель Гельдера).

Пусть известный участок Γ_z^1 внешней границы Γ_z искомой конечной области D_z с замкнутой границей лежит на Γ_0, имеет с ней общее начало, а конец Γ_z^1 не фиксирован. Оставшийся участок $\Gamma_z^2 = \Gamma_z - \Gamma_z^1$ внешней границы и вся внутренняя граница Γ_z^* неизвестны.

В плоскости w задана двусвязная область D_w с ляпуновской границей $\Gamma_w + \Gamma_w^*$ (Γ_w — внешняя граница, соответствующая Γ_z), являющаяся образом D_z при конформном отображении, осуществляемом искомой регулярной функцией $w(z)$. На Γ_w отмечено положение образов концов Γ_z^1.

Требуется найти область D_z и функцию $w(z)$ (непрерывную вплоть до границы) по краевым условиям

$$|dw/dz|\,|_{\Gamma_z^*} = f_*(s),\ 0 \leqslant s \leqslant l_*\,;\ |dw\,|dz|\,|_{\Gamma_z^2} = \rho f(s), \qquad (2)$$

где l_* — заданная длина Γ_z^*, f, f_* — однозначные положительные непрерывные ограниченные функции, f задана на интервале $[-\infty, 0]$, $\rho > 0$ — вещественная постоянная, определяемая в ходе решения задачи, а длина l дуги Γ_z^2 неизвестна и определяется впоследствии.

Пусть

$$F(s) = \int_s^0 f(u)\,du,\ F_*(s) = \int_0^s f_*(u)\,du.$$

Будем предполагать, что длина контура Γ_w^* равна $F_*(l_*)$.

Отобразим конформно кольцо $E_q = \{\zeta : q < |\zeta| < 1\}$ на D_w функцией $w = w(\zeta)$ с нормировкой $w(1) = w_0$, где w_0 — начало дуги Γ_w^1. Через $e^{i\theta_1}$, $0 < \theta_1 < 2\pi$ обозначим точку на $\mathscr{L}_0 = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, соответствующую концу w_1 дуги Γ_w^1. Тогда дуге Γ_w^2 будет соответствовать интервал $[\theta_1 - 2\pi, 0]$ изменения полярного угла. Возьмем для удобства дальнейших выкладок за начало отсчета дуговой абсциссы σ_* контура Γ_w^* точку, соответствующую $\zeta = q$.

Так как функция $w(\zeta)$ известна, то можно определить функции $\sigma_* = \sigma_*(\theta)$, $-2\pi \leqslant \theta \leqslant 0$, и $\sigma = \sigma(\theta)$, $\theta_1 - 2\pi \leqslant \theta \leqslant 0$ (σ — дуговая абсцисса контура Γ_w). Из тождества

$$dz/d\zeta = (dw/d\zeta)/(dw/dz) \qquad (3)$$

выводим, что

$$F_*[s(\theta)] = \sigma_*(\theta),\ -2\pi \leqslant \theta \leqslant 0,\ \sigma_*(-2\pi) = s(-2\pi) = 0;$$
$$\rho F[s(\theta)] = \sigma(\theta),\ \theta_1 - 2\pi \leqslant \theta \leqslant 0,\ \sigma(0) = s(0) = 0. \qquad (4)$$

Из (4), используя обратные функции F_*^{-1}, F^{-1}, определяем значения дуговой абсциссы s на Γ_z^* и Γ_z^2 в виде

$$s(\theta) = F_*^{-1}[\sigma_*(\theta)] = g_*(\theta),\ -2\pi \leqslant \theta \leqslant 0;$$

$$s(\theta) = F^{-1}[\sigma(\theta)/\rho] = g(\theta, \rho), \ \theta_1 - 2\pi \leqslant \theta \leqslant 0.$$

Введем обозначения:

$$f_*[g_*(\theta)] = g_1^*(\theta), \ -2\pi \leqslant \theta \leqslant 0,$$

$$f[g(\theta, \rho)] = g_1(\theta, \rho), \ \theta_1 - 2\pi \leqslant \theta \leqslant 0. \tag{5}$$

Заметим, что из свойств функции f следует, что $g_1(\theta, \rho)$ — ограниченная положительная функция (независимо от ρ).

