

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*В. В. Лычагин*

Особенности, скачки, ударные волны или, короче, катастрофы представляют один из наиболее важных и интригующих разделов геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений. Современная теория особенностей довольно правдоподобно объясняет механизм образования катастроф (см., например, [24]). Однако, несмотря на простоту и огромное количество приложений (а также спекуляций), этот механизм не является удовлетворительным. Дело, по-видимому, в том, что с одной стороны большинство процессов, к которым этот механизм применяется, описывается дифференциальными уравнениями (и, как правило, — в частных производных), а с другой стороны его использование начинается лишь тогда, когда фактически дифференциальное уравнение уже забыто, а при дальнейших манипуляциях с решением какой-либо якобиан обратился в нуль.

В этой работе предпринимается попытка с единой геометрической точки зрения подойти к теории особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений и тем самым указать более прямую и непосредственную связь между дифференциальными уравнениями и теорией особенностей, применив последнюю к проекциям интегральных многообразий.

### § 1. РАССЛОЕНИЯ СТРУИ

В основе геометрического подхода к теории нелинейных дифференциальных уравнений лежат пространства струй. Понятие струи или джета было введено Эресманном. Однако стоит отметить, что уже первое проинтегрированное дифференциальное уравнение в частных производных — уравнение Эйлера однородных функций — было проинтегрировано Эйлером с использованием геометрии пространства струй 1-го порядка.

1.1. Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $m+n$ , где  $m > 0$  — фиксированное натуральное число. Для каждого гладкого подмногообразия  $N \subset M$  коразмерности  $m$  через  $[N]_x^k$  обозначим  $k$ -струю этого подмногообразия в точке  $x \in N$ . Пусть  $J_x^k(M, m)$  — пространство всех  $k$ -струй подмногообразий коразмерности  $m$  в фиксированной точке  $x \in M$ , а  $J^k(M, m) = \bigcup_{x \in M} J_x^k(M, m)$  — много-

образии всех  $k$ -струй. Редукция  $k$ -струи  $[N]_x^k$  к  $s$ -струе  $[N]_x^s$  при  $k > s$  порождает проекции  $\pi_{k,s}: J^k(M, m) \rightarrow J^s(M, m)$ . Положим  $\pi_{k,0} = \pi_k$  и  $J^0(M, m) = M$ .

Если многообразие  $M$  является тотальным пространством гладкого расслоения  $\alpha: M = E(\alpha) \rightarrow B$ , то через  $J^k(\alpha)$  обозначим многообразие всех  $k$ -струй локальных сечений этого расслоения. отождествляя (локальные) сечения  $h: B \rightarrow M$  с их графиками — подмногообразиями в  $M$  вида  $h(B)$ , получим вложение  $J^k(\alpha) \subset J^k(E(\alpha), m)$ , где  $m = \dim \alpha$ . Естественные проекции  $\alpha \circ \pi_k: J^k(\alpha) \rightarrow B$  обозначим через  $\alpha_k$ . В том случае, когда расслоение  $\alpha$  является векторным, таковыми же являются и все расслоения  $\alpha_k$ ,  $k \geq 0$ . Проекции  $\pi_{k,s}$  определяют морфизмы этих векторных расслоений, а при  $s = k-1$  имеют место следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \alpha \otimes S^k \tau^* \rightarrow \alpha_k \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} \alpha_{k-1} \rightarrow 0,$$

в которых через  $S^k \tau^*$  обозначена  $k$ -я симметрическая степень кокасательного расслоения  $\tau^*: T^*B \rightarrow B$ .

1.2. Имея в виду описание в общем случае слоев проекций  $\pi_{k,k-1}: J^k(M, m) \rightarrow J^{k-1}(M, m)$ , рассмотрим действие псевдогруппы  $G(M)$  локальных диффеоморфизмов многообразия  $M$  в пространстве  $J^k(M, m)$ . Обозначим через  $G_{x,y}^k$  — множество всех  $k$ -струй  $[\varphi]_{x,y}^k$  локальных диффеоморфизмов  $\varphi: M \rightarrow M$ , переводящих точку  $x$  в точку  $y$ ,  $\varphi(x) = y$ . Композиция локальных диффеоморфизмов порождает спаривание:

$$G_{y,z}^k \times G_{x,y}^k \rightarrow G_{x,z}^k, \quad [\psi]_{y,z}^k \times [\varphi]_{x,y}^k \mapsto [\psi \circ \varphi]_{x,z}^k,$$

которое при условии, что  $x=y=z$ , определяет структуру групп в пространстве  $G_{x,x}^k = G_x^k$ .

Очевидно, что  $G_x^0 = \{e\}$ , а  $G_x^1 = \text{GL}(T_x M)$ .

Естественные проекции  $\pi_{k,k-1}: G_x^k \rightarrow G_x^{k-1}$  являются эпиморфизмами групп, ядра которых  $H_x^k$  при  $k \geq 2$  — абелевы группы, изоморфные тензорным произведениям  $S^k T_x^* \otimes T_x$ . Здесь через  $T_x = T_x M$  и  $T_x^* = T_x^* M$  обозначены касательное и кокасательное пространства многообразия  $M$ .

Таким образом, при  $k \geq 2$  группы  $G_x^k$  получают последовательными расширениями полной линейной группы посредством абелевых.

Группа  $G_x^k$  естественным образом действует в пространстве  $k$ -струй  $J_x^k(M, m)$ : если  $[\varphi]_{x, x}^k \in G_x^k$ ,  $[N]_x^k \in J_x^k(M, m)$ , то  $[\varphi]_{x, x}^k \times ([N]_x^k) = [\varphi(N)]_x^k$ . При этом действию ядро  $H_x^k$  действует транзитивно на слоях  $F(x_{k-1})$  проекции  $\pi_{k, k-1}: J^k(M, m) \rightarrow J^{k-1}(M, m)$  над элементами  $x_{k-1} = [N]_x^{k-1} \in J^{k-1}(M, m)$ . Стационарной подгруппой (в  $H_x^k$ ) элемента  $[N]_x^k \in F(x_{k-1})$  при таком действии в случае, когда  $k \geq 2$ , является подпространство

$$(\text{Ann } T_x N) \circ S^{k-1} T_x^* \otimes T_x + S^k T_x^* \otimes T_x N,$$

где через  $(\text{Ann } T_x N) \circ S^{k-1} T_x^*$  обозначено симметрическое произведение аннулятора  $\text{Ann } T_x N$  и пространства  $S^{k-1} T_x^*$ .

Это замечание показывает, что слои  $F(x_{k-1})$  при  $k \geq 2$  являются однородными пространствами относительно действия связной абелевой группы  $H_x^k$  и тем самым несут аффинную структуру, ассоциированную с векторным пространством  $S^k(T_x^* N) \otimes \nu_x$ , где через  $\nu_x$  обозначено нормальное подпространство к подмногообразию  $N: \nu_x = T_x M / T_x N$ .

1.3. Каждый локальный диффеоморфизм  $\varphi \in G(M)$  естественным образом поднимается до локального диффеоморфизма  $\varphi^{(k)}: J^k(M, m) \rightarrow J^k(M, m)$ , где  $\varphi^{(k)}([\varphi(N)]_x^k) = [\varphi(N)]_{\varphi(x)}^k$ . При этом  $\varphi^{(0)} = \varphi$ , а поднятия  $\varphi^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ , согласованы с проекциями  $\pi_{k, s}$ :  $\pi_{k, s} \circ \varphi^{(k)} = \varphi^{(s)} \circ \pi_{k, s}$ ,  $k > s$ . Очевидно, что диффеоморфизмы  $\varphi^{(k)}$  при  $k \geq 2$  сохраняют описанную выше аффинную структуру. В случае, когда  $k=1$ , слои  $F(x)$  расслоения  $\pi_{1, 0}$  отождествляются с грассмановыми многообразиями  $n$ -мерных подпространств в касательном пространстве  $T_x M$ ,  $F(x) = G_n(T_x) \simeq G_n(\mathbb{R}^{n+m})$ , а автоморфизмы  $\varphi^{(1)}$  — суть линейные коллинеации этих многообразий, порожденные дифференциалами  $\varphi_{*, x}$ .

Следующая теорема описывает геометрическую структуру расслоений струй подмногообразий.

Теорема. Расслоения струй  $\pi_{k, k-1}: J^k(M, m) \rightarrow J^{k-1}(M, m)$  при  $k \geq 2$  являются аффинными. При этом слой  $F(x_{k-1})$  над элементом  $x_{k-1} = [N]_x^{k-1}$  является аффинным пространством, с которым ассоциировано векторное пространство  $S^k(T_x^* N) \otimes \nu_x$ . Поднятия  $\varphi^{(k)}$  локальных диффеоморфизмов  $\varphi \in G(M)$  в пространства  $J^k(M, m)$  при  $k \geq 2$  являются аффинными автоморфизмами, а при  $k=1$  — линейными коллинеациями грассмановых многообразий.

Дополнение. Если многообразие  $M$  дополнительно снабжено контактной (или симплектической) структурой, а  $R^k(M)$  — многообразие всех  $k$ -струй лежандровых (соответственно, лагранжевых) подмногообразий в  $M$ , то рассматривая вместо псевдогруппы  $G(M)$  соответственно псевдогруппу контактных или симплектических локальных диффеоморфизмов и

действуя, как и выше, получим, что при  $k \geq 2$  проекции  $\pi_{k, k-1} : R^k(M) \rightarrow R^{k-1}(M)$  являются аффинными расслоениями, слои которых над точками  $[N]_{x^{k-1}}$  ассоциированы с векторными пространствами  $S^{k+1}(T_x^*N) \otimes T_x M / C_x$  в контактном случае, где  $C_x$  — контактная плоскость в точке  $x \in M$ , и с  $S^{k+1}(T_x^*N)$  — в симплектическом случае. Естественные поднятия контактных (соответственно, симплектических) локальных диффеоморфизмов в  $R^k(M)$  являются при  $k \geq 2$  аффинными автоморфизмами.

1.4. Рассмотрим некоторые специализации приведенной общей конструкции.

(1) Пусть  $\alpha : M = E(\alpha) \rightarrow B$  — гладкое расслоение. Тогда, отождествляя локальные сечения этого расслоения с подмногообразиями в  $M$ , трансверсальными слоям, получим вложения  $\kappa_h : J^h(\alpha) \hookrightarrow J^h(M, m)$ , где  $m = \dim \alpha$ . Условия трансверсальности — суть условия на 1-струю, поэтому слои проекций  $\pi_{k, k-1} : J^k(\alpha) \rightarrow J^{k-1}(\alpha)$  при  $k \geq 2$  совпадают со слоями общей проекции  $\pi_{k, k-1} : J^k(M, m) \rightarrow J^{k-1}(M, m)$  и тем самым наследуют аффинную структуру [5], [33]. Поднятия локальных автоморфизмов расслоения  $\alpha$  являются автоморфизмами этой структуры.

(2) Будем дополнительно считать, что расслоение  $\alpha$  является векторным. В этом случае расслоения  $\pi_{k, k-1} : J^k(\alpha) \rightarrow J^{k-1}(\alpha)$  также являются векторными, а определяемая векторной аффинная структура совпадает с описанной выше. Имея это в виду, опишем такое покрытие многообразия  $J^h(M, m)$  открытыми множествами вида  $J^h(\alpha)$ , которое бы сохраняло аффинные структуры и тем самым давало бы удобный способ реализации произвольных аффинных структур. С этой целью для каждого элемента  $x_h = [N]_{x^h} \in J^h(M, m)$  рассмотрим трубчатую окрестность  $\mathcal{O}$  подмногообразия  $N \subset M$  и нормальное расслоение  $\alpha : \mathcal{O} = E(\alpha) \rightarrow N$ . Тогда образ естественного вложения  $\kappa_h : J^h(\alpha) \hookrightarrow J^h(M, m)$  покрывает некоторую окрестность элемента  $x_h$ , а аффинная структура на  $J^h(M, m)$  в этой окрестности индуцируется линейной.

Описанная конструкция аналогична построению аффинных карт в проективном пространстве. Имея в виду эту аналогию, назовем вложения  $\kappa_h : J^h(\alpha) \hookrightarrow J^h(M, m)$  аффинными картами на многообразии  $k$ -струй.

(3) Для тривиального расслоения  $\alpha : M \times N \rightarrow M$  многообразие  $J^h(\alpha)$  совпадает с многообразием  $J^h(M, N)$   $k$ -струй гладких отображений из  $M$  в  $N$ . Описанная выше аффинная структура является, в частности, инвариантом лево-правого действия.

## § 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАРТАНА

Это распределение, послужившее источником теории дифференциальных форм, позволяет внутренним образом выделять среди всевозможных подмногообразий пространства струй

те, которые отвечают решениям дифференциальных уравнений. Иначе говоря, распределение Картана задает «условия интегрируемости» в пространстве струй. Наличие этого распределения позволяет проблему интегрируемости дифференциальных уравнений переформулировать как некоторую дифференциально-геометрическую задачу. Распределение Картана является естественным обобщением классической контактной структуры, а определяемая им геометрия — продолжением контактной геометрии. Многие понятия теории дифференциальных уравнений (такие как: решения, симметрии, законы сохранения, ударные волны и др.) естественно формулируются в терминах возникающей геометрии.

**2.1. Распределение Картана.** Каждое подмногообразие  $N \subset M$ ,  $\text{codim } N = m$ , определяет подмногообразие  $j_k(N) \subset J^k(M, m)$   $k$ -струйное продолжение  $N$ , где  $j_k(N) = \{[N]_x^k, \forall x \in N\}$ . Аналогично, каждое локальное сечение  $h: B \rightarrow E(\alpha)$  расслоения  $\alpha$  определяет локальное сечение  $j_k(h): B \rightarrow J^k(\alpha)$  расслоения  $\alpha_k: j_k(h): x \rightarrow [h]_x^k, \forall x \in B$ . Назовем *интегрируемыми* такие подмногообразия  $L \subset J^k(M, m)$  (соответственно, сечения  $\theta: B \rightarrow J^k(\alpha)$ ), которые имеют вид  $L = j_k(N)$  ( $\theta = j_k(h)$ ) для некоторого подмногообразия  $N$  (или сечения  $h$ ). Если  $k \neq 0$ , то, конечно, не все подмногообразия интегрируемы. Имея в виду выделение таких подмногообразий, рассмотрим следующую конструкцию.

Каждый элемент  $x_{k+1} = [N]_x^{k+1} \in J^{k+1}(M, m)$  определяет подпространство  $L(x_{k+1}) \subset T_{x_k}(J^k(M, m))$ , касательное к подмногообразию  $j_k(N)$  в точке  $x_k = [N]_x^k$ . Пусть  $C(x_k) \subset T_{x_k}(J^k(M, m))$  — подпространство, натянутое на объединение всевозможных подпространств вида  $L(x'_{k+1})$  при условии, что элементы  $x'_{k+1}$  пробегают весь слой  $F(x_k)$ . Иначе говоря, подпространство  $C(x_k)$  является линейной оболочкой объединения касательных пространств к интегрируемым многообразиям, проходящим через точку  $x_k$ .

Подпространства  $C(x_k)$ , также как и определяемое ими распределение  $\mathcal{C}: x_k \mapsto C(x_k)$  на многообразии  $k$ -струй  $J^k(M, m)$ , назовем *картановскими*.

Аналогично строится распределение Картана на многообразии  $J^h(\alpha)$ . Более того, если  $\kappa: E(\alpha) \rightarrow N \subset M$ ,  $\kappa^{(h)}: J^h(\alpha) \subset J^h(M, m)$  — аффинная карта, то отображение  $\kappa^{(h)}$  переводит распределение Картана на  $J^h(M, m)$  в распределение Картана на  $J^h(\alpha)$ . Используя этот факт, можно ограничиться рассмотрением распределений Картана на многообразиях вида  $J^h(\alpha)$ , где  $\alpha$  — гладкое векторное расслоение.

**Пример.** Многообразие  $J^1(M, 1)$  естественным образом отождествляется с проективизацией кокасательного расслоения  $\tau^*: T^*M \rightarrow M$ . Распределение Картана на нем — стандартная

контактная структура. Аффинные карты, в данном случае, — это многообразия 1-струй гладких функций  $J^1(\mathbf{1})$  с естественной контактной структурой.

Здесь и далее через  $\mathbf{1}$  обозначается тривиальное линейное расслоение  $B \times \mathbb{R} \rightarrow B$ .

Непосредственно из определения картановского подпространства  $C(x_k)$  следует, что дифференциал проекции  $\pi_{k, k-1}$  отображает это подпространство на  $L(x_k)$ . Более того, справедливо равенство  $(\pi_{k, k-1})_*^{-1}(L(x_k)) = C(x_k)$ , которое дает альтернативное определение распределения Картана. Иначе говоря, картановское подпространство  $C(x_k)$  можно представить в виде прямой суммы подпространств  $L(x_{k+1})$ ,  $\forall x_{k+1} \in F(x_k)$ , и  $T_{x_k}(F(x_{k-1}))$ ,  $x_{k-1} = \pi_{k, k-1}(x_k)$ .

Подмногообразия вида  $j_k(N) \subset J^k(M, m)$  являются интегральными многообразиями распределения Картана без вырождения проектирующимися в многообразии  $M$ . Верно и обратное утверждение: каждое интегральное многообразие  $L$  распределения Картана размерности  $n$ , для которого отображение  $\pi_{k, 0}: L \rightarrow M$  является собственным вложением, — интегрируемо.

**2.2. Формы Картана.** Пусть  $\alpha: E(\alpha) \rightarrow B$  — гладкое расслоение, а  $\Lambda_0^i(J^k\alpha)$  — модуль дифференциальных  $\alpha_k$ -горизонтальных  $i$ -форм на многообразии  $k$ -струй  $J^k(\alpha)$ . Оператор внешнего дифференцирования  $d: \Lambda^i(B) \rightarrow \Lambda^{i+1}(B)$  на многообразии  $B$  порождает оператор полного дифференцирования  $\hat{d}: \Lambda_0^i(J^k\alpha) \rightarrow \Lambda_0^{i+1}(J^{k+1}\alpha)$ , значение которого на  $i$ -форме  $\omega \in \Lambda_0^i(J^k\alpha)$  определяется следующим соотношением универсальности

$$j_{k+1}^*(h)(\hat{d}\omega) = d(j_k^*(h)(\omega)),$$

справедливым для всех локальных сечений  $h: B \rightarrow E(\alpha)$ .

Оператор  $\hat{d}$  является дифференцированием степени 1 градуированной алгебры  $\Lambda_0^*(J^k\alpha)$  со значениями в  $\Lambda_0^*(J^{k+1}\alpha)$ , а  $\hat{d}^2 = 0$ .

Каждой функции  $f \in C^\infty(J^{k-1}\alpha)$  можно сопоставить два дифференциала: внешний  $df$  и полный  $\hat{d}f$ . Их разность

$$U(f) = \pi_{k, k-1}^*(df) - \hat{d}f \in \Lambda^1(J^k\alpha).$$

называется *формой Картана*, отвечающей функции  $f$ .

Значение этой формы на векторе  $X \in T_{x_k}(J^k\alpha)$  вычисляется следующим образом. Представим касательное пространство  $T_{x_{k-1}}(J^{k-1}\alpha)$  в виде прямой суммы горизонтального пространства  $L(x_k)$  и вертикального пространства  $T_{x_k}^v$  — пространства, касательного к слою проекции  $\alpha_k$ . Соответственно этому разложению вектор  $(\pi_{k, k-1})_*(X)$  можно представить в виде  $X_0 + X^v$ , где  $X_0 \in L(x_k)$ ,  $X^v \in T_{x_k}^v$ . В этих обозначениях справедливо равенство  $U(f)(X) = X^v(f)$ .

Теорема ([5]). Распределение на многообразии  $J^k(\alpha)$ , определяемое нулями 1-форм Картана  $U(f)$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^{k-1}\alpha)$ , совпадает с распределением Картана.

**2.3. Метасимплектическая структура.** Оператор  $U: C^\infty(J^{k-1}\alpha) \rightarrow \Lambda^1(J^k\alpha)$ , сопоставляющий функции  $f$  форму Картана  $U(f)$ , является  $C^\infty(B)$ -линейным дифференцированием над отображением  $\alpha_{k,k-1}^*: U(fg) = fU(g)$ , если  $f \in C^\infty(B)$ , и  $U(fg) = fU(g) + gU(f)$ ,  $\forall f, g \in C^\infty(J^{k-1}\alpha)$ .

Имея в виду описание касательных подпространств к интегральным многообразиям распределения Картана, рассмотрим ограничения дифференциалов форм Картана на подпространства  $C(x_k)$ . С этой целью фиксируем элемент  $x_k \in J^k(\alpha)$  и определим оператор

$$\Omega_{x_k}: C^\infty(J^{k-1}\alpha) \rightarrow \Lambda^2(C^*(x_k)),$$

где  $\Omega_{x_k}(f)(v_1, v_2) = dU(f)(v_1, v_2)$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^{k-1}\alpha)$ ;  $v_1, v_2 \in C(x_k)$ .

Из свойств оператора  $U$  следует, что  $\Omega_{x_k}(fg) = f(x_{k-1})\Omega_{x_k}(g) + g(x_{k-1})\Omega_{x_k}(f)$ . Поэтому оператор  $\Omega_{x_k}$  определяет оператор  $\tilde{\Omega}_{x_k}: T_{x_{k-1}}^* \rightarrow \Lambda^2(C(x_k))$ , где  $\tilde{\Omega}_{x_k}(\lambda) = \Omega_{x_k}(f)$ ,  $\lambda = d_{x_{k-1}}f$ ,  $f(x_{k-1}) = 0$ . При этом очевидно, что  $\Omega_{x_k}(\lambda) = 0$ , если  $\lambda \in \text{Im } \alpha_{k-1, k-2}^*$ . А так как  $T_{x_{k-1}}^* / \text{Im } \alpha_{k-1, k-2}^* = (T_{x_{k-1}}(F(x_{k-2})))^*$ , то отображение  $\tilde{\Omega}_{x_k}$  определяет оператор

$$\Omega: T_{x_{k-1}}^*(F(x_{k-2})) \rightarrow \Lambda^2(C^*(x_k)),$$

который мы назовем *метасимплектической структурой* на картановском пространстве  $C(x_k)$ .

Если  $\alpha$  — векторное расслоение, то  $T_{x_{k-1}}(F(x_{k-2})) = S^{k-1}T_x^* \otimes \alpha_x$  и тем самым метасимплектическая структура здесь — это оператор

$$\Omega: \alpha_x^* \otimes S^{k-1}T_x \rightarrow \Lambda^2(C^*(x_k)).$$

Прежде чем вычислять значения этого оператора, заметим что для каждого ковектора  $\lambda \in T_{x_{k-1}}^*(F(x_{k-2}))$  внешняя 2-форма  $\Omega_\lambda = \Omega(\lambda) \in \Lambda^2(C^*(x_k))$  обращается в нуль на подпространствах  $L(x_{k+1})$ ,  $\forall x_{k+1} \in F(x_k)$ , и  $T_{x_k}(F(x_{k-1}))$ . Поэтому, в силу разложения  $C(x_k) = L(x_{k+1}) \oplus T_{x_k}(F(x_{k-1}))$ , для вычисления метасимплектической структуры  $\Omega$  достаточно определить значение 2-формы  $\Omega_\lambda$  на паре векторов  $X \in L(x_{k+1})$ ,  $Y \in T_{x_k}(F(x_{k-1}))$ . Воспользовавшись аффинной структурой, отождествим касательное пространство  $T_{x_k}(F(x_{k-1}))$  с векторным пространством  $S^k T_x^* \otimes \nu_{x_0}$ , где  $x_0 = \alpha_{k,0}(x_k)$ ,  $\nu_{x_0}$  — касательное пространство к слою  $\alpha(x)$  в точке  $x_0$ , а пространство  $L(x_{k+1})$  — с касательным пространством  $T_{x_0}$ . При этих отождествлениях для векторов  $X \in T_{x_0}$ ,  $Y \in S^k T_x^* \otimes \nu$ ,

$\lambda \in S^{k-1}T_x \otimes v^*$  имеем:

$$\Omega_\lambda(X, Y) = \langle \lambda, X \lrcorner \delta Y \rangle, \quad (1)$$

где через  $\delta: S^k T_x^* \otimes v \rightarrow T_x^* \otimes S^{k-1} T_x^* \otimes v$  обозначен  $\delta$ -оператор Спенсера.

Используя эту формулу, нетрудно описать подпространство вырождения внешней 2-формы  $\Omega_\lambda$ . А именно,

$$\text{Ker } \Omega_\lambda = \{ \theta \in S^k T_x^* \otimes v \subset C(x_k), \delta \theta \in T_x^* \otimes g_\lambda \}, \quad (2)$$

где  $g_\lambda = \text{Ker } \lambda = \{ \gamma \in S^{k-1} T_x^* \otimes v, \langle \lambda, \gamma \rangle = 0 \}$ .

Таким образом, подпространство вырождения  $\Omega_\lambda$  совпадает с 1-м продолжением символа  $g_\lambda \subset S^{k-1} T_x^* \otimes v$ .

**2.4. Изотропные подпространства.** Скажем, что векторы  $X, Y \in C(x_k)$  находятся в *инволюции* относительно метасимплектической структуры, если  $\Omega_\lambda(X, Y) = 0$ , для всех тензоров  $\lambda \in S^{k-1} T_x \otimes v^*$ .

Подпространство  $E \subset C(x_k)$ , в котором каждая пара векторов  $X, Y \in E$  находится в инволюции, назовем *изотропным*.

**Примеры.** 1) Векторы  $X, Y \in L(x_{k+1}) \subset C(x_k)$  находятся в инволюции, а  $L(x_{k+1})$  тем самым — изотропное подпространство.

2) Векторы  $\theta, \eta \in S^k T_x^* \otimes v \subset C(x_k)$  находятся в инволюции;  $T_{x_k}(F(x_{k-1})) = S^k T_x^* \otimes v$  — изотропное подпространство.

3) Пусть  $\theta \in S^k T_x^* \otimes v, X \in L(x_{k+1}) \simeq T_x$ . Тогда, в силу формулы (1), векторы  $X, \theta$  находятся в инволюции в том и только том случае, когда вектор  $X$  определяет направление вырождения симметрического тензора  $\theta$ , т. е.  $X \lrcorner \theta = 0$ .

4) Фиксируем подпространство  $\mathcal{U} \subset T_x^*$  и, пользуясь разложением  $C(x_k) = L(x_{k+1}) \oplus S^k T_x^* \otimes v$  и отождествлением  $\alpha_{h*}: L(x_{k+1}) \xrightarrow{\sim} T_{x_1}$ , определим подпространство  $E(x_{k+1}, \mathcal{U}) \subset C(x_k)$ , которое натянуто на векторы вида  $X \oplus \theta$ , где  $X \in \text{Ann } \mathcal{U} \subset T_x$ , а  $\theta \in S^k \mathcal{U} \otimes v \subset S^k T_x^* \otimes v$ . Тогда, в силу формулы (1), подпространство  $E(x_{k+1}, \mathcal{U})$  — изотропно.

Скажем, что  $E \subset C(x_k)$  — *максимально изотропное подпространство*, если  $E$  не является собственным подмножеством никакого другого изотропного подпространства.

Следующее предложение дает полное описание максимальных изотропных подпространств.

**Предложение.** Каждое максимальное изотропное подпространство  $E \subset C(x_k)$  имеет вид  $E = E(x_{k+1}, \mathcal{U})$  для некоторого подпространства  $\mathcal{U} \subset T_x^*$ . При этом подпространство  $\mathcal{U}$  однозначно определяется пространством  $E$ ;  $\mathcal{U} = \text{Ann } \alpha_{h*}(E)$ .

**Следствие.** Пусть  $E \subset C(x_k)$  — изотропное пространство, для которого отображение  $\alpha_{h*}: E \rightarrow T_x$  — изоморфизм. Тогда  $E$  — максимальное изотропное подпространство и  $E = L(x_{k+1})$  для некоторого элемента  $x_{k+1} \in F(x_k)$ .

### § 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Введение интегральных многообразий позволяет определить обобщенное, с геометрической точки зрения, решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такое обобщение во многом аналогично подходу к интегрированию уравнений первого порядка, предложенному в прошлом веке Софусом Ли. Необходимость обобщений такого рода в настоящее время стала очевидной после работ В. П. Маслова по асимптотическим методам.

**3.1. Дифференциальные уравнения.** Системой дифференциальных уравнений порядка  $\leq k$ , заданной на подмногообразиях коразмерности  $t$  многообразия  $M$ , называется гладкое подмногообразие  $\mathcal{E} \subset J^k(M, t)$ . Решением такой системы дифференциальных уравнений является гладкое подмногообразие  $N \subset M$ ,  $k$ -струйное расширение которого лежит в многообразии  $\mathcal{E}$ ,  $j_k(N) \subset \mathcal{E}$ .

Пусть  $\mathcal{E}(\mathcal{E})$  — ограничение распределения Картана на подмногообразии  $\mathcal{E}$ ;  $\mathcal{E}(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \ni x_k \rightarrow C(x_k) \cap T_{x_k}(\mathcal{E}) = C(\mathcal{E}, x_k)$ . Скажем, что точка  $a \in \mathcal{E}$  — *регулярная точка* системы дифференциальных уравнений, если в некоторой окрестности этой точки функция  $x_k \mapsto \dim C(\mathcal{E}, x_k)$  постоянна. В противном случае точку  $a \in \mathcal{E}$  назовем *особой*.

Если все точки системы регулярны, то семейство подпространств  $\mathcal{E}(\mathcal{E})$  определяет распределение на многообразии  $\mathcal{E}$ , а решения этой системы — суть интегральные многообразия распределения  $\mathcal{E}(\mathcal{E})$ , имеющие размерность  $n$  и проектирующиеся без вырождения в многообразии  $M$ . Отказавшись от последнего условия, приходим к следующему геометрическому обобщению понятия решения. Решения системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  — это  $n$ -мерные интегральные многообразия распределения  $\mathcal{E}(\mathcal{E})$ .  $n$ -мерные интегральные многообразия распределения Картана назовем просто *интегральными*.

Таким образом, решения системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  — это интегральные многообразия  $L \subset J^k(M, t)$ , лежащие в подмногообразии  $\mathcal{E}$ . Если  $L = j_k(N)$ , то такое решение назовем *классическим* или *гладким*, в противном случае, т. е. когда отображение  $\pi_{k,0} : L \rightarrow M$  не является собственным вложением, многообразие  $L$  назовем *обобщенным* (в геометрическом смысле) *решением*. Аналогично определяются аффинные варианты приведенных выше конструкций.

**Примеры.** 1) Интегральные многообразия в контактном многообразии  $J^1(M, 1)$  суть лежандровы многообразия.

2) Всякое  $n$ -мерное подмногообразие  $L \subset F(x_{k-1})$  является интегральным.

3) Естественным обобщением предыдущего примера является следующая конструкция. Пусть  $N_0$  — некоторое подмногообразие в  $N$ , а  $N \subset M$ ,  $\text{codim } N = t$ . Обозначим через  $N_0^{(k-1)} \subset j_{k-1}(N)$

подмногообразии, образованное  $(k-1)$ -струями  $[N]_x^{k-1}$  при условии, что точка  $x$  пробегает все подмногообразие  $N_0$ . И пусть  $\hat{N}_0(N)$  — множество таких элементов  $x_k \in J^k(M, m)$ , для которых  $\pi_{k, k-1}(x_k) \in N_0^{(k-1)}$ , а подпространство  $L(x_k)$  содержит касательную плоскость к подмногообразию  $N_0^{(k-1)}$  в точке  $x_{k-1}$ . Тогда касательные плоскости к подмногообразию  $\hat{N}_0(N)$  совпадают с описанными в предыдущем параграфе максимальными инволютивными подпространствами. Поэтому  $\hat{N}_0(N)$  — максимальное интегральное многообразие распределения Картана, а следовательно каждое  $n$ -мерное подмногообразие  $L \subset \hat{N}_0(N)$  является интегральным.

4) В случае, когда отображение  $\pi_{k,0}: L \rightarrow M$  не имеет особенностей, т. е. когда дифференциал  $(\pi_{k,0})_*$  является вложением, образ  $\pi_{k,0}(L)$  является погруженным подмногообразием в  $M$ . Для таких подмногообразий  $N \rightarrow M$  корректно определено продолжение  $j_k(N) \subset J^k(M, m)$ , которое является интегральным подмногообразием при  $k \geq 1$ .

**3.2. Символы и продолжения.** Продолжением порядка  $l \geq 0$  системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^k(M, m)$  назовем подмножество  $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(M, m)$ , образованное такими элементами  $[N]_x^{k+l}$ ,  $k$ -струйные продолжения которых  $j_k(N)$  касаются подмногообразия  $\mathcal{E}$  в точке  $[N]_x^k \in \mathcal{E}$  с порядком  $\geq l$ . Систему дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  назовем *формально интегрируемой*, если для всех  $l \geq 0$  продолжения  $\mathcal{E}^{(l)}$  — гладкие подмногообразия, а проекции  $\pi_{k+l+1, k+l}: \mathcal{E}^{(l+1)} \rightarrow \mathcal{E}^{(l)}$  и  $\pi_{k,0}: \mathcal{E} \rightarrow M$  — гладкие расслоения.

Условия формальной интегрируемости естественно формулируются в терминах символов дифференциальных уравнений.

Пусть  $\mathcal{E} \subset J^k(M, m)$  — система дифференциальных уравнений. Символом этой системы в точке  $x_k = [N]_x^k \in \mathcal{E}$  называется подпространство

$$g(x_k) = T_{x_k}(\mathcal{E}) \cap T_{x_k}(F(x_{k-1})) \subset S^k(T_x^*N) \otimes v_x.$$

Если все продолжения  $\mathcal{E}^{(l)}$  — гладкие подмногообразия, то их символы  $g^{(l)}(x_k) \subset S^{k+l}(T_x^*N) \otimes v_x$  в точках  $x_{k+l} = [N]_x^{k+l}$  являются  $l$ -ми продолжениями символа  $g(x_k)$ . Поэтому  $\delta(g^{(l+1)}(x_k)) \subset T_x^*N \otimes g^{(l)}(x_k)$  и тем самым в каждой точке  $x_k \in \mathcal{E}$  определен  $\delta$ -комплекс Спенсера

$$0 \rightarrow g^{(l)}(x_k) \xrightarrow{\delta} g^{(l-1)}(x_k) \otimes T_x^*N \xrightarrow{\delta} g^{(l-2)}(x_k) \otimes \Lambda^2(T_x^*N) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Когомологии этого комплекса в члене  $g^{(j)}(x_k) \otimes \Lambda^i(T_x^*N)$  обозначим через  $H^{j,i}(\mathcal{E}, x_k)$ . Они называются  $\delta$ -когомологиями Спенсера системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  в точке  $x_k \in \mathcal{E}$ .

Скажем, что система дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^h(M, m)$   $r$ -ациклична, если  $H^{j,i}(\mathcal{E}, x_k) = 0$  для всех значений  $0 \leq i \leq r, j \geq 0, \forall x_k \in \mathcal{E}$ .  $n$ -ацикличные системы называются *инволютивными*. Используя аффинные карты и результаты Голдшмидта [32], приходим к следующему критерию формальной интегрируемости.

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{E} \subset J^h(M, m)$  — 2-ацикличная система дифференциальных уравнений, для которой проекции  $\pi_{k+1,k} : \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \mathcal{E}$  и  $\pi_{k,0} : \mathcal{E} \rightarrow M$  являются гладкими расслоениями. Тогда  $\mathcal{E}$  — формально интегрируемая система дифференциальных уравнений.

**3.3. Интегральные многообразия с особенностями.** Пусть  $L \subset J^h(M, m)$  — некоторое интегральное многообразие, а

$$\Sigma L = \{y \in L \mid \text{Ker}(\pi_{k,0})_{*,y} \neq 0\}.$$

— множество особых точек отображения  $\pi_{k,0} : L \rightarrow M$ .

Разложим  $L \setminus \Sigma L = \bigcup L_r$  на связные компоненты  $L_r$ . Для каждой такой компоненты отображение  $\pi_{k,0} : L_r \rightarrow M$  является погружением и тем самым  $L_r$  можно представить себе как график  $k$ -го продолжения погруженного подмногообразия  $N_r, L_r = j_k(N_r)$ . Если, кроме того, особое множество  $\Sigma L$  имеет внутренние точки, то почти в каждой такой точке (локально)  $L$  является подмногообразием в максимальном интегральном многообразии вида  $\dot{N}_0(N)$  (см. пример 3). Образ  $L' = \pi_{k,s}(L) \subset \subset J^s(M, m), k > s$ , произвольного интегрального многообразия  $L \subset J^h(M, m)$  является гладким погруженным интегральным подмногообразием в точках  $x_s \notin \pi_{k,s}(\Sigma L)$  и подмногообразием с «особенностями» в критических точках этого отображения. Рассмотрим этот процесс в обратном порядке. Подмногообразие  $L'$  определяет интегральное многообразие  $L$  во всех неособых точках. А именно, многообразие  $L$  является  $(k-s)$ -м продолжением  $L'$ . В критических точках  $x_s \in \pi_{k,s}(\Sigma L)$  происходит «раздутие» множества  $L'$ , аналогичное  $\sigma$ -процессу. Зафиксируем возникающий тип особенностей. *Интегральным многообразием с особенностями* будем называть такое подмногообразие  $L \subset \subset J^h(M, m)$ , для каждой точки  $x_k \in L$  которого найдется гладкое интегральное многообразие  $\tilde{L} \subset J^{h+s}(M, m); s = s(x_k)$ , образ  $\pi_{k+s,k}(\tilde{L})$  которого совпадает с  $L$  в некоторой окрестности точки  $x_k$ . Будем говорить, что интегральное многообразие  $\tilde{L}$  *униформизирует*  $L$  в окрестности точки  $x_k$ .