2°. Вывод системы уравнений

Рассмотрим функцию $F(\zeta) = \ln(dw/dz)(\zeta)$, $\zeta \in E_q$. Имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} F(e^{i\theta}) = \Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)], \ \theta \in [0, \theta_1], \\ &\operatorname{Re} F(e^{i\theta}) = \ln \rho + \ln g_1(\theta, \rho), \ \theta \in [\theta_1, 2\pi], \\ &\operatorname{Re} F(qe^{i\theta}) = \ln g_1^*(\theta), \ \theta \in [-2\pi, 0], \end{aligned} \tag{6}$$

где $\Phi(\theta)$ — угол наклона к вещественной оси касательной к дуге Γ_w^1, определяемый по значениям $w(e^{i\theta})$. Функция $\Phi(\theta)$ по условию гельдерова.

Перепишем (6) в виде одного условия:

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \ t \in \mathscr{L} = \partial E_q, \tag{7}$$

где $F(t) = u(t) + iv(t)$,

$$a = 0, \ b = 1, \ c(t) = \Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)], \ t = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, \theta_1],$$

$$a = 1, \ b = 0, \ c(t) = \begin{cases} \ln g_1^*(\theta), \ t = qe^{i\theta}, \ \theta \in [-2\pi, 0], \\ \ln \rho + \ln g_1(\theta, \rho), \ t = e^{i\theta}, \ \theta \in [\theta_1, 2\pi]. \end{cases}$$

Получили краевую задачу Гильберта для кольца (с разрывными коэффициентами). Решение задачи (7) может быть найдено методом работы [2] и построено В. В. Селезневым:

$$F(\zeta) = \frac{\exp X(\zeta)}{\zeta - e^{i\theta_1/2}} \left\{ S(c_1; \zeta) - \frac{2}{\pi} \int\limits_{\mathscr{L}} c_1(t) \left[\zeta\left(-\frac{2}{i}\ln t\right) + \beta_1(t)\eta_1 \right] \right\} \frac{dt}{t}, \tag{8}$$

где

$$c_1(t) = c(t)\,|t - t_*|\,e^{-X_0(t)} \sec[\pi\beta(t)], \ t_* = e^{i\theta_1/2},$$

$\beta(t)$ зависит от выбора класса решений (в данном случае — ограниченных в точках разрыва) и имеет в рассматриваемой задаче вид:

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, \ t \in \mathscr{L}_1 = \{t : |t| = q\}, \ \text{и} \ t = e^{i\theta}, \ \theta \in [\theta_1/2, 2\pi], \\ 1, \ t = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, \theta_1/2], \end{cases}$$

$\beta_1(t) = 0$ на $\mathscr{L}_0 = \{t : |t| = 1\}$, $\beta_1(t) = 1$ на $\mathscr{L}_1$, а $X(\zeta)$ — однозначная и аналитическая в кольце E_q функция, причем $X_0(t)$ —

граничное значение $\operatorname{Re} X(\zeta)$. В силу [2], функция $X(\zeta)$ определяется формулой

$$X(\zeta) = i\boldsymbol{S}(\psi; \zeta), \tag{9}$$

где $\psi(t) = \arg[a(t) - ib(t)] - \pi\beta(t) + \arg(t - e^{i\theta_1/2}) = \operatorname{Im} X(t)$, $t \in \mathscr{L}$, а ветвь $\arg[a(t) - ib(t)]$ выбрана так, что $-\pi \leqslant \arg[a(t) - ib(t)] \leqslant \pi$.

Отметим, что в формулах (8), (9) через $\boldsymbol{S}$ обозначен оператор Шварца для кольца (см., например, [3], с. 238):

$$\boldsymbol{S}(c; \zeta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathscr{L}} c(t)\left\{\zeta\left[\frac{2}{i}\ln(\zeta/t)\right] + \beta_1(t)\,\eta_1\right\}\frac{dt}{t},$$

где ζ — дзета-функция Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = 2\pi$, $i\omega_2/2 = -i\ln q$, $\eta_1 = \zeta(\pi)$.

Пусть $X_1(\zeta) = |\zeta - e^{i\theta_1/2}| \exp[-X_0(\zeta)]$, $\zeta \in E_q$. Так как индекс задачи (7) в классе ограниченных функций равен -1 (см. [2]), то должно выполняться одно условие разрешимости

$$0 = \int\limits_{\mathscr{L}} c_1(t)\frac{dt}{t} \equiv T_1(s) + T_2(\rho) + N\ln\rho, \tag{10}$$

где

$$N = \int\limits_{\theta_1}^{2\pi} X_1(e^{i\theta})\,d\theta \neq 0,$$

$$T_1(s) = \int\limits_{0}^{\theta_1/2}\{\Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)]\}\,X_1(e^{i\theta})\,d\theta -$$

$$-\int\limits_{\theta_1/2}^{\theta_1}\{\Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)]\}\,X_1(e^{i\theta})\,d\theta - \int\limits_{0}^{2\pi}\ln g_1^*(\theta)\,X_1(qe^{i\theta})\,d\theta;$$

$$T_2(\rho) = \int\limits_{\theta_1}^{2\pi}\ln g_1(\theta, \rho)\cdot X_1(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Соотношение (10) служит для определения ρ. Перепишем его в виде

$$\rho = \mathfrak{A}_1(s, \rho) \equiv \exp\{-N^{-1}(T_1(s) + T_2(\rho))\}. \tag{10$'$}$$

Продолжим функцию Ψ на всю ось $-\infty \leqslant s \leqslant \infty$ с сохранением ограничения (1). Очевидно, что оператор $\mathfrak{A}_1$ непрерывен по совокупности переменных. Кроме того, в силу ограниченности функций $\Psi(s)$ и $g_1(\theta, \rho)$ независимо от s и ρ, справедлива оценка

$$0 < M_1 \leqslant \mathfrak{A}_1(s, \rho) \leqslant M_2 < \infty$$

с постоянными M_i, $i = 1, 2$, не зависящими от s и ρ.

Таким образом, оператор $\mathfrak{A}_1(s, \rho)$ при любом s переводит топологическое произведение $C_\nu \times [M_1, M_2]$ в интервал $M_1 \leqslant \rho \leqslant M_2$.

Из (3) и (8) выводим уравнение для определения $s(\varphi)$:

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \exp\{-\operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\} G(\varphi)\, d\varphi, \quad \varphi \in [0, \theta_1], \tag{11}$$

где $G(\varphi)$ — граничное значение функции $|dw/d\zeta|$, $\zeta = e^{i\varphi}$. Разрешимость задачи эквивалентна разрешимости системы уравнений (10′), (11).

3°. *Доказательство разрешимости системы*

Определенный формулой (11) непрерывный по совокупности переменных оператор $\mathfrak{A}_2(s, \rho)$ действует из пространства $C_\nu \times [M_1 M_2]$ в C_ν. Как и в [4], для доказательства его компактности необходимо показать, что $\mathfrak{A}_2$ переводит любое ограниченное множество из $C_\nu \times [M_1, M_2]$ в ограниченное множество из $C_{\nu+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Для этого понадобится полученное нами обобщение результата Зигмунда ([5], с. 405).