Выберем для каждой точки  $x_k$  интегрального многообразия с особенностями  $L$  окрестность  $\mathcal{O}(x_k) \subset J^h(M, m)$  и униформирующее интегральное многообразие  $\tilde{L}_{x_k} \subset J^{h+s}(M, m)$  такое, что  $\pi_{k+s,k}(\tilde{L}_{x_k}) \cap \mathcal{O}(x_k) = L \cap \mathcal{O}(x_k)$ . Пусть  $x'_k \in L$  — другая точка, а интегральное многообразие  $\tilde{L}_{x'_k} \subset J^{h+s'}(M, m)$  униформирует  $L$

в окрестности  $\mathcal{O}(x'_k)$  точки  $x'_k$ . Тогда, если  $y_k \in \mathcal{O}(x_k) \cap \mathcal{O}(x'_k) \cap L$  и в некоторой окрестности этой точки подмножество  $L$  является гладким подмногообразием, а  $y_k$  не является особой точкой отображения  $\pi_{k,0}: L \rightarrow M$ , то проекции  $\pi_{k+s,k+s'}$  при условии, что  $s \geq s'$ , являются локальными диффеоморфизмами между многообразиями  $\tilde{L}_{x_k}$  и  $\tilde{L}_{x'_k}$  всюду, за исключением множества особых точек. Если же в точке  $y_k$  подмножество  $L$  не является гладким подмногообразием, то  $s = s'$ , а подмногообразие  $\tilde{L}_{x_k}$  совпадает с  $\tilde{L}_{x'_k}$  в некоторой окрестности прообраза точки  $y_k$ . Используя это замечание и склеивая униформизирующие многообразия вдоль соответствующих проекций, получим гладкое многообразие  $\hat{L}$ , называемое «раздутием» интегрального многообразия с особенностями  $L$ , вместе с естественным отображением  $\hat{\pi}: \hat{L} \rightarrow L$ , являющимся локальным диффеоморфизмом в неособых точках многообразия  $L$ .

Дальнейшее обобщение понятия решения системы дифференциальных уравнений связано с использованием интегральных многообразий с особенностями. А именно, интегральное многообразие с особенностями  $L \subset J^h(M, t)$  назовем *решением системы дифференциальных уравнений*  $\mathcal{E} \subset J^h(M, t)$ , если для каждой точки  $x_k \in L$  униформизирующее интегральное многообразие  $\tilde{L} \subset J^{h+s}(M, t)$  лежит в  $s$ -м продолжении  $\mathcal{E}^{(s)}$ .

Мы говорим, что решение  $L$  системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  имеет особенность в точке  $x_k \in L$ , если либо (1)  $L$  является гладким подмногообразием в некоторой окрестности точки  $x_k$ , но проекция  $\pi_{k,0}: L \rightarrow M$  имеет в этой точке особенность, либо (2)  $L$  не является гладким подмногообразием в этой точке, но эта особенность разрешается при некотором продолжении.

Отметим, что случай (2) (локально) сводится к (1). Для этого достаточно перейти от системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  к продолжению  $\mathcal{E}^{(1)}$  и рассматривать здесь решения, доставляемые гладкими интегральными подмногообразиями.

**3.4. Характеристики и особенности.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^h(\alpha)$  и пусть  $L \subset \mathcal{E}^{(s)}$  — ее решение. Обозначим через  $\Sigma_L$  множество тех точек, в которых отображение  $\alpha_{k+s}: L \rightarrow B$  имеет особенность Тома — Боардмана типа  $\Sigma_l$ . Касательную плоскость  $T_{x_{k+s}} L \subset C(x_{k+s})$  в точке  $x_{k+s} \in \Sigma_L$ , учитывая приведенное выше описание максимальных изотропных подпространств, можно представить триадой  $(x_{k+s+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , где  $\mathcal{U} \subset T_{x_{k+s}}^*$ ,  $L_0 \subset S^k(\mathcal{U}) \otimes \alpha_{x_{k+s}}$ ,  $T_{x_{k+s}} L = \mathcal{U}^0(x_{k+s+1}) \oplus L_0$ ,  $\dim \mathcal{U} = \dim L_0 = l$ ,  $\mathcal{U} = \text{Ann}(\alpha_{k+s})_* (T_{x_{k+s}} L)$ ,  $\mathcal{U}^0(x_{k+s+1}) \subset L(x_{k+s+1})$  — прообраз  $\text{Ann} \mathcal{U} \subset T_x$  при изоморфизме  $(\alpha_{k+s})_*: L(x_{k+s+1}) \xrightarrow{\sim} T_x$ .

Укажем условия, при выполнении которых система дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  (или ее продолжения) не имеет решений, проходящих через точку  $x_{k+s} \in \mathcal{E}^{(s)}$  и имеющих в данной точке особенности типа  $\Sigma_1$ . Всюду в дальнейшем, если это специально не указано, предполагается, что все продолжения  $\mathcal{E}^{(s)}$  являются гладкими подмногообразиями в  $J^{k+s}(M, m)$ .

Начнем с особенностей типа  $\Sigma_1$ . В этом случае триада  $(x_{k+s+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , определяющая касательную плоскость  $T_{x_{k+s}}(L)$ ,  $x_{k+s} \in \Sigma_1 L$ , содержит две прямые:  $\mathcal{U} \subset T_x^*$  и  $L_0 \subset S^{k+s} \mathcal{U} \otimes \alpha_x$ . Пусть  $\lambda \in T_x^*$ ,  $\lambda \neq 0$ , — образующий вектор прямой  $\mathcal{U}$ , тогда образующая прямой  $L_0$  имеет вид:  $\theta = \lambda^{k+s} \otimes e$ , где  $e \in \alpha_x$ ,  $e \neq 0$ . Из включения  $T_{x_{k+s}} L \subset T_{x_{k+s}} \mathcal{E}$  следует, что  $L_0 \subset g^{(s)}(x_k)$ , и, тем самым, ковектор  $\lambda$  является характеристическим для системы дифференциальных уравнений в точке  $x_k \in \mathcal{E}$ ,  $x_k = \pi_{k+s, k}(x_{k+s})$ .

**Теорема.** Для того чтобы система дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^k(\alpha)$  имела решения  $L$ , проходящие через точку  $x_{k+s}$  и проектирующиеся на подпространство  $\mathcal{U}^0 \subset T_x$ ,  $x_{k+s} \in \Sigma_1 L$ ,  $(\alpha_{k+s})_*(T_{x_{k+s}} L) = \mathcal{U}^0$ ,  $\text{codim } \mathcal{U}^0 = 1$ , необходимо, чтобы образующие прямой  $\mathcal{U} = \text{Ann } \mathcal{U}^0$  являлись характеристиками системы  $\mathcal{E}$  в точке  $x_k$ .

**С л е д с т в и е.** Эллиптические системы дифференциальных уравнений не имеют решений с особенностями типа  $\Sigma_1$ .

Отметим, что, вообще говоря, эллиптические системы могут иметь решения с особенностями типа  $\Sigma_l$ , где  $l \geq 2$ . Так точки ветвления римановых поверхностей дают особенности типа  $\Sigma_2$  для решений системы дифференциальных уравнений Коши—Римана.

**3.5.** Вернемся к общему случаю. Зафиксируем точку  $x_k \in \mathcal{E} \subset J^k(\alpha)$  и тип особенностей  $\Sigma_l$ . Будем говорить, что интегральное многообразие  $L$  проходит через точку  $x_k$  и проектируется на  $\mathcal{U}^0 = \text{Ann } \mathcal{U} \subset T_x$ , где  $\mathcal{U} \subset T_x^*$  — некоторое подпространство,  $\dim \mathcal{U} = l$ , если  $\text{Im } (\alpha_{k+s})_*(T_{x_{k+s}} L) = \mathcal{U}^0$  для некоторой точки  $x_{k+s} \in L$ ,  $x_k = \pi_{k+s, k}(x_{k+s})$ . Приведем условия, при которых система дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  не имеет решений, проходящих через точку  $x_k$  и проектирующихся на  $\mathcal{U}^0$ . С этой целью введем следующие обозначения. Через  $V^{\mathbb{C}}$  будем обозначать комплексификацию векторного (над  $\mathbb{R}$ ) пространства  $V$ . Ковектор  $\lambda \in (T_x^*)^{\mathbb{C}}$ ,  $\lambda \neq 0$ , назовем *комплексно характеристическим* для системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  в точке  $x_k \in \mathcal{E}$ , если  $\lambda^k \otimes e \in (g(x_k))^{\mathbb{C}}$  для некоторого вектора  $e \in \alpha_x^{\mathbb{C}}$ ,  $e \neq 0$ . Для каждого комплексно характеристического ковектора  $\lambda$  через  $K(\lambda) \subset \alpha_x^{\mathbb{C}}$  обозначим подпространство

$$K(\lambda) = \{e \in \alpha_x^{\mathbb{C}}, \lambda^k \otimes e \in (g(x_k))^{\mathbb{C}}\}.$$

Пусть  $P(T_x^*)^c$  — проективизация комплексного касательного пространства, а  $P \text{Char}^c(\mathcal{E}, x_h) \subset P(T_x^*)^c$  — комплексное проективное характеристическое многообразие, порожденное комплексными характеристическими коекторами. В этих обозначениях справедлив следующий результат.

Теорема ([5], [12]). Пусть система дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^k(\alpha)$  и подпространство  $\mathcal{U} \subset T_x^*$  таковы, что

1) линейное подмногообразие  $P(\mathcal{U})^c$  комплексного проективного пространства  $P(T_x^*)^c$  пересекает комплексное проективное характеристическое многообразие  $P \text{Char}^c(\mathcal{E}, x_h)$  в конечном числе точек  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , и

$$2) \quad \sum_{j=1}^r \dim_{\mathbb{C}} K(\lambda_j) < \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}.$$

Тогда существует такое натуральное число  $s_0$ , зависящее от  $\dim \mathcal{U}$ ,  $\dim \alpha$  и порядка  $k$  системы  $\mathcal{E}$ , что все продолжения  $\mathcal{E}^{(s)}$  системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$  при  $s \geq s_0$  не имеют решений, задаваемых гладкими интегральными многообразиями, которые бы проходили через точку  $x_h \in \mathcal{E}$  и проектировались на подпространство  $\mathcal{U}^0$ .

Замечание. 1) Число  $s_0$  можно вычислять ровно так же, как и соответствующее число из  $\delta$ -леммы Пуанкаре.

2) Предположим, что  $P \text{Char}^c(\mathcal{E}, x_h)$  является комплексным проективным многообразием коразмерности  $c$  и степени  $d$ , не лежащем ни в какой гиперплоскости. Тогда, в ситуации общего положения  $r=d$ , если  $c=l-1$ , и  $r=0$ , если  $c>l-1$ . В случае, когда  $c=l-1$ ,  $r=d$ , из условия 2) теоремы получаем, что  $d \leq l-1$ , т. е.  $d \leq c$ . Но (см. [18]) для проективных многообразий, не лежащих ни в какой гиперплоскости, всегда  $d \geq c+1$ . Поэтому, в ситуации общего положения, особенности типа  $\Sigma_l$  на интегральных многообразиях, являющихся решениями системы  $\mathcal{E}$ , при  $l \leq c$ , как правило, не реализуются.

#### § 4. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы установим связь между решениями линейных систем дифференциальных уравнений, являющимися обобщенными в геометрическом смысле, и обобщенными решениями в смысле теории распределений. Основные конструкции этого параграфа (п. 4.3) явились результатом обдумывания канонического оператора Маслова и попытки переноса его в более общую ситуацию. Все расслоения, дифференциальные операторы и уравнения в этом параграфе линейные.

4.1. Формула Грина. Для каждого гладкого векторного расслоения  $\alpha: E(\alpha) \rightarrow B$  через  $\alpha^t: E(\alpha^t) \rightarrow B$  обозначим сопря-

женное ему расслоение:  $\alpha^t = \text{Hom}(\alpha, \Lambda^n \tau^*)$ , где  $\tau^* : T^*B \rightarrow B$  — кокасательное расслоение, а  $n = \dim B$ . Если  $a \in \Gamma(\alpha)$  — гладкое сечение расслоения  $\alpha$ , а  $a^t \in \Gamma(\alpha^t)$  — сечение сопряженного расслоения, то через  $\langle a, a^t \rangle \in \Lambda^n(B)$  будем обозначать дифференциальную  $n$ -форму — значение сечения  $a^t$  на сечении  $a$ . Каждый морфизм  $\sigma : \alpha \rightarrow \beta$  векторных расслоений над многообразием  $B$  порождает сопряженный ему морфизм  $\sigma^t : \beta^t \rightarrow \alpha^t$ , где  $\langle \sigma(a), b^t \rangle = \langle a, \sigma^t(b^t) \rangle$ ,  $\forall a \in \Gamma(\alpha)$ ,  $b^t \in \Gamma(\beta^t)$ . Обозначим через  $\text{Diff}_1(\alpha, \beta)$  модуль (над  $C^\infty(B)$ ) линейных дифференциальных операторов первого порядка, действующих из сечений расслоения  $\alpha$  в сечения расслоения  $\beta$ . Если  $\Delta : \alpha \rightarrow \beta$  и  $\nabla : \beta^t \rightarrow \alpha^t$  — два оператора первого порядка, символы которых  $\sigma_\lambda(\Delta)$  и  $\sigma_\lambda(\nabla)$  на любой дифференциальной 1-форме  $\lambda \in \Lambda^1(B)$  кососопряжены:  $\sigma_\lambda^t(\Delta) + \sigma_\lambda(\nabla) = 0$ , то оператор

$$\gamma(\Delta, \nabla) : \Gamma(\alpha \otimes \beta^t) \rightarrow \Lambda^n(B),$$

где  $\gamma(\Delta, \nabla)(a \otimes b^t) = \langle \Delta(a), b^t \rangle - \langle a, \nabla(b^t) \rangle$ , корректно определен и является линейным дифференциальным оператором 1-го порядка.

Символ этого оператора определяет гомоморфизм  $\omega : \alpha \otimes \beta^t \rightarrow \Lambda^n(B)$  по формуле

$$\sigma_\lambda(\gamma(\Delta, \nabla))(a \otimes b^t) = \lambda \wedge \omega(a \otimes b^t).$$

Тем самым операторы  $\gamma(\Delta, \nabla)$  и  $d \circ \omega$  имеют одинаковый символ, а следовательно различаются на оператор нулевого порядка. Заменяя, если это необходимо, оператор  $\nabla$  на  $\nabla + \nabla'$ , где  $\nabla' \in \text{Hom}(\beta^t, \alpha^t)$ , мы получим для каждого оператора  $\Delta \in \text{Diff}_1(\alpha, \beta)$  единственный оператор  $\Delta^t \in \text{Diff}_1(\beta^t, \alpha^t)$ , называемый сопряженным к оператору  $\Delta$ , для которого  $\gamma(\Delta, \Delta^t) = d \circ \omega$ .

Отметим, что гомоморфизм  $\omega$  однозначно определяется символом оператора  $\Delta$ , поскольку  $\sigma_\lambda(\gamma(\Delta, \nabla))(a \otimes b^t) = \langle \sigma_\lambda(\Delta)(a), b^t \rangle$ . Таким образом,  $\omega = \omega_\Delta$ , а для каждого оператора  $\Delta \in \text{Diff}_1(\alpha, \beta)$  существует единственный сопряженный ему оператор, для которого справедлива формула Грина

$$\langle \Delta(a), b^t \rangle - \langle a, \Delta^t(b^t) \rangle = d\omega_\Delta(a, b^t). \quad (1)$$

На операторы высшего порядка эту формулу можно перенести, разлагая каждый оператор на операторы 1-го порядка. Так, если  $\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2$ , где  $\Delta_1 \in \text{Diff}_2(\alpha, \gamma)$ ,  $\Delta_2 \in \text{Diff}_1(\alpha, \beta)$ , то  $\Delta^t = \Delta_2^t \Delta_1^t$ , а формула Грина имеет вид

$$\langle \Delta(a), b^t \rangle - \langle a, \Delta^t(b^t) \rangle = d\omega_\Delta(a, b^t), \quad (2)$$

где  $\omega_\Delta(a, b^t) = \omega_{\Delta_1}(\Delta_2 a, b^t) + \omega_{\Delta_2}(a, \Delta_1^t b^t)$ .

Каждый оператор  $k$ -го порядка  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$  можно реализовать как композицию операторов  $(k-1)$ -го и 1-го порядков. С этой целью, во-первых, заметим, что оператор  $\Delta$  определяется (и определяется им) морфизм векторных расслоений  $\varphi_\Delta : \alpha_h \rightarrow \beta$ , где  $\varphi_\Delta([h]_x^h) = \Delta(h)(x)$ . А кроме того, расслоение

$\alpha_h$  естественным образом вкладывается в расслоение 1-струй сечений расслоения  $\alpha_{h-1}$ , которое мы будем обозначать через  $\alpha_{h-1,1}$ . Пусть  $F_{h-1}$  — дополнительное расслоение:  $\alpha_{h-1,1} = \alpha_h \oplus \oplus F_{h-1}$ . Тогда, продолжая каждый гомоморфизм  $\varphi_\Delta: \alpha_h \rightarrow \beta$  тривиальным образом на  $F_{h-1}$  и отождествляя полученный гомоморфизм  $\varphi: \alpha_{h-1,1} \rightarrow \beta$  с дифференциальным оператором  $\Delta \in \text{Diff}_1(\alpha_{h-1}, \beta)$ , мы получим представление оператора  $\Delta$  в следующем виде:  $\Delta = \Delta_F \circ j_{h-1}$ , где  $j_{h-1} \in \text{Diff}_{h-1}(\alpha, \alpha_{h-1})$ ,  $j_{h-1}: h \mapsto j_{h-1}(h)$ . Итерируя этот процесс и пользуясь формулой (2), получим формулу Грина для операторов любого порядка. При этом стандартные рассуждения показывают, что оператор  $\Delta^t \in \text{Diff}_h(\beta^t, \alpha^t)$  не зависит от выбора дополнительных подрасслоений  $F_{h-1}, F_{h-2}, \dots$ , а форма Грина  $\omega_\Delta(a, b^t)$  — зависит. Более того, форма Грина определяет бидифференциальный оператор  $\omega_\Delta: a \times b^t \mapsto \omega_\Delta(a, b^t)$   $(k-1)$ -го порядка по каждому аргументу.

**4.2. Формула Грина на расслоениях струй.** Перенесем формулу Грина в расслоения  $\alpha_h$ . Отображение  $\varphi_\Delta: \alpha_h \rightarrow \beta$ , отвечающее оператору  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$ , определяет сечение индуцированного расслоения  $\alpha_h^*(\beta)$ , которое мы по-прежнему будем обозначать через  $\varphi_\Delta$ . В частности, тождественный оператор  $\text{id} \in \text{Diff}_k(\alpha, \alpha)$  определяет сечение  $\rho_k = \varphi_{\text{id}} \in \Gamma(\alpha_h^*(\alpha))$ . Для каждого сечения  $b^t \in \Gamma(\beta^t)$  через  $\langle \varphi_\Delta, b^t \rangle$  обозначим  $\alpha_h$ -горизонтальную  $n$ -форму на многообразии  $J^k(\alpha)$ , значение которой в точке  $x_k \in J^k(\alpha)$ ,  $x_k = [h]_x^k$ , равно  $\langle \Delta(h)(x), b^t(x) \rangle$ . Аналогичным образом форме Грина  $\omega_\Delta$  и сечению  $b^t$  сопоставим  $\alpha_{k-1}$ -горизонтальную  $(n-1)$ -форму  $\omega_\Delta(b^t) \in \Lambda_0^{n-1}(J^{k-1}\alpha)$ , значение которой в точке  $x_{k-1}$  равно  $\omega_\Delta(h, b^t)(x)$ .

В этих обозначениях на многообразии  $J^k(\alpha)$  справедлива формула Грина

$$\langle \varphi_\Delta, b^t \rangle - \langle \rho_k, \Delta^t b^t \rangle = d\omega_\Delta(b^t). \quad (1)$$

Для доказательства этой формулы достаточно ограничить левую и правую части (1) на сечения вида  $j_h(h)$ ,  $\forall h \in \Gamma(\alpha)$ , и воспользоваться формулой Грина (см. (1) из п. 4.1).

**4.3. Обобщенные функции.** Пусть  $L \subset J^k(\alpha)$  — ориентированное интегральное многообразие, для которого проекция  $\alpha_h: L \rightarrow B$  является собственным отображением. Свяжем с этим интегральным многообразием обобщенную функцию  $\chi_L$  класса  $\mathcal{D}'$  на многообразии  $B$ , значение которой на сечении  $a^t \in \Gamma(\alpha^t)$  с компактным носителем дается формулой

$$\chi_L(a^t) = \int_L \langle \rho_k, a^t \rangle. \quad (1)$$

Использование формулы Грина в виде (1) из пункта 4.2 приводит к следующему результату.

Теорема ([13]). Если  $L \subset \mathcal{E}^{(s)} \subset J^{h+s}(\alpha)$  — интегральное многообразие, являющееся обобщенным решением в геометрическом смысле линейной системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^h(\alpha)$ , то  $\kappa_L$  является решением этой системы в смысле обобщенных функций. При этом сингулярный носитель  $\kappa_L$  содержится в критическом множестве  $\alpha_h(\Sigma L)$ .

Дополнения. 1) формулу (1) можно очевидным образом перенести на произвольные интегральные многообразия с особенностями. При этом сформулированная выше теорема останется справедливой.

2) Представим формулу (1) в терминах ветвей интегрального многообразия  $L$ . Предположим, что база  $B$  ориентирована, и пусть  $L \setminus \Sigma L = \bigcup_r L_r$  — разбиение дополнения к особому множеству на компоненты связности. Для каждого блока  $L_r$ , отображения  $\alpha_{h+s} : L_r \rightarrow \mathcal{U}_r = \alpha_{h+s}(L_r)$  являются локальными диффеоморфизмами, а  $L_r$  — графиком  $k$ -струи гладкого многозначного сечения  $h_r$  в области  $\mathcal{U}_r$ . Припишем каждому блоку  $L_r$  знак  $\varepsilon(L_r)$ , равный знаку якобиана отображения  $\alpha_{h+s} : L_r \rightarrow \mathcal{U}_r$ . Пусть  $\Omega \in \Lambda^n(B)$  — форма объема на многообразии  $B$ , а  $a^i = a^* \cdot \Omega$ , где  $a^* \in \Gamma(\alpha^*)$ ,  $\alpha^* = \text{Нот}(\alpha, 1)$ . Тогда формула (1) примет вид:

$$\kappa_L(a^*) = \sum_r \varepsilon(L_r) \int_{\mathcal{U}_r} \langle h_r, a^* \rangle \Omega, \quad (1')$$

где  $\int_{\mathcal{U}_r} \langle h_r, a^* \rangle \Omega$  равен сумме интегралов по ветвям  $h_r$ .

3) Эта формула показывает, каким образом с любым, возможно неориентируемым, интегральным многообразием можно связать обобщенную функцию на  $\Gamma(|\alpha^i|)$ , где через  $|\alpha^i|$  обозначено расслоение, геометрически двойственное к расслоению  $\alpha$  [29]. Условия ориентируемости позволяют корректным образом выбрать знаки  $\varepsilon(L_r)$ . В общем случае это возможно лишь тогда, когда на  $L$  обращается в нуль первый характеристический класс  $\omega$  (см. далее § 9), двойственный циклу  $\Sigma_1$ -особенностей. В случае, когда расслоение  $\alpha$  функториально связано с многообразием  $B$ , например, является расслоением полуформ, функция  $\varepsilon(L_r)$  принимает четыре значения  $\pm 1, \pm i$ . Условия согласования здесь — это тривиальность класса  $\omega$ , вычисленного по mod 4 («условия квантования»). В этом смысле классы  $\omega$  являются обобщениями классов Маслова — Арнольда на произвольные расслоения струй.

4) Решения эллиптических систем дифференциальных уравнений не содержат особенностей типа  $\Sigma_1$ . Поэтому на решениях таких систем класс  $\omega_1^{h-}$  тривиален, а знак  $\varepsilon(L_r)$  может быть выбран тождественно равным 1. Предыдущая теорема, таким образом, утверждает, что сумма ветвей многозначного решения эллиптической системы дифференциальных уравнений является гладким сечением.

## § 5. ОСОБЕННОСТИ, ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕНОСА И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Связь между обобщенными функциями и интегральными многообразиями, указанная выше, а также тот факт, что особенности обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений распространяются вдоль бихарактеристик, позволяет надеяться, что это обстоятельство имеет чисто геометрическую природу. В этом параграфе мы показываем, что это действительно так.

**5.1.  $\mu$ -адические особенности.** Пусть  $B_0 \subset B$  — подмногообразие коразмерности  $t \geq 1$ , а  $\mu = \{f \in C^\infty(B) \mid f|_{B_0} = 0\}$  — идеал, отвечающий этому подмногообразию. Для каждого векторного расслоения  $\alpha: E(\alpha) \rightarrow B$  модуль гладких сечений  $\Gamma(\alpha^0)$  ограничения расслоения  $\alpha$  на подмногообразии  $B_0$  естественным образом может быть отождествлен с фактормодулем  $\Gamma(\alpha)/\mu\Gamma(\alpha)$ . В частности,  $C_\infty(B_0) = C_\infty(B)/\mu$ .

Дальнейшее изложение является переложением общей концепции операторов переноса применительно к  $\mu$ -адической фильтрации [16]. Основную роль здесь играет нормальное  $\nu: E(\nu) \rightarrow B_0$  и конормальное  $\nu^*: E(\nu^*) \rightarrow B_0$  расслоения к подмногообразию  $B_0$ . Слоем  $\nu_x$  нормального расслоения  $\nu$  в точке  $x \in B_0$  является факторпространство  $T_x B / T_x B_0$ , а слоем  $\nu_x^*$  конормального расслоения  $\nu^*$  соответственно —  $\text{Ann } T_x B_0 \subset T_x^* B$ . Модуль  $\Lambda_\nu$  гладких сечений конормального расслоения отождествляется с фактором  $\mu/\mu^2$ , а факторы  $\mu^k/\mu^{k+1}$ , естественным образом, отождествляются с  $k$ -симметрическими степенями  $S^k \Lambda_\nu$ . Соответственно, для произвольного векторного расслоения  $\alpha$  имеют место изоморфизмы

$$\mu^k \Gamma(\alpha) / \mu^{k+1} \Gamma(\alpha) \cong \Gamma(\alpha^0) \otimes S^k \Lambda_\nu.$$

**5.2. Операторы переноса.** Пусть  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$ . Рассмотрим следующую модельную задачу: найти такое сечение  $a \in \mu^l \Gamma(\alpha)$ , имеющее  $l$ -й порядок малости на подмногообразии  $B_0$ , для которого  $\Delta(a) = 0 \pmod{\mu^j \Gamma(\beta)}$ . Естественный ход решения этой задачи таков. Для произвольного сечения  $a_j \in \mu^{j+k} \Gamma(\alpha)$  справедливо включение  $\Delta(a_j) \in \mu^j \Gamma(\beta)$ . Выясним, какие условия следует наложить на сечение  $a_j$ , чтобы  $\Delta(a_j) \in \mu^{j+1} \Gamma(\beta)$ . Введем с этой целью оператор  $\sigma_\mu^{(j)}(\Delta): \Gamma(\alpha^0) \otimes S^{j+k} \Lambda_\nu \rightarrow \Gamma(\beta^0) \otimes S^j \Lambda_\nu$ , действующий по следующему закону:

$$\sigma_\mu^{(j)}(\Delta)([a_j]) = \Delta(a_j) \pmod{\mu^{j+1} \Gamma(\beta)},$$

где  $[a_j] = a_j \pmod{\mu^{j+1} \Gamma(\alpha)}$ .

Несложно проверить, что операторы  $\sigma_\mu^{(j)}(\Delta)$  являются  $C^\infty(B_0)$ -гомоморфизмами. Назовем их *символами оператора  $\Delta$  вдоль подмногообразия  $B_0$* . Используя эти символы, условия  $\Delta(a_j) \in \mu^{j+1} \Gamma(\beta)$  можно записать короче:  $\sigma_\mu^{(j)}([a_j]) = 0$ .

Пусть эти условия выполнены. Посмотрим, при каких условиях

не меняя  $[a_j]$ , можно получить еще «более малую» правую часть. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы  $\Delta(a_j + a_{j+1}) \in \mu^{j+2}\Gamma(\beta)$  при некотором выборе сечения  $a_{j+1} \in \mu^{j+k+1}\Gamma(\alpha)$ , т. е. необходимо, чтобы  $\Delta(a_j) \bmod \mu^{j+2}\Gamma(\beta) \in \text{Im } \sigma_\mu^{(j+1)}(\Delta)$ . Формализуем этот процесс. С этой целью рассмотрим  $C^\infty(B_0)$ -модули  $\mathcal{H}_\mu^j(\Delta) = \text{Ker } \sigma_\mu^{(j)}(\Delta) \subset \Gamma(\alpha^0) \otimes S^{j+k}\Lambda_\nu$ ,  $\mathcal{E}_\mu^j(\Delta) = \text{Coker } \sigma_\mu^{(j)}(\Delta)$  и рассмотрим операторы

$$\Delta_j: \mathcal{H}_\mu^j(\Delta) \rightarrow \mathcal{E}_\mu^{j+1}(\Delta), \quad (1)$$

где  $\Delta_j([a_j]) = (\Delta(a_j) \bmod \mu^{j+2}\Gamma(\beta)) \bmod \text{Im } \sigma_\mu^{(j+1)}(\Delta)$ .

Условия разрешимости нашей задачи на первых двух этапах имеют вид:  $[a_j] \in \mathcal{H}_\mu^j$  и  $\Delta_j([a_j]) = 0$ . Дальнейшее продвижение требует привлечения спектральных последовательностей.

Нетрудно проверить, что операторы  $\Delta_j$  являются линейными дифференциальными операторами 1-го порядка на подмногообразии  $B_0$ . Мы называем их *операторами переноса*. Условием нетривиальности изложенной конструкции является требование:  $\mathcal{H}_\mu^1(\Delta) \neq 0$ . В этом случае подмногообразие  $B_0$  называется *характеристическим*.

С геометрической точки зрения модули  $\mathcal{H}_\mu^j(\Delta)$  (как и  $\mathcal{E}_\mu^j(\Delta)$ ) можно рассматривать как модули сечений семейств векторных пространств  $B_0 \ni x \mapsto K^j(x) \subset \alpha_x \otimes S^{j+k} \mathcal{U}_x$ , где  $\mathcal{U}_x = \text{Ann } T_x B_0$ , а отображения  $\sigma_{\mu,x}^{(j)}(\Delta)$  — как такие ограничения  $j$ -продолжений символа оператора  $\Delta$  на подпространство  $\mathcal{U}_x$ , для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \alpha_x \otimes S^{j+k} \mathcal{U}_x & \xrightarrow{\sigma_{\mu,x}^{(j)}(\Delta)} & \beta_x \otimes S^j \mathcal{U}_x \\ \uparrow \eta & & \uparrow \eta \\ \alpha_x \otimes S^{j+k} T_x^* & \xrightarrow{\sigma_x^{(j)}(\Delta)} & \beta_x \otimes S^j T_x^* \end{array} \quad (2)$$

коммукативны.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}_\mu^{(j)}(\Delta) & \rightarrow & \Gamma(\alpha^0) \otimes S^{j+k} \Lambda_\nu & \xrightarrow{\sigma_\mu^{(j)}(\Delta)} & \Gamma(\beta^0) \otimes S^j \Lambda_\nu & \rightarrow & \mathcal{E}_\mu^{(j)}(\Delta) \rightarrow 0 \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}_\mu^{(j-1)}(\Delta) \otimes \Lambda_\nu^t & \rightarrow & \Gamma(\alpha^0) \otimes S^{(j+k-1)} \Lambda_\nu \otimes \Lambda_\nu & \xrightarrow{\sigma_\mu^{(j-1)}(\Delta) \otimes 1} & \Gamma(\beta^0) \otimes S^{j-1} \Lambda_\nu \otimes \Lambda_\nu & \rightarrow & \mathcal{E}_\mu^{(j-1)}(\Delta) \otimes \Lambda_\nu \rightarrow 0 \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}_\mu^{(j-t)}(\Delta) \otimes \Lambda_\nu^t & \rightarrow & \Gamma(\alpha^0) \otimes S^{j+k-t} \Lambda_\nu \otimes \Lambda_\nu^t & \xrightarrow{\sigma_\mu^{(j-t)}(\Delta) \otimes 1} & \Gamma(\beta^0) \otimes S^{j-t} \Lambda_\nu \otimes \Lambda_\nu^t & \rightarrow & \mathcal{E}_\mu^{(j-t)}(\Delta) \otimes \Lambda_\nu^t \rightarrow 0 \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (3)$$

в которой через  $\Lambda_v^i$  обозначена  $i$ -я внешняя степень модуля  $\Lambda_v$ , а через  $\delta$  — ограничение  $\delta$ -оператора Спенсера.

Пусть  $H_v^{j,i}(\Delta)$  — когомологии 1-го столбца в члене  $\mathcal{X}_v^{(j)}(\Delta) \otimes \Lambda_v^i$ , а  $H_v^{j,i}(\mathcal{C}_\Delta)$  — когомологии второго столбца в члене  $\mathcal{C}_v^{(j)}(\Delta) \otimes \Lambda_v^i$ . Отметим, что  $H_v^{j,i}(\Delta)$  и  $H_v^{j,i}(\mathcal{C}_v) - C^\infty(B_0)$ -модули и значение первого из них в точке  $x \in B_0$  суть  $\delta$ -когомологии символа пересечения  $g_\Delta(\mathcal{U}_x) = g_x(\Delta) \cap \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}_x$ , где  $g_x(\Delta)$  — ядро символа оператора  $\Delta$  в точке  $x \in B_0$ . По этой причине модуль  $H_v^{j,i}(\Delta)$  мы называем  $\delta$ -когомологиями Спенсера вдоль подмногообразия  $B_0$ .

Заметим, что поскольку средние два столбца в приведенной диаграмме ациклически, то имеют место изоморфизмы

$$H_v^{j,i}(\mathcal{C}_\Delta) \simeq H_v^{j-2, i+2}(\Delta). \quad (4)$$

В частности, последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_v^{(j)} \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_v^{(j-1)} \otimes \Lambda_v \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_v^{(j-2)} \otimes \Lambda_v^2 \quad (5)$$

точна для всех  $j \geq 3$  тогда и только тогда, когда

$$H_v^{j+1,2}(\Delta) = H_v^{j,3}(\Delta) = 0$$

для всех  $j \geq 0$ .

Использование диаграммы (3) и изоморфизма (4) позволяют, аналогично доказательству критерия формальной интегрируемости, данному в [32], доказать первую часть следующего утверждения (вторая часть использует точность последовательности (5)).

**Теорема.** Пусть подмногообразие  $B_0 \subset B$  и дифференциальный оператор  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$  таковы, что

1) семейства векторных пространств  $k^0: x \mapsto K_v^{(0)}(x)$  и  $k^1: x \mapsto K_v^{(1)}(x)$ ,  $\forall x \in B_0$ , определяют гладкие векторные расслоения над многообразием  $B_0$  и

2)  $H_v^{j,2}(\Delta) = 0$ ,  $\forall j \geq 0$ . Тогда для всех  $j \geq 0$  семейства векторных пространств  $k^j: x \mapsto K_v^{(j)}(x)$ ,  $c^j: x \mapsto C_v^{(j)}(x)$  определяют гладкие векторные расслоения над многообразием  $B_0$ .

Если, кроме того,  $H_v^{j,3}(\Delta) = 0$ ,  $\forall j \geq 0$ , то символы операторов переноса  $\Delta_j^i$ ,  $j \geq 2$ , определяются символом оператора переноса  $\Delta_1^1$  из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_v^{(j)}(\Delta) \otimes \Lambda^1(B_0) & \xrightarrow{\sigma(\Delta_1^j)} & \mathcal{C}_v^{(j+1)}(\Delta) \\ \delta \downarrow & \sigma(\Delta_1^{j-1}) \otimes 1 & \downarrow \delta \\ \mathcal{X}_v^{(j-1)}(\Delta) \otimes \Lambda_v \otimes \Lambda^1(B_0) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_v^{(j)}(\Delta) \otimes \Lambda_v \end{array}$$

и в этом смысле дифференциальные операторы  $\Delta_1^j$  определяются первым оператором переноса.

5.3. Операторы переноса в нелинейном случае. Прежде чем переносить результаты предыдущих пунктов на произвольные дифференциальные уравнения, сделаем небольшое отступление. Пусть  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$  — нелинейный дифференциальный оператор, действующий из сечений расслоения  $\alpha$  в сечения расслоения  $\beta$ , а  $h \in \Gamma(\alpha)$  — некоторое фиксированное сечение. Определим линейный дифференциальный оператор  $l_h(\Delta) \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$  — *линеаризацию оператора  $\Delta$  на сечении  $h$*  — соотношением:

$$l_h(\Delta)(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Delta(h+ta), \quad (1)$$

где  $a \in \Gamma(\alpha)$ .

В этом случае для произвольного оператора  $\Delta$  имеем

$$\Delta(h+\varepsilon) - \Delta(h) - l_h(\Delta)(\varepsilon) \in \mu^{2j}\Gamma(\beta), \quad (2)$$

если  $\varepsilon \in \mu^{j+k}\Gamma(\alpha)$ .

А в случае, когда  $\Delta$  — квазилинейный оператор,

$$\Delta(h+\varepsilon) - \Delta(h) - l_h(\Delta)(\varepsilon) \in \mu^{2j+1}\Gamma(\beta). \quad (3)$$

Отметим также, что в этом случае

$$l_{h+\eta}(\Delta)(\varepsilon) - l_h(\Delta)(\varepsilon) \in \mu^3\Gamma(\beta), \quad (4)$$

если  $\eta, \varepsilon \in \mu^{k+1}\Gamma(\alpha)$ .