Лемма. *Пусть регулярная в E_q функция $F_0(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям*

$$\operatorname{Re} F_0(e^{i\theta}) = h(\theta),\ \theta \in [0, \theta_1];\ \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}) = 0,\ \theta \in [\theta_1, 2\pi],$$
$$\operatorname{Im} F_0(qe^{i\theta}) = h_1(\theta),\ \theta \in [-2\pi, 0];\ h,\ h_1 \in C_\lambda,$$

причем колебание K_h функции $h(\theta)$ на $[0, \theta_1]$ меньше $p\pi$, $0 < p \leqslant 1$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^{\theta_1} \exp\{\pm p^{-1} \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta})\}\, d\theta \leqslant R_0, \tag{12}$$

где

$$R_0 = 4\pi[1 + R'/r] \sec[K_h/(2p)],$$
$$r = [c_0^2(1+q)^2/(1-q)^2 + 1]^{1/2} - c_0(1+q)/(1-q),\quad c_0 = \operatorname{tg}(\theta_1/4),$$
$$R' = 4c_0 q(1-q)^{-2} \sec(\theta_1/4)[1 + c_0(1+q) r_1^{-1/4}] \max_{[-2\pi, 0]} \exp[-h_1(\theta)],$$
$$r_1 = (1+q^2)^2 - 4q(1+q^2)|\cos(\theta_1/2)| - 4q^2 \sin^2(\theta_1/2).$$

Доказательство леммы из-за громоздкости выкладок опускается. Оно может быть получено аналогично доказательству леммы 1 из [6], с. 200. Переходим к обоснованию основного результата.

Теорема. *При выполнении* (1) *система уравнений* (10′), (11) *разрешима.*

Доказательство. Пусть регулярная в кольце E_q функция $\widetilde{F}(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\theta}) = \Phi(\theta),\ \theta \in [0,\ \theta_1];\\ &\operatorname{Re}\widetilde{F}(qe^{i\theta}) = \rho_0 = \mathrm{const},\ \theta \in [-2\pi,\ 0],\\ &\operatorname{Re}\widetilde{F}(e^{i\theta}) = \ln\rho + \ln g_1(\theta,\ \rho),\ \theta \in [\theta_1,\ 2\pi], \end{aligned} \tag{13}$$

где ρ_0 — неизвестная постоянная. Из результатов п. 2° следует, что такая функция существует при выполнении условия (10), принимающего в данном случае вид

$$\int_0^{\theta_1/2} \Phi(\theta)\,X_1(e^{i\theta})\,d\theta - \int_{\theta_1/2}^{\theta_1} \Phi(\theta)\,X_1(e^{i\theta})\,d\theta + \int_{\theta_1}^{2\pi} \ln[\rho g_1(\theta,\ \rho)] \times$$
$$\times X_1(e^{i\theta})\,d\theta - \rho_0\int_0^{2\pi} X_1(qe^{i\theta})\,d\theta = 0. \tag{14}$$

Так как интеграл при ρ_0 в (14) отличен от нуля, то (14) всегда можно удовлетворить подбором ρ_0, которое будет ограничено при любом $\rho \in [M_1,\ M_2]$, независимо от искомой функции $s(\theta)$.

Пусть $F_0(\zeta) = -i\,[F(\zeta) - \widetilde{F}(\zeta)]$. Имеем:

$$\operatorname{Re}F_0(e^{i\theta}) = \Psi[s(\theta)],\ \theta \in [0,\ \theta_1];\ \operatorname{Im}F_0(e^{i\theta}) = 0,\ \theta \in [\theta_1,\ 2\pi],$$
$$\operatorname{Im}F_0(qe^{i\theta}) = \rho_0 - \ln g_1^*(\theta),\ \theta \in [0,\ 2\pi].$$

В силу (12), справедлива оценка

$$\int_0^{\theta_1} \exp\{-p^{-1}\operatorname{Im}F_0(e^{i\theta})\}\,d\theta \leqslant R_0,$$

если $K < p\pi$, $0 < p \leqslant 1$. В силу (1), такое p существует. Положим $0 < \nu < 1 - p$. Тогда для любых $\varphi_1,\ \varphi_2 \in [0,\ \theta_1]$ с учетом (12) будем иметь:

$$|[\mathfrak{A}_2(s,\ \rho)](\varphi_2) - [\mathfrak{A}_2(s,\ \rho)](\varphi_1)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp\{-\operatorname{Im}F_0(e^{i\varphi})/(1-\nu-\varepsilon)\}\,d\varphi\right|^{1-\nu-\varepsilon} \times$$
$$\times \exp\{\max_{[0,\ \theta_1]}[-\operatorname{Re}\widetilde{F}(e^{i\varphi})]\}\max_{[0,\ \theta_1]} G(\varphi)\,|\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon} \leqslant$$
$$\leqslant R_0^{1-\nu-\varepsilon}|\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon}\exp\{\max_{[0,\ \theta_1]}[-\operatorname{Re}\widetilde{F}(e^{i\varphi})]\}\max_{[0,\ \theta_1]} G(\varphi) =$$
$$= R_1|\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ таково, что $0 < \nu < 1 - p - \varepsilon$. Итак, оператор $\mathfrak{A}_2(s,\ \rho)$ вполне непрерывен и переводит множество $\Omega \times [M_1,\ M_2]$ в себя, где $\Omega = \{s \in C_\nu : \|s\|_\nu \leqslant R_1(1 + \theta_1^\nu)\}$.

Запишем систему (10′), (11) в виде одного уравнения:

$$\hat{s} = \mathfrak{A}\hat{s} \equiv \{\mathfrak{A}_1(s, \rho), \mathfrak{A}_2(s, \rho)\},$$

где $\hat{s} = \{s, \rho\}$. Оператор $\mathfrak{A}$ на выпуклом замкнутом множестве $\Omega \times [M_1, M_2]$ вполне непрерывен и переводит его в свою часть. По принципу неподвижной точки Шаудера (см., например, [7], с. 616), система разрешима. Теорема доказана.

Замечание 1. В силу замкнутости границы D_z, исходная задача будет разрешима при выполнении условия (ср. с [8], с. 79)

$$\int_0^{2\pi} \exp\{-F(qe^{i\varphi})\} \frac{dw}{d\zeta}(qe^{i\varphi})\, d\varphi = 0, \tag{15}$$

которое проверяется после решения системы (10′), (11). После определения значения ρ длина l дуги Γ_z^2 определяется из равенства

$$l = \int_{\theta_1 - 2\pi}^{0} g(\theta, \rho)\, d\theta.$$

§ 2. Внешние задачи

Рассмотрим внешнюю смешанную обратную краевую задачу для регулярной функции. В этом случае ни один из контуров Γ_z, Γ_z^* не является ни внутренним, ни внешним. Дуга Γ_z^1 задается как в § 1.

Пусть, для определенности, внешняя граница заданной двусвязной области D_w соответствует Γ_z и на ней отмечена дуга Γ_w^1. Требуется найти область D_z и функцию $w(z)$ по краевым условиям (2), если дополнительно задано значение $w_0 = w(\infty)$.

По заданной величине w_0 и функции $w(\zeta)$ определим значение ζ_0, $w(\zeta_0) = w_0$. Так как $dz/d\zeta$ имеет в этой точке полюс 2-го порядка, то аналитической будет функция $dz_1/d\zeta = (dz/d\zeta) \times (\zeta - \zeta_0)^2$. Пусть $G_1(\zeta) = \ln(dz_1/d\zeta)$, $G(\zeta) = \ln(dz/d\zeta)$. Имеем

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re} G_1(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} G(re^{i\theta}) + \ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \gamma_0)],\\
\theta \in [0, 2\pi],\ \zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0},\ r = 1,\ q,\\
\operatorname{Im} G_1(e^{i\theta}) = \Psi[s(\theta)] - \theta - \pi/2 + 2H(\theta),\ \theta \in [0, \theta_1],\\
H(\theta) = \arg(e^{i\theta} - \zeta_0).
\end{gathered} \tag{16}$$

Рассуждая как в § 12 из [8], можно показать, что G_1 однозначна. Далее, по краевым условиям задачи определим функции $g_*(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $g(\theta, \rho)$, $\theta \in [\theta_1, 2\pi]$ (ср. с. § 1). Тогда, подставляя полученные выражения в (16), приходим к краевой задаче (7), где

$$c(t)=\begin{cases}\Psi[s(\theta)]+2H(\theta)-\theta-\pi/2, & \theta\in[0,\ \theta_1],\\ \ln\{g_*'(\theta)[q^2+r_0^2-2qr_0\cos(\theta-\gamma_0)]\}, & \theta\in[0,\ 2\pi],\\ \ln\{\widetilde{g}_1(\theta,\ \rho)[1+r_0^2-2r_0\cos(\theta-\gamma_0)]\}-\ln\rho, & \theta\in[\theta_1,\ 2\pi],\end{cases}$$