Поэтому решение задачи, аналогичной сформулированной в пункте 5.2, для нелинейного оператора (т. е. нахождения решений, отличающихся от заданного решения  $h$  на «малое» вдоль подмногообразия  $B_0$  решение) приводит, как и выше, к операторам переноса  $\Delta_{j,h}^1$ , отвечающим линеаризации  $l_h(\Delta)$ . Рассмотрим квазилинейный дифференциальный оператор  $\Delta \in \text{Diff}_k(\alpha, \beta)$  и отвечающую ему систему дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}_\Delta = \varphi_\Delta^{-1}(0) \subset \subset J^k(\alpha)$ . Пусть  $L \subset \mathcal{E}_\Delta$  — такое решение этой системы, что цикл особенностей  $\Sigma_t L \subset L$  для некоторого  $t > 0$  диффеоморфно проектируется на подмногообразии  $B_0 \subset B$ . Определим на этом цикле следующие семейства векторных пространств:  $k_\Sigma(x_k) = = \text{Ker}(\alpha_k|_L)_{*,x_k} \subset \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}_x$ ,  $c_\Sigma(x_k) = \text{Coker} \sigma_{x_k}(\Delta)$ , где  $x_k \in \Sigma_t L$ ,  $\mathcal{U}_x = \text{Ann Im}(\alpha_k|_L)_{*,x_k} \subset T_x^*$ , а также  $k_\Sigma^{(1)} \subset \alpha_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_x$  — продолжения подпространств  $k_\Sigma$  и  $c_\Sigma^{(1)} = \text{coker} \sigma_{x_k}^{(1)}(\Delta)$ , где  $\sigma_{x_k}^{(1)}(\Delta) —  $L$ -продолжение символа  $\sigma_{x_k}(\Delta): \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}_x \rightarrow \beta_x$  и  $\sigma_{x_k}^{(1)}(\Delta): \alpha_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_x \rightarrow \rightarrow \beta_x \otimes S^1 \mathcal{U}_x$ . Предположим (см. теорему в п. 5.2), что эти семейства образуют гладкие векторные расслоения над многообразием  $\Sigma_t L$ . Выберем произвольное сечение  $h \in \Gamma(\alpha)$  так, чтобы  $j_h(h)(B_0) = = \Sigma_t L$ , и, используя линеаризацию  $l_h(\Delta)$ , построим оператор переноса$

$$\Delta_\Sigma^1: \Gamma(k_\Sigma^{(1)}) \rightarrow \Gamma(c_\Sigma^{(2)}). \quad (5)$$

Из соотношений (4) следует, что этот оператор не зависит от выбора сечения  $h$ , представляющего  $\Sigma_t L$  над многообразием  $B_0$ , и тем самым корректным образом определяет линейный дифференциальный оператор 1-го порядка на цикле  $\Sigma_t L$ . Переходя к продолжениям  $\mathcal{E}^{(l)}$  данной системы дифференциальных уравнений, имеем следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $L \subset J^{k+l}(\alpha)$  — интегральное многообразие определяющее решение продолженной системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\alpha)$ , цикл особенностей  $\Sigma_t L \subset L$  которого при некотором фиксированном значении  $t > 0$  диффеоморфно проектируется на подмногообразие  $B_0 \subset B$ . Тогда ограничения операторов переноса  $\Delta_{1,h}^{(l+1)}$  на подрасслоение  $k_{\Sigma}^{(l+1)}$  определяют линейные дифференциальные операторы 1-го порядка  $\Delta_{\Sigma}^{(l+1)} \in \text{Diff}_1(k_{\Sigma}^{(k+1)}, c_{\Sigma}^{(l+2)})$  на цикле особенностей  $\Sigma_t L$  независимо от выбора представляющего сечения  $h \in \Gamma(\alpha)$ .

**Замечание.** 1) В дальнейшем (см. § 7) мы покажем, что подпространство  $k_{\Sigma}^{(1)}(x_k)$ ,  $\forall x_k \in \Sigma_t L$  снабжено структурой йордановой алгебры, если  $k=1$ , и структурой коммутативной алгебры, если  $k \geq 2$ .

2) Операторы переноса при  $l=0$  не зависят от выбора представляющего сечения  $h$  (или «фона») только для квазилинейных операторов  $\Delta$ ; при  $l \geq 1$  оператор  $\Delta$  может быть произволен, поскольку его продолжения  $\Delta^{(l)}$  всегда квазилинейны.

**5.4. Гамильтонов формализм.** Классическая теорема о распротранении особенностей вдоль бихарактеристик по существу является теоремой о структуре операторов переноса для  $\Sigma_l$ -особенностей. Чтобы убедиться в этом, нам понадобится следующая версия гамильтонова формализма на расслоениях струй.

Обозначим через  $\Phi_k(\alpha)$  тотальное пространство расслоения  $\alpha_k^*(\tau^*)$ , индуцированного из кокасательного расслоения  $\pi^*: T^*B \rightarrow B$  проекцией  $\alpha_k: J^k(\alpha) \rightarrow B$ , а через  $\pi_k^*: \Phi_k(\alpha) \rightarrow T^*B$ ,  $\pi_{k,s}: \Phi_k(\alpha) \rightarrow \Phi_s(\alpha)$  — естественные проекции. Пусть  $\Phi_k(\alpha)$  — алгебра гладких функций на пространстве  $\Phi_k(\alpha)$ , а  $\Phi_{\infty}(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{proj } \Phi_k(\alpha)$ .

Каждое сечение  $h \in \Gamma(\alpha)$  определяет сечение  $j_k^{\tau}(h): T^*B \rightarrow \Phi_k(\alpha)$  расслоения  $\tau_k$ ;  $j_k^{\tau}(h): (x, p) \mapsto ([h]_x^k, p)$ . Определим высшую скобку Пуассона  $\{H, G\}$  на алгебре  $\Phi_{\infty}(\alpha)$ ,  $H \in \Phi_k(\alpha)$ ,  $G \in \Phi_l(\alpha)$ ,  $\{H, G\} \in \Phi_s(\alpha)$ , где  $s = \max(k+1, l+1)$ , при помощи следующего свойства универсальности

$$(j_s^{\tau}(h))^* \{H, G\} = \{ (j_k^{\tau}(h))^* H, (j_l^{\tau}(h))^* G \} \quad (1)$$

для всех сечений  $h \in \Gamma(\alpha)$ .

В правой части формулы (1) через  $\{, \}$  обозначена скобка Пуассона на  $C^{\infty}(T^*M)$ .

Высшая скобка Пуассона задает гамильтонову структуру на алгебре  $\Phi_\infty(\alpha)$  в том смысле, что эта алгебра является алгеброй Ли относительно скобки, и, кроме того, выполнено тождество Лейбница

$$\{H, G_1 \cdot G_2\} = \{H, G_1\} \cdot G_2 + \{H, G_2\} \cdot G_1.$$

Последнее свойство скобки Пуассона показывает, что отображение  $X_H: \Phi_\infty(\alpha) \rightarrow \Phi_\infty(\alpha)$ ,  $X_H(G) = \{G, H\}$ , определяет для каждой функции  $H \in \Phi_k(\alpha)$  гамильтоново дифференцирование. При этом на каждом конечном шаге  $X_H: \Phi_l(\alpha) \rightarrow \Phi_l(\alpha)$  является векторным полем над отображением  $\tau_{s,l}$ .

Пусть теперь гладкое интегральное многообразие  $L \subset J^{k+l}(\alpha)$  является решением системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^k(\alpha)$ ,  $L \subset \mathcal{E}^{(l)}$ . Обозначим через  $L_0$  подмногообразие  $\Sigma_{1,0} L \subset L$ , а через  $\tilde{L}_0 \subset \Phi_{k+l}(\alpha)$  — его естественное поднятие:  $\tilde{L}_0 = \{(x_{k+l}, p) \mid x_{k+l} \in L_0, p \in \text{Ann Im}(\alpha_{k+l})_*(T_{x_{k+l}}^* L) \subset T_x^*\}$ . Если выбрана такая функция  $S \in C^\infty(B)$ , что  $\alpha_{k+l}(S) = 0$  на  $L_0$ , но  $d\alpha_{k+l}^*(S) \neq 0$ , то через  $\tilde{L}_{0,S} \subset \tilde{L}_0$  обозначим множество точек  $(x_{k+l}, d_x S)$ , где  $x_{k+l}$  пробегает  $L_0$ .

Предположим теперь, что  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Delta$  — определенная система дифференциальных уравнений,  $\Delta \in \text{dif}_k(\alpha, \alpha)$ , и пусть  $H = H_\Delta$  — гамильтониан оператора  $\Delta$ ,  $H_\Delta \in \Phi_k(\alpha)$ ,  $H_\Delta(x_k, p) = \det \sigma_{x_k, p}(\Delta) \forall x_k \in J^k(\alpha)$ ,  $p \in T_x^*$ ,  $\alpha_k(x_k) = x$ .

Пусть  $l(x_{k+l})$  — множество таких точек  $x_{k+l+1}$  из  $\mathcal{E}^{(l+1)}$ , что  $L(x_{k+l+1}) \supset T_{x_{k+l}}(L_0)$ . Тогда  $l(x_{k+l})$  — аффинное подпространство в слое  $F(x_{k+l})$ , размерность которого совпадает с  $\dim \text{Ker} \sigma_{x_k, p}(\Delta)$ , где  $p \in T_x^*$  — такой ковектор, что  $\text{Ker} \alpha_{k+l}^*(p) \supset T_{x_{k+l}} L_0$ . Векторы  $X_{H,y} \in T_{(x_{k+l}, p)}(\Phi_{k+l}(\alpha))$  не зависят от выбора элементов  $y = (x_{k+l+1}, p)$ , где  $x_{k+l+1} \in l(x_{k+l})$ , и определяют в точках подмногообразия  $\tilde{L}_0$  векторное поле  $V_H$ , касательное к этому подмногообразию. При этом, если выбрано подмногообразие  $\tilde{L}_{0,S} \subset \tilde{L}_0$ , то проекция векторного поля из точек подмногообразия  $\tilde{L}_{0,S}$  в  $J^{k+l}(\alpha)$  определяет векторное поле  $V_{H,S}$ , касательное к подмногообразию  $L_0$ . Это поле называется *полем бихарактеристик*.

**Теорема.** Для определенных систем дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}_\Delta \subset J^k(\alpha)$  операторы переноса, построенные на циклах  $\Sigma_1$ -особенностей, при условии, что  $\dim k_x = 1$ , покрывают поле бихарактеристик на  $\Sigma_1 L$ .

**5.5. Ударные волны.** Проекцию  $\alpha_{k,0}(L) \subset E(\alpha)$  произвольно интегрального многообразия можно рассматривать как многозначное сечение расслоения  $\alpha$ . Однако, в большинстве дифференциальных уравнений входящие в них величины однозначны. Требования однозначности решения приводят к различным

правилам получения однозначного, но возможно кусочно-гладкого решения — ударной волны — из данного многозначного решения  $L$ . Отметим, что в отличие от обычно используемого подхода, когда постулируется класс, в котором ищется решение, мы исходим из конкретного объекта: интегрального многообразия. При этом подходе многие эмпирические правила (например, — правило площадей Максвелла) получают геометрическую трактовку (подробности см. в [39]). Учитывая связь с обобщенными функциями, представляется наиболее естественным производить отбор ветвей из дополнения к особому множеству  $L \setminus \Sigma L$ . Однако это не так. А обычно используемый при этом принцип «максимального промедления» справедлив только для решений линейных систем дифференциальных уравнений. В общем (т. е. с учетом нелинейности) случае проекция  $B_{\Sigma} = \alpha_h(\Sigma L) \subset B$  описывает «зону метастабильности» решения [39]. «Перескок», т. е. переход с одной ветви на другую, происходит вдоль некоторого подмногообразия (возможно с особенностями)  $B_0 \subset B$ , лежащего в «окрестности» критического множества.

Рассмотрим вкратце некоторые способы отбора ветвей.

а) *Правило Гюгонио — Ранкина.* Предположим, что подмногообразие  $B_0 \subset B$  делит базу  $B$  на две области  $B_+ \cup B_- = B \setminus B_0$ , в каждой из которых выбрана одна из ветвей решения  $h^+$  и  $h^-$ . И пусть также задан закон сохранения  $\theta$ , т. е. задана такая  $(n-1)$ -форма  $\theta \in \Lambda^{n-1}(J^k \alpha)$ , ограничение дифференциала  $d\theta$  которой на произвольное решение системы дифференциальных уравнений тривиально. Условие Гюгонио — Ранкина, отвечающее закону сохранения  $\theta$ , состоит в том, что ограничения дифференциальных  $(n-1)$ -форм  $\theta_{h^+} = (j_k(h^+))^*(\theta) \in \Lambda^{n-1}(B_+)$  и  $\theta_{h^-} = (j_k(h^-))^*(\theta) \in \Lambda^{n-1}(B_-)$  на подмногообразии  $B_0$  совпадают (см., например, [11]). Условия Гюгонио — Ранкина  $\theta_{h^+}|_{B_0} = \theta_{h^-}|_{B_0}$  дают дифференциальное уравнение, связывающее  $h^+$ ,  $h^-$  и функцию  $S$ , если  $B_0 = S^{-1}(0)$ ,  $S \in C^\infty(B)$ . Для линейных систем уравнений эти условия совпадают с характеристическим уравнением Гамильтона — Якоби на функцию  $S$ , что позволяет определять границу разрыва  $B_0$ . В частности, здесь всегда  $B_0 = B_{\Sigma}$ . В нелинейном случае для нахождения функции  $S$  и тем самым границы ударной волны необходимо использовать дополнительные законы сохранения [39].

б) *Термодинамический принцип.* Рассмотрим простейшую ситуацию, когда в областях  $B_{\pm} \setminus B_{\Sigma}$  решение  $L$  представляет собой график  $k$ -струи многозначного сечения  $h^{\pm}$ , ветви которого в области  $B_+ \setminus B_{\Sigma}$  обозначим через  $h_1^+, \dots, h_s^+, \dots$ , а в области  $B_- \setminus B_{\Sigma}$  — через  $h_1^-, \dots, h_t^-, \dots$ , соответственно. Фиксируем также закон сохранения  $\theta$ . Каждой ветви  $h_i^{\pm}$  сопоставим число

$E_i^\pm = \int_{B_i^\pm} \theta_{h_i^\pm}$ , где  $B_i^\pm$  — граница области определения ветви  $h_i^\pm$ ,

которое назовем  *$\theta$ -энергией ветви  $h_i^\pm$* . Дополнительно к этому каждой ветви припишем число  $\varepsilon_i^\pm = \varepsilon(J_\pm(h_i^\pm))$  (аналог спина), определяющее рассогласование ориентаций (или число, определяемое индексом пересечения с циклом  $\Sigma_1$ -особенностей, в неориентируемом случае см. § 9). В обоих случаях  $\varepsilon_i^\pm \in \mathbb{Z}_2$ . Если  $\alpha$  — расслоение полуформ, то  $\varepsilon_i^\pm \in \mathbb{Z}_4$  и т. д. Во всех случаях возможность сопоставить ветви число  $\varepsilon_i^\pm$  эквивалентна «условиям квантования»: класс когомологий  $w$  (по mod 2 или mod 4) на интегральном многообразии  $L$  тривиален.

Состоянием  $I = (i, j)$  назовем переход  $h_i^+ \rightarrow h_j^-$ . Каждому состоянию припишем число — энергию перехода  $E_I = E_i^+ - E_j^-$ , если числа  $\varepsilon_i^+$  и  $\varepsilon_j^-$  совпадают, и  $E_I = \infty$ , если  $\varepsilon_i^+$  и  $\varepsilon_j^-$  различны. Вводя статистическую сумму  $Z = \sum_I \exp(-\beta E_I)$ , обычным образом (см., например, [7]) можно вычислить вероятности переходов, температуру, энтропию и т. п.

Несколько иной принцип получается, если на многообразии явно выделена ось «времени»:  $B = \bar{B} \times \mathbb{R}_t$ . Тогда, рассматривая различные сечения  $t = \text{const}$  и на каждом сечении разыгрывая описанную выше ситуацию, мы получим (зависящую от времени) картину переходов. Это отражает идею И. Пригожина [25], [26] о том, что «описание системы, претерпевающей бифуркации, включает и детерминистический, и вероятностный элементы».

## § 6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ

Грассманианы подпространств, касательных к интегральным многообразиям, или, короче, — интегральные грассманианы, устроены довольно любопытно. Они являются проективными многообразиями, но за исключением нескольких выделенных случаев, среди которых находится и грассманиан лагранжевых подпространств, не являются гладкими многообразиями. Условия примыкания естественных стратов к регулярной клетке приводят к йордановым структурам на циклах особенностей, которые мы опишем в следующем параграфе.

**6.1. Интегральные плоскости.** *Интегральной плоскостью* в картановском подпространстве  $S(x_k)$ ,  $x_k \in J^k(\alpha)$  назовем произвольное  $n$ -мерное изотропное подпространство. Напомним, что каждая такая плоскость  $L$  определяется триадой  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$ ,

где  $x_{k+1} \in F(x_k)$ ,  $L_0 = \text{Ker}(\alpha_{k*}: L \rightarrow T_x)$ ,  $\mathcal{U} = \text{Ann Im}(\alpha_{k*}|_L)$ ,  $\dim \mathcal{U} = \dim L_0$ , причем  $L_0 \subset \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}$ , а  $L = \mathcal{U}(x_{k+1}) \oplus L_0$ , где  $\mathcal{U}(x_{k+1}) \subset \subset L(x_{k+1})$  — прообраз  $\mathcal{U}^0 = \text{Im}(\alpha_{k*}|_L)$  при изоморфизме  $\alpha_{k*}: L(x_{k+1}) \rightarrow T_x$ . Подпространства  $\mathcal{U}$  и  $L_0$ , как следует из их описания, однозначно определяются интегральной плоскостью  $L$ . Две триады  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$  и  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , где  $x_{k+1} = x_{k+1} + \theta$ ,  $\theta \in \alpha_x \otimes S^{k+1} T_x^*$ , определяют одну и ту же интегральную плоскость, если  $\theta \in T_x^* \circ L_0 + \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}$ , где через  $T_x^* \circ L_0 \subset \alpha_x \otimes S^{k+1} T_x^*$  обозначено подпространство, натянутое на симметрические произведения  $a \circ b$ ,  $a \in T_x^*$ ,  $b \in L_0$ .