и $\widetilde{g}_1(\theta,\ \rho)=\sigma'(\theta)/g_1(\theta,\ \rho)$ обладает теми же свойствами, что и функция $g_1(\theta,\ \rho)$.

Решение этой задачи получено в § 1, величина ρ находится из условия однозначности (10). Уравнение задачи выводится из равенства

$$\ln\frac{ds}{d\theta}=\operatorname{Re}G_1(e^{i\theta})-\ln[1+r_0^2-2r_0\cos(\theta-\gamma_0)]$$

и имеет вид (ср. с (11))

$$s(\varphi)=\int_0^{\varphi}\exp\{\operatorname{Re}G_1(e^{i\varphi})\}[1+r_0^2-2r_0\cos(\varphi-\gamma_0)]^{-1}d\varphi,$$
$$\varphi\in[0,\ \theta_1]. \tag{11'}$$

Разрешимость системы уравнений (10′), (11′) при условии (1) доказывается по схеме § 1.

После решения уравнений определится функция $dz/d\zeta$. Теперь необходимо выполнить требования, обеспечивающие замкнутость контуров Γ_z и Γ_z^*. Как и в [8], (с. 86), получаем:

$$\int_{|\zeta|=q}\exp\{G(\zeta)\}\,d\zeta=0 \tag{17}$$

(равенство нулю коэффициента при ζ^{-1} в разложении Лорана функции $dz/d\zeta$ в кольце $q<|\zeta|<|\zeta_0|$);

$$G_1'(\zeta_0)=0 \tag{18}$$

(равенство нулю коэффициента при $\zeta-\zeta_0$ в разложении Тейлора функции $G_1(\zeta)$ в окрестности ζ_0).

Соотношения (17), (18) являются условиями разрешимости и проверяются после решения уравнений задачи.

Во внешней задаче для функции с простым полюсом и заданной величиной $w(\infty)=w_0$ (в случае полюса в ∞ $w_0=\infty$) область D_w содержит ∞. Отображая ее на E_q и определяя значение ζ_0, снова придем к уравнению (11′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, вып. 64, 1961, с. 3—24.

2. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 141—154.

3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.
4. Елизаров А. М. Доказательство теорем существования и единственности для решений смешанных обратных краевых задач методом интегральных уравнений. ДЕП № 2432—79.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М., „Мир“, 1965.
6. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1964.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., „Наука“, 1977.
8. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

Доложено на семинаре 5 декабря 1980.

УДК 517.956.6

В. И. Жегалов

К ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ С УСЛОВИЯМИ СМЕЩЕНИЯ И ОБОБЩЕННОГО СКЛЕИВАНИЯ

Пусть D_- — внутренность треугольника $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а D_+ — односвязная область при $y \geqslant 0$, ограниченная отрезком AB и простой дугой σ.

Задача. В области $D = D_+ \bigcup D_-$ найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} = 0 \tag{1}$$

непрерывное в $\overline{D}_+$, а также в замкнутых областях, получаемых из D_- удалением характеристик уравнения (1), проходящих через точку $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Производная $u_y(x, y)$ непрерывно продолжима из D_+ и D_- на ось x, кроме, может быть, точки P, причем

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= \alpha_0(x)\, u(x, +0) + \beta_0(x)\, u(1-x, +0) + \gamma_0(x), \\ u_y(x, -0) &= \alpha_1 u_y(x, +0) + \beta_1 u_y(1-x, +0) + \gamma_1(x). \end{aligned} \tag{2}$$

На линии σ и границе области D_- должны выполняться условия

$$u = \varphi(t),\ t \in \sigma, \tag{3}$$