**6.2. Интегральные грассманианы.** Обозначим через  $I(x_k)$  грассманиан всех интегральных плоскостей, лежащих в  $C(x_k)$ , и пусть  $I_l = \{L \in I(x_k) \mid \dim \alpha_{k*}(L) = n - l\}$ . Множество интегральных плоскостей, изоморфно проектирующихся на касательное пространство  $T_x$ , отождествляется с  $F(x_k)$ , а поэтому изоморфно  $\alpha_x \otimes S^{k+1} T_x^*$ . Для описания подпространств  $I_l \subset I(x_k)$ ,  $l \geq 1$ , нам понадобятся дополнительные конструкции. Пусть  $G_l(V)$  обозначает грассманиан  $l$ -мерных подпространств векторного пространства  $V$ . Рассмотрим многообразие  $H_l$ , элементами которого являются пары  $(\mathcal{U}, L_0)$ , где  $\mathcal{U} \in G_l(T_x^*)$ ,  $L_0 \in G_l(\alpha_x \otimes S^k \mathcal{U})$ , и расслоение  $h_l: H_l \rightarrow G_l(T_x^*)$ ;  $h_l(\mathcal{U}, L_0) = \mathcal{U}$ . Естественное отображение  $k_l: I_l \rightarrow H_l$ , сопоставляющее интегральной плоскости  $L = (x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$  пару  $(\mathcal{U}, L_0) \in H_l$ , превращает  $I_l$  в тотальное пространство гладкого аффинного расслоения над  $H_l$ , слой которого в точке  $(\mathcal{U}, L_0)$  ассоциирован с векторным пространством

$$\alpha_x \otimes S^{k+1} T_x^* / T_x^* \circ L_0 + \alpha_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}.$$

Поэтому

$$\dim I_l = m \binom{n+k}{k+1} + m k \binom{l+k-1}{k+1} - l^2. \quad (1)$$

Извлечем ряд следствий из полученной формулы. Во-первых, заметим, что число  $m \binom{n+k}{k+1}$  совпадает с размерностью регулярной клетки  $I_0$ . Поэтому число  $v(m, k, l) = \dim I_0 - \dim I_l$  можно интерпретировать как «кочамерность» относительно регулярной клетки. Далее, функция  $v(m, k, l)$  убывает по переменным  $m$ ,  $k$ , а при  $l=1$   $v(m, k, 1) = 1$ , при  $k=1$   $v(m, 1, l) = \frac{m}{2} l - \left(\frac{m}{2} - 1\right) l^2$ . Поэтому  $v(m, 1, l) < 0$ , если  $l \geq 2$ ,  $m >$ . Для расслоений  $\alpha$ , размерность которых не превышает 4, все те случаи, когда  $v \geq 0$ , указаны в приводимых ниже таблицах.

$k \backslash \ell$	1	2	3	4
1	1	3	6	10
2	1	2	1	-4
3	1	1	-6	-29
4	1	0	-15	-48
5	1	-1	-26	-124

$m=1$

$k \backslash \ell$	1	2	3	4
1	1	1	0	-2
2	1	-2	-15	-44

$m=3$

$k \backslash \ell$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	0	-7	-24
3	1	-2	-21	-74

$m=2$

$k \backslash \ell$	1	2	3
1	1	0	-3
2	1	-4	-23

$m=4$

Отметим, что при  $k=1$  и  $m=1,2$  имеем  $v(1,1,l) = \binom{l}{2}$ ,  
 $v(2,1,l) = l$ .

Эти случаи вместе с  $l=1$  и  $k=1, m=3, l=2$  назовем исключительными.

**6.3.  $R$ -плоскости и  $R$ -грассманианы.** В неисклЮчительных случаях  $\dim I_l \geq \dim I_0$ , если  $l \geq 2$ . Этот факт можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть  $L \subset J^k(\alpha)$  — интегральное многообразие. Тогда в каждой точке  $x_k \in L$  касательное пространство  $T_{x_k}L$  является интегральной плоскостью и, следовательно,  $T_{x_k}L \in I(x_k)$ . Условие, что  $T_{x_k}L \in I_l(x_k)$ , равносильно тому, что в этой точке отображение  $\alpha_k: L \rightarrow B$  имеет особенность Тома — Боардмана типа  $\Sigma_l$ . Вычисление размерностей, проведенное выше, показывает, что если интегральная плоскость  $T_{x_k}L$  не лежит на границе регулярной клетки  $I_0(x_k)$  и имеет место неисклЮчительный случай, то некоторая окрестность точки  $x_k$  целиком состоит из особых точек отображения  $\alpha_k: L \rightarrow B$ . Имея в виду это обстоятельство, выделим особо класс  $R$ -плоскостей, т. е. класс интегральных плоскостей, лежащих в замыкании регулярной клетки  $I_0(x_k)$ . Грассманиан всех  $R$ -плоскостей в точке  $x_k$  обозначим через  $RI(x_k)$ .

Интегральное многообразие  $L$  назовем  $R$ -многообразием, если особое множество  $\Sigma L$  нигде не плотно в  $L$ . Касательная плоскость в каждой точке  $R$ -многообразия является  $R$ -плоскостью. Обратное, конечно, не верно.

Для описания  $R$ -плоскостей введем следующую стратификацию в  $R$ -грассманиан. Положим,  $RI_l = I_l(x_k) \cap \bar{I}_0(x_k)$ . Далее индуктивно определим подмножества  $RI_{l_1, \dots, l_r} = I_{l_r}(x_k) \cap \bar{RI}_{l_1, \dots, l_{r-1}}$ , отвечающие последовательности  $0 < l_1 < \dots < l_r \leq n$ .  $R$ -плоскости, входящие в  $RI_{l_1, \dots, l_r}$ , можно охарактеризовать как

$R$ -плоскости  $L \in RI_r$ , примыкающие (т. е. лежащие в замыкании) к подмножествам  $RI_i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$ .

**Теорема.** Интегральная плоскость  $L$ , определяемая триадой  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , является  $R$ -плоскостью в том и только том случае, когда существует последовательность вложенных подпространств  $T_x^* \supset \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U}_1 \supset \dots \supset \mathcal{U}_r \supset 0$  и таких тензоров  $\theta_j \in \alpha_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq r+1$ , что подпространство  $L_0 \subset \alpha_x \otimes S^k \mathcal{U}$  порождено тензорами вида  $v \lrcorner \delta \theta_j$ , для всех  $1 \leq j \leq r+1$  и  $v \in \text{Ann } \mathcal{U}_j$ .

**Дополнение.** 1) В условиях теоремы  $R$ -плоскость  $L$  лежит в подмножестве  $RI_{l_1, \dots, l_r}$ , где  $l_i = \dim \mathcal{U}_{r-i+1}$ .

2) Тензоры  $\theta_j$ , участвующие в формулировке теоремы, не произвольны. Из соображений размерности следует, что подпространства  $L_j = \{v \lrcorner \delta \theta_j, \forall v \in \text{Ann } \mathcal{U}_{j+1}\}$  имеют размерность, равную  $\dim \mathcal{U}_{j+1} - \dim \mathcal{U}_j$ .

### § 7. ЙОРДАНОВЫ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РЕГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Описание  $R$ -плоскостей, приведенное в предыдущем параграфе, позволяет естественным образом связать с каждой «регулярной»  $R$ -плоскостью йорданову алгебру или ассоциативную алгебру с инволюцией. Для удобства обозначений фиксируем точку  $x_h \in J^h(\alpha)$  и положим  $\alpha_x = W$ ,  $T_x / \text{Ann } \mathcal{U} = V$ .

**7.1. Тензоры.** Каждый симметрический тензор  $\theta \in W \otimes S^{k+1} V^*$  определяет линейное отображение  $M_\theta: V \rightarrow W \otimes S^k V^*$ , где  $M_\theta(v) = v \lrcorner \delta \theta$ . Положим  $L(\theta) = \text{Im } M_\theta$ . Число  $\dim L(\theta)$  назовем рангом ( $\text{rk } \theta$ ) симметрического тензора  $\theta$ . Тензор  $\theta$  назовем невырожденным, если  $\text{rk } \theta = \dim V = n$ .

Пусть  $\text{Cd}_r^{k+1}(W, V) \subset W \otimes S^{k+1} V^*$  — множество тензоров ранга  $r$ , а  $\text{Cd}^{k+1}(W, V)$  — конус вырожденных тензоров. Если  $\text{Ker } \theta = \text{Ker } M_\theta \subset V$  — подпространство вырождения тензора  $\theta$ , то корректно определено ограничение  $\bar{\theta} \in W \otimes S^{k+1}(V/\text{Ker } \theta)^*$ , причем тензор  $\bar{\theta}$  уже невырожден. Для описания пространства  $\text{Cd}_r^{k+1}(W, V)$  рассмотрим три расслоения над грассманианом  $G_r(V)$   $r$ -мерных подпространств: (1)  $\eta$  — тавтологическое расслоение, (2)  $\eta_W$  и  $\eta_V$  — тривиальные расслоения со слоями  $W$  и  $V$  соответственно. Элементы  $a(V_1)$ ,  $V_1 \in G_r(V)$  тотального пространства тензорного произведения  $\eta_W \otimes S^{k+1}(\eta_V/\eta)^*$  можно рассматривать как такие тензоры  $\theta \in W \otimes S^{k+1} V^*$ , что  $\text{Ker } \theta \supset V_1$ . Поэтому множество  $\text{Cd}_r^{k+1}(W, V)$  является гладким открытым подмногообразием в  $W \otimes S^{k+1} V^*$  коразмерности  $\nu_r(m, n, k+1) = m \binom{n+k}{k+1} - m \binom{n+k-r}{k+1} - r(n-r)$ , где  $m = \dim W$ . А коразмерность конуса вырожденных тензоров  $\text{Cd}^{k+1}(W, V)$  равна  $m \binom{n+k-1}{k} - n+1$ .

Так, например, коразмерность конуса вырожденных квадратиков в  $W \otimes S^2 V^*$  равна  $(m-1)n+1$ , а коразмерность вырожденных однородных полиномов в  $S^{k+1} V^*$ ,  $\dim V=2$ , равна  $k$ .

**7.2. Регулярные подпространства.** Подпространство  $L \subset W \otimes S^k V^*$  назовем *регулярным*, если его первое продолжение  $L^{(1)} \subset W \otimes S^{k+1} V^*$  нетривиально и не содержится в конусе вырожденных тензоров. Отметим, что если  $R$ -плоскость определяется триадой  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , то  $L_0 = L(\theta)$  для некоторого тензора  $\theta \in \text{ed}_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}$ , т. е. в представлении теоремы пункта 6.3 можно выбрать цепочку длины 1 в том и только случае, когда  $L_0 \rightarrow$  регулярное подпространство.

**Примеры.** 1) Если  $\dim \mathcal{U}=1$ , то  $L_0 = L(\theta)$  для некоторого тензора  $\theta$ .

2) Если  $\dim \mathcal{U}=2$ , то триада  $(x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$  определяет  $R$ -плоскость в том и только том случае, когда либо подпространство  $L_0$  регулярно, либо  $L_0 \cap \text{Cd}_1^k(\alpha_x, T_x(\text{Ann} \mathcal{U})) \neq \emptyset$ .

**7.3. Йордановы алгебры.** Предположим, что невырожденные тензоры  $\theta$  и  $\theta'$  определяют одно и то же пространство  $L = L(\theta) = L(\theta')$ . В этом случае  $M_{\theta'} = M_{\theta} \cdot a$  для некоторого изоморфизма  $a: V \rightarrow V$ , т. е.  $v \lrcorner \delta \theta' = av \lrcorner \delta \theta$ ,  $\forall v \in V$ , или  $\delta \theta' = (1 \otimes a^*) \delta \theta$ . Таким образом, для того чтобы существовал тензор  $\theta' = \theta_a$ , отвечающий оператору  $a \in \text{End } V$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\delta(1 \otimes a^*) \delta \theta = 0$ . Пусть  $\text{Jog } \theta \subset \text{End } V$  — множество операторов, удовлетворяющих этому равенству.

Невырожденным операторам  $a \in \text{Jog } \theta$  отвечают различные представления пространства  $L(\theta)$  в виде  $L(\theta_a)$ . Для произвольных операторов  $a \in \text{Jog } \theta$  соответствие  $a \mapsto \theta_a$  определяет изоморфизм между  $\text{Jog } \theta$  и первым продолжением  $L^{(1)}(\theta)$ .

Эквивалентное описание элементов  $\text{Jog } \theta$  можно дать в терминах 2-го дифференциала  $\theta$ . А именно, определим второй дифференциал  $\delta_2 \theta$  тензора  $\theta$  как отображение  $\delta_2 \theta: S^2 V \rightarrow W \otimes S^{k+1} V^*$ , где  $\delta_2 \theta(v_1, v_2) = v_1 \lrcorner \delta(v_2 \lrcorner \delta \theta)$ . Несложно проверить, что оператор  $a \in \text{End } V$  лежит в множестве  $\text{Jog } \theta$  в том и только том случае, когда

$$\delta_2 \theta(av_1, v_2) = \delta_2 \theta(v_1, av_2) \quad (1)$$

для всех векторов  $v_1, v_2 \in V$ .

Из этого описания следует, что множество  $\text{Jog } \theta$  образует йорданову алгебру, т. е.  $\text{Jog } \theta \subset \text{End } V$  является векторным подпространством, замкнутым относительно относительно антикоммутатора

$$\{a_1, a_2\} = \frac{1}{2} (a_1 a_2 + a_2 a_1).$$

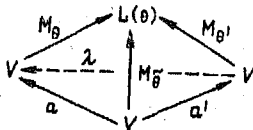
**Примеры.** Пусть  $\dim V=2$ ,  $k=2$ ,  $\dim W=1$ , тогда каждый невырожденный тензор  $\theta \in S^3 V^*$  в подходящей системе координат  $x, y \in V^*$  может быть записан в одной из следующих нормальных форм:

- 1) эллиптический случай:  $\theta = x^3 - 3xy^2$ ,
- 2) гиперболический случай:  $\theta = x^3 + y^3$ ,
- 3) параболический случай:  $\theta = xy^2$ .

Каждый из этих случаев определяется типом пересечения плоскости  $L(\theta)$  с конусом  $Cd^2(\mathbb{R}, V)$  вырожденных квадратик: в случае 1)  $L(\theta) \cap Cd^2(\mathbb{R}, V) = 0$ , в случае 2)  $L(\theta) \cap Cd^2(\mathbb{R}, V)$  — пара различных прямых, а в случае 3)  $L(\theta) \cap Cd^2(\mathbb{R}, V)$  — одна прямая. Соответствующие йордановы алгебры таковы: 1)  $\text{Jor } \theta = \mathbb{R}[X]/X^2 + 1$ , 2)  $\text{Jor } \theta = \mathbb{R}[X]/X^2 - 1$ , 3)  $\text{Jor } \theta = \mathbb{R}[X]/X^2$ .

**7.4. Ассоциативные алгебры.** Обозначим через  $As(\theta) \subset \text{End } V$  ассоциативную алгебру, порожденную йордановой алгеброй  $\text{Jor } \theta$ . Соотношение  $\delta_2 \theta(av_1, v_2) = \delta_2 \theta(v_1, a^\# v_2)$  для всех  $v_1, v_2 \in V$  корректно определяет для каждого оператора  $a \in As(\theta)$  оператор  $a^\# \in As(\theta)$  и, тем самым, — инволюцию  $\# : As(\theta) \rightarrow As(\theta)$ . Эта инволюция позволяет представить алгебру  $As(\theta)$  в виде прямой суммы,  $As(\theta) = A_0(\theta) \oplus A_1(\theta)$ , где  $A_0(\theta) = \{a \in As(\theta) \mid a^\# = a\}$  — пространство эрмитовых элементов, а  $A_1(\theta) = \{a \in As(\theta) \mid a^\# = -a\}$  — пространство косоэрмитовых элементов.

Выберем невырожденные тензоры  $\theta', \tilde{\theta} \in L^{(1)}(\theta)$  и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:



в которой  $a \in \text{Jor } \theta$  — представитель тензора  $\tilde{\theta}$ , а  $a' \in \text{Jor } \theta'$  — тензора  $\tilde{\theta}'$ . Тогда  $\text{Jor } \theta = \lambda(\text{Jor } \theta')$ , где  $\lambda = M_{\tilde{\theta}}^{-1} M_{\theta'}$ . Из соотношения (1) пункта 7.3. следует, что  $\lambda, \lambda^{-1} \in \text{Jor } \theta$ , а поэтому  $As(\theta) \subset As(\theta')$ . Аналогично,  $As(\theta') \subset As(\theta)$  и поэтому алгебры  $As(\theta)$  и  $As(\theta')$  совпадают. Инволюция  $\#'$  в алгебре  $As \theta'$ , определяемая тензором  $\theta'$ , сопряжена инволюции  $\#$ ,  $\#' = \lambda^{-1} \circ \# \circ \lambda$ . Таким образом, смена образующего в  $L^{(1)}(\theta)$  приводит к «повороту» йордановой алгебры внутри алгебры  $As(\theta)$  и сопряжению инволюции.

**7.5.** Для описания структуры алгебры  $As \theta$  определим симметрическую форму  $F(a, b) = \text{tr}\{a, b^\#\}$ ,  $a, b \in As(\theta)$ . Подпространство вырождения  $\text{Ker } F$  совпадает с радикалом  $\text{Rad}(\theta)$  алгебры  $As(\theta)$ . Поэтому алгебра  $As(\theta)$  полупроста в том и только том случае, когда  $F$  — невырожденная симметрическая форма.

Из соотношения  $\delta_2 \theta(av_1, v_2) = \delta_2 \theta(v_1, a^\# v_2)$  следует, что  $\theta(av_1, \dots, v_{k+1}) = \theta(v_1, a^\# v_2, \dots, v_{k+1}) = \theta(v_1, v_2, a v_3, \dots, v_{k+1}) = \theta(a^\# v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ , а поскольку тензор  $\theta$  невырожден, то при  $k \geq 2$   $\# = \text{id}$  и, следовательно,  $As \theta$  — коммутативная алгебра.

Радикал  $\text{Rad}(\theta)$  алгебры  $As(\theta)$  является нильпотентным идеалом. Обозначим через  $l = l(\theta)$  степень нильпотентности этого идеала:  $(\text{Rad}(\theta))^{l+1} = 0$ , но  $(\text{Rad}(\theta))^l \neq 0$ . Чтобы указать более прямую связь между степенью нильпотентности  $l(\theta)$  и тензором  $\theta$ , введем следующее понятие.

Пусть  $(A, \#)$  — произвольная ассоциативная подалгебра в алгебре  $\text{End } V$ . Рассмотрим подпространство

$$\eta(A, \#) = \{ \lambda \in S^2 V^* \mid \lambda(av_1, v_2) = \lambda(v_1, a\#v_2), \forall v_1, v_2 \in V, \forall a \in A \}$$

и определим индекс тензора  $\theta$  следующим образом:

$$\text{ind}(\theta) = \min_{\lambda \in \eta(\text{As}\theta, \#)} (\min(n_+(\lambda), n_-(\lambda) + n_0(\lambda))), \quad (2)$$

где через  $n_{\pm}(\lambda)$  обозначен положительный (соответственно, отрицательный) индекс инерции, а через  $n_0(\lambda)$  — дефект квадратички  $\lambda \in S^2 V^*$ .

Иначе говоря, индекс тензора  $\theta$  равен наименьшей размерности максимальных изотропных подпространств квадратички  $\lambda \in \eta(\text{As}(\theta), \#)$ . Индекс инерции и степень нильпотентности связаны неравенством

$$\left[ \frac{1}{2} l(\theta) \right] \leq \frac{2}{\kappa(\theta)} \text{ind}(\theta), \quad (3)$$

где  $\kappa(\theta)$  — размерность минимального неприводимого представления полупростой алгебры  $\text{As}(\theta)/\text{Rad}(\theta)$ .

В качестве следствия из этого неравенства получаем следующее утверждение: если подпространство  $\eta(\text{As}(\theta), \#)$  содержит знакоопределенную невырожденную квадратичку, то алгебра  $\text{As}(\theta)$  полупроста.

**7.6. Реализация.** Укажем в начале условия реализации некоторой алгебры с инволюцией  $(A, \#) \subset \text{End } V$  как алгебры  $(\text{As}\theta, \#)$  для некоторого невырожденного симметрического тензора  $\theta$  в предположении, что подпространство  $\eta(A, \#)$  содержит невырожденную квадратичку  $h$ . В этом случае инволюция  $\#_h: \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ , порожденная этой квадратикой, при ограничении на алгебру  $A$  совпадает с инволюцией  $\#$ . Обозначим через  $\theta_A \in C_0^*(A) \otimes S^2 V^*$ , где  $C_0(A)$  — множество эрмитовых элементов (относительно  $\#_h$ ) централизатора  $C(A)$  алгебры  $A$  в  $\text{End } V$ , — квадратичку, определяемую соотношением:

$$\langle b, \theta_A \rangle(v_1, v_2) = h(bv_1, v_2), \quad (4)$$

где  $b \in C_0(A)$ ,  $v_1, v_2 \in V$ .

Эта квадратичка невырождена, поскольку  $\langle 1, \theta_A \rangle = h$ .

**Теорема 1.** Для произвольной алгебры с инволюцией  $(A, \#) \subset (\text{End } V, \#_h)$ , порожденной квадратикой  $h \in S^2 V^*$ , имеет место вложение  $(A, \#) \subset (\text{As}(\theta_A), \#)$ . Если централизатор  $C(A)$ , как алгебра над  $\mathbb{R}$ , порожден эрмитовой частью  $C_0(A)$ , а двойной централизатор  $C(C(A))$  совпадает с алгеброй  $A$ , то это вложение является изоморфизмом.

**Следствие.** Пусть  $A \subset \text{End } V$  — полупростая алгебра с инволюцией, порожденной квадратикой  $h$ , эрмитова часть  $C_0(A)$  централизатора которой порождает  $C(A)$ , то  $A = \text{As}(\theta_A)$ .

Если отбросить условия, что алгебра  $A$  представлена в

векторном пространстве  $V$  и тензор  $\theta$  лежит в  $W \otimes S^2 V^*$ , то предыдущую теорему можно дополнить.

**Теорема 2.** Пусть  $(A, \#)$  — унитарная полупростая конечномерная алгебра над  $\mathbf{R}$ , йорданова подалгебра  $\text{Jog}(A, \#) = \{a \in A, a^\# = a\}$  которой порождает  $A$ . Тогда алгебра  $(A, \#)$  может быть реализована как алгебра  $(As \theta_A, \#)$  для невырожденного симметрического тензора  $\theta_A \in \text{Jog}(A, \#)^* \otimes S^2 A^*$  на алгебре  $A$ , задаваемого формулой  $\langle b, \theta_A \rangle(a_1, a_2) = F_A(R_b a_1, a_2)$ .

Здесь через  $F_A(x, y)$  обозначена квадратика на алгебре  $A$ ;  $F_A(x, y) = \text{tr}(L_x \circ L_{y, \#})$ , а через  $L: A \rightarrow \text{End } A$  и  $R: A^0 \rightarrow \text{End } A$  обозначены левое и правое регулярные представления  $L_x(a) = xa$ ,  $R_x(a) = ax$ ,  $\forall x, a \in A$ .

И наконец, произвольная унитарная конечномерная коммутативная алгебра над  $\mathbf{R}$  может быть реализована как алгебра  $As(\theta_A)$  для симметрического тензора  $\theta_A \in A \otimes S^2 A^*$ , определяемого умножением:  $\theta_A(a_1, a_2) = a_1 a_2$ ,  $\forall a_1, a_2 \in A$ .

## § 8. ПРИМИТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ И КЛИФФОРДОВЫ СТРУКТУРЫ

**8.1. Примитивные тензоры.** Невырожденный симметрический тензор  $\theta \in W \otimes S^{k+1} V^*$  назовем *примитивным*, если нельзя указать такую цепь подпространств  $V^* = \mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U}_1 \supset \dots \supset \mathcal{U}_r = 0$ ,  $r > 1$ , и таких тензоров  $\theta_j \in W \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , что подпространство  $L(\theta)$  порождено тензорами вида  $v \lrcorner \delta \theta_j$ , где  $v \in \text{App } \mathcal{U}_j$ . Тензор  $\theta$  назовем *разложимым*, если  $\theta = \theta_1 + \dots + \theta_r$ , где  $\theta_i \in W \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_i$ , а  $\mathcal{U}_i \subset V^*$  — такие подпространства, что  $V^* = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$ .

Очевидно, что примитивные тензоры неразложимы.

Геометрически условие примитивности тензора  $\theta \in \alpha_x \otimes S^{k+1} \mathcal{U}_x$  означает, что  $R$ -плоскости  $L$  вида  $(x_{k+1}, \mathcal{U}_x, L(\theta))$  лежат в  $RI_l(x_k)$ , где  $l = \dim \mathcal{U}_x$ , но не лежат в замыканиях  $RI_{l'}(x_k)$ ,  $0 < l' < l$ . Такие  $R$ -плоскости также назовем *примитивными*.

Укажем некоторые связи между йордановой алгеброй  $\text{Jog } \theta$  и условиями разложимости и примитивности.

Во-первых, если тензор  $\theta$  примитивен, то  $\text{Jog } \theta$  — простая йорданова алгебра. Кроме того, разложению йордановой алгебры в прямую сумму идеалов отвечает соответствующее разложение тензора  $\theta$  в прямую сумму. Причем, если  $k \geq 2$ , то в разложении тензора  $\theta$  в сумму неразложимых слагаемые определены однозначно с точностью до перестановки. Этому разложению отвечает разложение алгебры  $As(\theta) = \text{Jog } \theta$  в сумму локальных артиновых алгебр над  $\mathbf{R}$ .

Полное описание структуры алгебр  $As(\theta)$  для примитивных тензоров дается в следующей теореме.

**Теорема.** (1). Тензор  $\theta \in W \otimes S^2 V^*$  примитивен в том и

только том случае, когда алгебра  $As(\theta)$  является алгеброй Клиффорда с  $r \leq 3$  образующими, а инволюция  $\#$  совпадает со стандартным инволютивным автоморфизмом клиффордовой алгебры. (2) Тензор  $\theta \in W \otimes S^{k+1}V^*$ ,  $k \geq 2$ , примитивен в том и только том случае, когда алгебра  $As \theta = \text{Jog } \theta$  изоморфна  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

Приведем набросок доказательства этой теоремы. В начале заметим, что если тензор  $\theta$  примитивен, то алгебра  $\text{Jog } \theta$  не содержит нетривиальных нильпотентов. Поэтому каждый оператор  $a \in \text{Jog } \theta$  полупрост. Далее, разложению характеристического многочлена оператора  $a \in \text{Jog } \theta$  на взаимно простые множители отвечает прямое разложение тензора  $\theta$ . Поэтому все элементы  $a \in \text{Jog } \theta$ , не являющиеся гомотетией, удовлетворяют неприводимому квадратному уравнению  $a^2 + pa + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим теперь ограничение формы  $F$ , ассоциированной с представлением алгебры  $As(\theta)$  в  $\text{End } V$  (см. п. 7.5), на подпространство  $\text{Jog}^0 \theta = \{a \in \text{Jog } \theta, \text{tr } a = 0\}$ . Эта форма отрицательно определена, а йорданово произведение может быть вычислено в ее терминах:  $\{a, b\} = \frac{1}{n} F(a, b)$ , где  $a, b \in \text{Jog}^0 \theta$ , а  $n = \dim V$ . Из этого следует, что  $As(\theta)$  является клиффордовой алгеброй над  $\text{Jog}^0 \theta$ , ассоциированной с квадратикой  $F$ . Осталось показать, что  $\dim \text{Jog} \theta \leq 4$  при  $k=1$ . С этой целью рассмотрим в клиффордовой алгебре  $As(\theta)$  элемент  $b = a_1 a_2 a_3 a_4$ , где  $a_i \in \text{Jog}^0 \theta$ . Тогда  $b^\# = b$ , следовательно,  $b \in \text{Jog} \theta$ . Но  $b^2 = b \cdot b^\# = 1$ , если  $a_1, a_2, a_3, a_4$  ортогональны (и длины 1) относительно квадратки  $F$ . Следовательно, в силу сказанного выше,  $b = \pm 1$ , откуда  $a_1 = \pm a_2 a_3 a_4$ , и тем самым  $a_1^2 = 1$ , что противоречит отрицательной определенности формы  $F$ .

**8.2. А-типы.** Назовем  $R$ -плоскость  $L \in RI_1(x_k)$  *регулярной*, если в ее представлении  $L = (x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$  подпространство  $L_0$  регулярно, т. е.  $L_0 = L(\theta)$  для некоторого невырожденного тензора  $\theta \in \alpha_x \oplus S^{k+1} \mathcal{U}$ . Скажем, что регулярная  $R$ -плоскость  $L = (x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$  имеет *А-тип*, где  $A$  — конечномерная ассоциативная алгебра с инволюцией, если алгебры  $A$  и  $As(\theta)$  изоморфны как алгебры с инволюцией. Теорема пункта 8.1 приводит к следующему результату.

**Теорема.** Примитивные  $R$ -плоскости регулярны и имеют А-тип, где  $A = Cl_r$  — алгебра Клиффорда с  $r \leq 3$  образующими при  $k=1$  и с  $r \leq 1$  образующей при  $k \geq 2$ . Алгебра  $As(\theta)$ , отвечающая примитивной  $R$ -плоскости  $L = (x_{k+1}, \mathcal{U}, L_0)$ , определяет в  $T_x / \mathcal{U}^0 = \text{coker}(\alpha_{k+1}|_L)$  структуру модуля над алгеброй Клиффорда.

**8.3. Коразмерности.** Укажем условия реализации  $Cl_r$ -типов и их коразмерности в грассманиане  $R$ -плоскостей.

**Теорема.** (1) Примитивные  $R$ -плоскости  $L \in RI_1(x_k)$  возможны при следующих значениях  $l, k, m = \dim \alpha$ :

$R$ -тип, при всех значениях  $k, l, m$ , кроме  $m=2, l \geq 2$  и  $m=1, l=2, k=2$ .

C-тип,  $\#-id$ , при всех значениях  $k, l=0, \text{ mod } 2, m$ , кроме  $m=2, l \geq 2, k=1$  и  $m=1, k=2, l=4$ .

$Cl_2 = H$ -тип, при всех значениях  $m \geq 3, l=0 \text{ mod } 4, k=1$ .

$Cl_3$ -тип, при всех значениях  $k=1, l=0 \text{ mod } 4, l \geq 8, m \geq 2 + \max\left(\frac{l_+}{l_-}, \frac{l_-}{l_+}\right)$ , где  $4l_+ = \dim \text{Ker}(C-1), 4l_- = \dim \text{Ker}(C+1)$ ,  $C$  — образующая центра алгебры  $Cl_3$  и  $l_+ \geq 1, l_- \geq 1$ .

(2) Коразмерности примитивных  $R$ -плоскостей данного типа в грассманиане всех  $R$ -плоскостей приведены в таблице:

тип	$R$	$C=Cl_1$	$Cl_2=H$	$Cl_3=H \oplus H, (l_+, l_-)$
$k=1$	1	$\frac{1}{4}(m-2)l^2 + 2$	$\frac{3}{8}(m-2)l^2 + \frac{1}{4}ml + 3$	$\frac{1}{4}(2m-3)l^2 - 4(m+2)l_+l_- + \frac{1}{2}ml + 4$
$k \geq 2$	1	$m \binom{k+l}{k+1} - 2m \binom{\frac{1}{2}l+k}{k+1} - \frac{1}{2}l^2 + 2$	—	—

Замечание. 1)  $Cl_3$ -типы делятся на подтипы, отвечающие парам натуральных чисел  $(l_+, l_-)$ , где  $\frac{1}{2}l = l_+ + l_-, l_+ \geq 1, l_- \geq 1$ . В таблице приведены коразмерности этих подтипов.

2) Из таблицы следует, что  $R$ -типы могут реализовываться при всех значениях  $k$  и  $m$  в коразмерности 1, наименьшая коразмерность  $C$ -типов равна  $mk$ , для  $H$ -типов эта коразмерность соответственно равна  $7m-9$ , а для  $Cl_3$ -типов —  $32m-52$ , где  $m \geq 3$ .

## § 9. ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ГРАССМАНИАНОВ

9.1. Фиксируем элемент  $x_k \in J^k(M, m)$ . Грассманиан интегральных плоскостей в картановском подпространстве  $C(x_k)$  будем обозначать через  $I_k(n, m) (=I(x_k))$ . Множество  $I_k(n, m)$  получается пересечением некоторого числа квадрик в грассмановом многообразии  $G_n(C(x_k))$ , а поэтому является алгебраическим многообразием. В следующих двух случаях топология этих грассманианов хорошо известна. Во-первых, если  $n=1$ , то условия интегрируемости отсутствуют и все 1-мерное подпространства в  $C(x_k)$  являются интегральными. Поэтому  $I_k(1, m) \simeq RP^m$ . Кроме того, если  $m=k=1$ , то распределение Картана на  $J^1(M, 1)$  совпадает со стандартной контактной структурой, и следовательно грассманиан  $I_1(n, 1)$  является грассманианом  $n$ -мерных лагранжевых подпространств в  $2n$ -мерном симплектическом пространстве  $C(x_1)$ . Его когомологии

с коэффициентами в  $Z_2$  вычислены Борелем:

$$H^*(I_1(n, 1); Z_2) = Z_2[\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_n^{(1)}] / ((\omega_1^{(1)})^2, \dots, (\omega_n^{(1)})^2),$$

где  $\omega_i^{(1)}$  — классы Штифеля — Уитни тавтологического расслоения над грассманианом.

Оба эти случая являются особыми с точки зрения геометрии дифференциальных уравнений. В этом параграфе мы опишем кольца когомологий интегральных грассмановых многообразий  $I_k(n, m)$  с коэффициентами в  $Z_2$  при условии, что  $km \geq 2$ . Мы также ограничимся грассманианом неориентированных плоскостей, в ориентированном случае результаты аналогичны [14].

Теорема ([14], [40]). Кольцо когомологий  $H^*(I_k(n, m); Z_2)$  до размерности  $n$  изоморфно кольцу полиномов  $Z_2[\omega_1^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)}]$  от классов Штифеля — Уитни  $\omega_i^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)}$  тавтологического расслоения над  $I_k(n, m)$ .

Дополнение. До размерности  $n-1$  классы Штифеля — Уитни  $\omega_i^{(k)}$  алгебраически независимы. В размерности  $n$  возможны алгебраические соотношения лишь при условии, что  $k=1, m=2$ .

**9.2. Грассманианы, ассоциированные с дифференциальными уравнениями.** Пусть  $\mathcal{E} \subset J^k(M, m)$  — система дифференциальных уравнений. Для каждого элемента  $x_k \in \mathcal{E}$  через  $I\mathcal{E}(x_k)$  обозначим грассманиан интегральных плоскостей, лежащих в касательном пространстве  $Tx_k(\mathcal{E})$ . Пространство  $I\mathcal{E}(x_k)$  назовем *интегральным грассманианом, ассоциированным с системой дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$* .

Описание когомологий этих пространств начнем с определенных систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Систему дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^1(M, m)$  назовем *определенной*, если  $\text{codim } \mathcal{E} = m$ , и в каждой точке  $x_1 \in \mathcal{E}$ ,  $x_1 = [N]_{x_1}^{-1}$  не все ковекторы  $\lambda \in T_{x_1}^*N \setminus 0$  характеристичны.

Теорема. (А) Пусть  $\mathcal{E} \subset J^1(M, m)$  — определенная система дифференциальных уравнений, тогда вложение  $I\mathcal{E}(x_1) \hookrightarrow I(x_1)$  индуцирует изоморфизм алгебр когомологий с коэффициентами в  $Z_2$  до размерности  $n$  во всех случаях, за исключением следующих:

1)  $m=2, n \geq 3$ . Здесь кольцо когомологий  $H^*(I\mathcal{E}(x_1); Z_2)$  до размерности  $n$  изоморфно алгебре полиномов  $Z_2[\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_{n-1}^{(1)}, U_{n-1}, \text{Sq } U_{n-1}]$ , где через  $\text{Sq}$  обозначен квадрат Стиррода, а степень  $U_{n-1}$  равна  $n-1$ .

2)  $m=3, n=2$ . В этом случае кольцо когомологий  $H^*(I\mathcal{E}(x_1); Z_2)$  до размерности 2 изоморфно алгебре полиномов  $Z_2[\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \alpha_1, \dots, \alpha_r]$ , где степени  $\alpha_i$  равны 2, а  $r$  — число компонент связности характеристического многообразия  $\text{Char}(\mathcal{E}, x_1)$ , над которыми ядерное расслоение  $k$  одномерно.

3)  $m=n=2$ . В этом случае интегральный грассманиан  $I\mathcal{E}(x_1)$  диффеоморфен тору  $S^1 \times S^2$ , если система  $\mathcal{E}$  гиперболична в точке  $x_1 \in \mathcal{E}$ , либо комплексной проективной прямой  $CP^1$ , если система  $\mathcal{E}$  эллиптически в точке  $x_1$ .

(Б) Для определенных систем  $\mathcal{E} \subset J^2(M, 1)$  вложение  $I\mathcal{E}(x_2) \subset I(x_2)$  индуцирует изоморфизм алгебр когомологий до размерности  $n$  во всех случаях, кроме  $n=2$ . В последнем случае  $I\mathcal{E}(x_2)$  диффеоморфен тору  $S^1 \times S^1$ , если  $\mathcal{E}$  гиперболична в точке  $x_2$ , и диффеоморфен  $CP^1$ , если  $\mathcal{E}$  эллиптически в этой точке.

9.3. Дифференциальные уравнения второго порядка  $\mathcal{E} \subset J^2(1)$  типа Монжа—Ампера можно определять при помощи эффективных  $n$ -форм на контактном многообразии  $J^1(1)$  ([11]). Это позволяет, по сравнению с общим случаем, опуститься на порядок ниже и определить грассманианы  $I(\omega) \subset I_1(n, 1)$ , ассоциированные с уравнениями Монжа—Ампера. Здесь  $\omega \in \Lambda^n(J^1(1))$  — дифференциальная  $n$ -форма, определяющая данное уравнение Монжа—Ампера, а  $I(\omega)$  — грассманиан  $n$ -мерных лагранжевых подпространств, аннулирующих эту форму.

В размерности  $n=2$  грассманианы  $I(\omega)$  устроены так же, как и в общем случае: если уравнение гиперболично, то  $I(\omega) = S^1 \times S^1$ , а если эллиптически, то  $I(\omega) = CP^1$ .

В размерности  $n=3$  с каждой эффективной формой  $\omega \in \Lambda^3(C^*(x_1))$  можно связать квадратичную форму  $q_\omega$  ([17]), которая различает орбиты симплектической группы  $Sp(6)$ :  $q_\omega(X, Y) = -1/4 \perp^2(X \perp \omega \wedge Y \perp \omega)$ . Если форма  $q_\omega$  невырождена, то ее сигнатура  $\text{sign } q_\omega$  равна либо 0, либо 2. Значение сигнатуры различает два типа орбит. Отметим, что при  $n=3$  существуют орбиты, не содержащие квазилинейных представителей. Именно им отвечают невырожденные формы  $q_\omega$ .

Теорема ([6]). (1) Если форма  $q_\omega$  невырождена, а  $\text{sign } q_\omega = 0$ , кольцо когомологий  $H^*(I(\omega); \mathbb{Z}_2)$  до размерности 3 изоморфно фактору алгебры  $\mathbb{Z}_2[\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, U_2]$  по идеалу, натянутому на полиномы  $(\omega_1^{(1)})^2$  и  $\omega_1^{(1)}U_2$ ; степень класса когомологий  $U_2$  равна 2. Если же  $\text{sign } q_\omega = 2$ , то кольцо когомологий  $H^*(I(\omega); \mathbb{Z}_2)$  до размерности 3 изоморфно фактору алгебры  $\mathbb{Z}_2[\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, U_2]$  по идеалу, порожденному  $(\omega_1^{(1)})^2$ .

(2) Если форма  $q_\omega$  вырождена, то для эллиптических дифференциальных уравнений кольцо когомологий  $H^*(I(\omega); \mathbb{Z}_2)$  до размерности 3 изоморфно фактору алгебры  $H^*(I_1(1, n); \mathbb{Z}_2)$  по идеалу, порожденному  $\omega_1^{(1)}\omega_2^{(1)}$ . Если же уравнение гиперболично в данной точке, то вложение  $I(\omega) \subset I_1(n, 1)$  индуцирует изоморфизм когомологий до размерности 3.

Чтобы сформулировать общий ( $n \geq 3$ ) результат, введем важное понятие степени нелинейности дифференциального уравнения Монжа—Ампера в данной точке  $x_i \in J^1(1)$ . Степенью нелинейности  $k(L)$  эффективной формы  $\omega \in \Lambda^n(C^*(x_1))$  относительно лагранжевого подпространства  $L \in I(\omega)$  назовем мини-

мальное среди таких чисел  $k$ , что любой  $k$ -вектор  $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_k$ ,  $X_i \in L$ , аннулирует форму  $\omega : X \lrcorner \omega = 0$ . Степенью нелинейности  $k(\omega)$  (в точке  $x_1$ ) дифференциального уравнения Монжа—Ампера, отвечающего эффективной  $n$ -форме  $\omega$ , назовем наименьшее среди чисел  $k(L)$  при условии, что  $L$  пробегает весь грассманиан  $I(\omega)$ .

Теорема ([6]). Если уравнение Монжа—Ампера квазилинейно в точке  $x_1$  (т. е.  $k(\omega) = 1$ ), а  $n \geq 4$ , то вложение  $I(\omega) \subset \subset I_1(n, 1)$  индуцирует изоморфизм когомологий до размерности  $n$ .

Дополнение. В работе [6] Л. В. Зильберглейт также доказал, что утверждение теоремы при некоторых дополнительных условиях остается справедливым, если степень нелинейности  $k$  этого уравнения и размерность базы  $n$  связаны неравенством  $n > k + 1/2 + \sqrt{2k + 1/4}$ .

9.4. Вернемся к общему случаю. Описать кольцо когомологий  $H^*(I\mathcal{E}(x_1); \mathbb{Z}_2)$  в общем случае задача неразрешимая. Однако можно надеяться, что это кольцо «стабилизируется» при продолжениях системы дифференциальных уравнений  $\mathcal{E}$ . Это утверждение, являющееся топологическим вариантом теоремы Картана—Кураишии о продолжении, и составляет содержание следующей теоремы.

Прежде чем формулировать эту теорему, введем понятие характеристической регулярности для систем дифференциальных уравнений первого порядка  $\mathcal{E} \subset J^1(M, m)$ . Отметим в связи с этим, что интегральная плоскость  $L$ , представляемая триадой  $(x_{l+2}, \mathcal{U}, L_0)$ , лежит в грассманиане  $I\mathcal{E}^{(l)}(x_{l+1})$ , если  $L_0 \subset \subset g^{(l)}(\mathcal{U}, x_1)$ , где  $g^{(l)}(\mathcal{U}, x_1) - l$ -е продолжение символа  $g(\mathcal{U}, x_1) = g(x_1) \cap v_x \otimes \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} \subset T_x^* N$ ,  $x_1 = [N]_x$ . Положим,  $\text{Char}_s(\mathcal{E}, x_1) = \{\mathcal{U} \subset T_x^* N, \dim \mathcal{U} = s \mid g(\mathcal{U}, x_1) \neq 0\}$ . Элементы этого множества будем называть  $s$ -мерными характеристиками. При  $s = 1$  1-мерные характеристики совпадают с обычными, так что  $\text{Char}_1(\mathcal{E}, x_1) = \text{Char}(\mathcal{E}, x_1)$ . Условие характеристичности подпространства  $\mathcal{U} \subset T_x^* N$  можно переформулировать иначе, если воспользоваться теоремой Гийемина [35]. А именно, подпространство  $U$  характеристично в том и только том случае, когда его комплексификация  $\mathcal{U}^{\mathbb{C}}$ , рассматриваемая как линейное подмногообразие в  $\mathbb{P}(T_x^* N)^{\mathbb{C}}$ , пересекается с комплексным характеристическим многообразием  $\text{Char}^{\mathbb{C}}(\mathcal{E}, x_1)$ . Обозначим через  $E_{l+1}(\mathcal{U}) \subset \subset S^{l+2} T_x^* N \otimes v_x$  подпространство, образованное такими тензорами  $\theta$ , что  $\delta\theta \in T_x^* N \otimes g^{(l)}(x_1) + \mathcal{U} \otimes S^{l+1} T_x^* N \otimes v_x$ , а через  $\xi_s^{(l+1)}$  — семейство векторных пространств над  $\text{Char}_{n-s}(\mathcal{E}, x_1)$ , слоем которого в точке  $\mathcal{U}$  является подпространство  $E_{l+1}(\mathcal{U})$ .

Назовем формально интегрируемую систему дифференциальных уравнений  $\mathcal{E} \subset J^1(M, m)$  характеристически регулярной в точке  $x_1$ , если семейства векторных пространств  $\xi_s^{(l+1)}$

являются векторными расслоениями над  $\text{Char}_{n-s}(\mathcal{E}, x_1)$  для всех значений  $1 \leq s \leq n-1$  и  $l$ , начиная с некоторого номера  $l_0$ .

**Теорема** ([14], [40]). Пусть  $\mathcal{E} \subset J^1(M, m)$  — формально интегрируемая система дифференциальных уравнений, комплексное характеристическое многообразие  $\text{Char}^c(\mathcal{E}, x_1)$  которой не лежит ни в какой гиперплоскости, и  $\dim \text{Char}^c(\mathcal{E}, x_1) > 0$ . Тогда если  $\mathcal{E}$  характеристически регулярно в точке  $x_1$ , то вложение  $I\mathcal{E}^{(l)}(x_{l+1}) \hookrightarrow I(x_{l+1})$ ,  $\pi_{l+1,1}(x_{l+1}) = x_1$ , при достаточно больших значениях  $l$ , индуцирует изоморфизм до размерности  $n$  включительно.

**Дополнение.** Поскольку  $\delta(E_{l+1}(\mathcal{Q})) \subset E_l(\mathcal{Q}) \otimes T_x^* N$ , то имеет смысл говорить о  $\delta$ -когомологиях Спенсера расслоений  $\xi_s^{(l)}$  для каждого значения  $s$ . Аналогично критерию формальной интегрируемости Гольдшмидта [32] может быть получен следующий критерий характеристической регулярности.

**Предложение.** Пусть  $\xi_s^{(l_0)}$  и  $\xi_s^{(l_0+1)}$  являются векторными расслоениями, слои которых 2-ацикличны. Тогда  $\xi_s^{(l)}$  являются векторными расслоениями для всех значений  $l \geq l_0$ .

## § 10. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**10.1.** Объединим интегральные грассманианы  $I(x_k)$ ,  $x_k \in J^k(M, m)$ , в тотальное пространство

$$I^k(M, m) = \bigcup_{x_k \in J^k(M, m)} I(x_k)$$

расслоения  $i_k: I^k(M, m) \rightarrow J^k(M, m)$ , где  $i_k(x_k, L) = x_k$ , если  $(x_k, L) \in I^k(M, m)$ ,  $L \in I(x_k)$ .

Каждое интегральное многообразие  $L \subset J^k(M, m)$  определяет *тангенциальное отображение*  $t_L: L \rightarrow I^k(M, m)$ ,  $t_L(x_k) = (x_k, T_{x_k}(L))$ , а каждый класс когомологий  $\omega \in H^j(I^k(M, m); \mathbb{Z}_2)$  — характеристический класс на интегральных многообразиях:  $L \mapsto \omega(L) = t_L^*(\omega) \in H^j(L; \mathbb{Z}_2)$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Из теоремы Хирша и теоремы из пункта 9.1 следует, что кольцо когомологий пространства  $I^k(M, m)$  до размерности  $n$  как алгебра над  $H^*(J^k(M, m); \mathbb{Z}_2)$  порождено классами Штифеля — Уитни тавтологического расслоения над  $I^k(M, m)$ . Учитывая, что расслоения  $\pi_{k, k-1}: J^k(M, m) \rightarrow J^{k-1}(M, m)$  при  $k \geq 2$  — аффинные, а расслоение  $\pi_{1,0}: J^1(M, m) \rightarrow M$  — суть расслоение грассманианов, получаем следующий результат.

**Теорема.** Кольцо когомологий  $H^*(I^k(M, m); \mathbb{Z}_2)$  до размерности  $n = \dim M - m$  как алгебра над  $H^*(J^k(M, m); \mathbb{Z}_2)$  порождено классами Штифеля — Уитни  $\omega_1^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)}$  тавтологического расслоения над  $I^k(M, m)$ . При этом алгебра  $H^*(J^k(M, m); \mathbb{Z}_2)$  как алгебра над  $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$  порождена клас-

сами Штифеля — Уитни  $\omega_1, \dots, \omega_n$  тавтологического расслоения над  $J^1(M, m)$ .

10.2. Пусть  $\mathcal{E} \subset J^k(M, m)$  — формально интегрируемая система дифференциальных уравнений, а  $I\mathcal{E}^{(l)} \subset I^{k+l}(M, m)$  — подмножество, образованное такими парами  $(x_{k+l}, L) \in I^{k+l}(M, m)$ , что  $L \in I\mathcal{E}^{(l)}(x_{k+l})$ , а  $x_{k+l} \in \mathcal{E}^{(l)}$ . Ограничение отображения  $i_{k+l}$  на  $I\mathcal{E}^{(l)}$  определяет отображение  $i_{k+l}: I\mathcal{E}^{(l)} \rightarrow \mathcal{E}^{(l)}$ , слоями которого являются грассманианы интегральных плоскостей, ассоциированные с данной системой дифференциальных уравнений. А поскольку вложения  $I\mathcal{E}^{(l)}(x_{k+l}) \hookrightarrow I(x_{k+l})$ , при достаточно больших  $l$ , индуцируют изоморфизмы когомологий в размерностях много больше  $n$ , то по теореме Уайтхеда  $n$ -мерный остов в клеточном разбиении  $I\mathcal{E}^{(l)}(x_{k+l})$ , при достаточно больших значениях  $l$ , можно выбрать гомотопным  $n$ -мерному остову в абсолютном грассманиане  $I(x_{k+l})$ . Поэтому, при больших  $l$ , для формально интегрируемых систем, удовлетворяющих условиям теоремы пункта 9.4, кольцо когомологий как модуль над  $H^*(\mathcal{E}^{(l)}; \mathbb{Z}_2)$  порождено классами Штифеля — Уитни  $\omega_1^{(k+l)}, \dots, \omega_n^{(k+l)}$  тавтологического расслоения над  $I\mathcal{E}^{(l)}$ . Отметим также, что поскольку расслоения  $\mathcal{E}^{(l)} \rightarrow \mathcal{E}^{(l-1)}$  при  $l \geq 1$  — аффинные, то  $H^*(\mathcal{E}^{(l)}; \mathbb{Z}_2) = H^*(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2)$ .

10.3. Оснащением интегрального многообразия распределения Картана  $\Gamma \subset \mathcal{E}^{(l)}$ , размерности меньшей  $n$ , назовем такое сечение  $h: \mathcal{E}^{(l)} \rightarrow I\mathcal{E}^{(l)}$  расслоения  $i_{k+l}$ , что  $h(x_{k+l}) \supset T_{x_{k+l}}(\Gamma)$  для всех элементов  $x_{k+l} \in \Gamma$ . Оснащенное  $(n-1)$ -мерное интегральное многообразие  $\Gamma \subset \mathcal{E}^{(l)}$  назовем *данными Коши*  $(\Gamma, h)$ . *Решением задачи Коши* с начальными данными  $(\Gamma, h)$  назовем такое интегральное многообразие  $L$  с границей  $\partial L$ , что  $L \subset \mathcal{E}^{(l)}$ ,  $\partial L = \Gamma$  и  $T_{x_{k+l}}(L) = h(x_{k+l})$ ,  $\forall x_{k+l} \in \partial L$ .

С каждым классом когомологий  $\omega \in H^{n-1}(I\mathcal{E}^{(l)}; \mathbb{Z}_2)$  и данными Коши  $(\Gamma, h)$  свяжем характеристическое число  $\chi_\omega(\Gamma, h) = \langle h^* \omega, Z_\Gamma \rangle$ , где  $Z_\Gamma \in H_{n-1}(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  — фундаментальный цикл многообразия  $\Gamma$ . В частности, для произвольного разбиения числа  $(n-1)$  в сумму  $n-1 = i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_s$ , где  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r$ ,  $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s$ , можно определить характеристическое число  $\chi_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s}(\Gamma, h) = \chi_\omega(\Gamma, h)$ , где  $\omega = \omega_{i_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_r} \cdot \omega_{j_1}^{(k+l)} \cdot \dots \cdot \omega_{j_s}^{(k+l)}$ .

Для формально интегрируемых систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы пункта 9.4, при достаточно больших значениях числа  $l$ , все характеристические числа исчерпываются числами вида  $\chi_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s}$ .

Теорема. Для разрешимости задачи Коши с начальными данными  $(\Gamma, h)$  необходимо, чтобы все характеристические числа  $\chi_\omega(\Gamma, h)$  были равны нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., О характеристическом классе, входящем в условия квантования. Функц. анализ и его прил., 1967, 1, № 1, 1—14 (РЖМат, 1969, 2Б744)
2. —, Нормальные формы для функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности. Функц. анализ и его прил., 1972, 6, № 4, 3—25 (РЖМат, 1973, 5А569)
3. —, Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. Функц. анализ и его прил., 1981, 15, № 4, 1—14 (РЖМат, 1982, 2А659)
4. Беришвили Г. Д., Многомерная симплектическая структура и пространство лагранжевых подпространств. Сообщ. АН ГССР, 1983, 110, № 2, 241—243 (РЖМат, 1984, 1А690)
5. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В., Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1985, 335 с. (РЖМат, 1986, 10А665К)
6. Зильбергейт Л. В., Характеристические классы решений уравнений Монжа—Ампера. Успехи мат. наук, 1984, 39, № 4, 159—160 (РЖМат, 1985, 2Б364)
7. Исихара А., Статистическая физика. Пер. с англ. М.: Мир, 1973, 471 с.
8. Карган Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Пер. с фр. М.: МГУ, 1982, 237 с. (РЖМат, 1966, 1А693К)
9. Крищенко А. П., О строении особенностей решений квазилинейных уравнений. Успехи мат. наук, 1976, 31, № 3, 219—220
10. —, О загибаниях  $R$ -многообразий. Вест. Моск. Ун-та. Мат. Мех., 1977, № 1, 17—20 (РЖМат, 1977, 10Б312)
11. Лычагин В. В., Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Успехи мат. наук, 1979, 34, № 1, 137—165 (РЖМат, 1979, 6А588)
12. —, Геометрические особенности решений нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1981, 261, № 6, 1299—1303 (РЖМат, 1982, 4Б471)
13. —, Геометрия и топология ударных волн. Докл. АН СССР, 1982, 264, № 3, 551—555 (РЖМат, 1982, 12А607)
14. —, Характеристические классы решений дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1983, 271, № 6, 1320—1324 (РЖМат, 1984, 2А632)
15. —, Топологические методы в геометрической теории дифференциальных уравнений. В сб. «Применение топологии в современном анализе». Воронеж, 1985, 106—123 (РЖМат, 1985, 8А706)
16. —, Особенности решений, спектральные последовательности и нормальные формы алгебр Ли векторных полей. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1987, 51, № 3, 584—612 (РЖМат, 1987, 10А298)
17. —, Рубцов В. Н., Локальная классификация дифференциальных уравнений Монжа—Ампера. Докл. АН СССР, 1983, 272, № 1, 34—38 (РЖМат, 1983, 12Б601)
18. Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия. Пер. с англ. М.: Мир, 1971, 256 с.
19. Маслов В. П., Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики. I, II. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, 1, № 1, 113—128; 1961, 1, № 5, 638—663 (РЖМат, 1962, 11Б224; 1963, 2Б262)
20. —, Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965, 549 с.
21. —, Операторные методы. М.: Наука, 1973, 543 с.
22. —, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977, 384 с. (РЖМат, 1978, 6Б481К)
23. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978, 352 с.

24. *Постон Т., Стюарт И.*, Теория катастроф и её приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1980, 607 с. (РЖМат, 1981, 7A554K)
  25. *Пригожин И.*, От существующего к возникающему. Пер. с англ. М.: Наука, 1985, 327 с.
  26. —, *Стенгерс И.*, Порядок из хаоса. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1986, 431 с.
  27. *Спенсер Д.*, Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Математика, Период. сб. перев. ин. статей, 1970, 14, № 2, 66—90; 1970, 14, № 3, 99—126 (РЖМат, 1970, 7A544, 10A386)
  28. *Фукс Д. Б.*, О характеристических классах Маслова—Арнольда. Докл. АН СССР, 1968, 178, № 2, 303—306 (РЖМат, 1968, 6A546)
  29. *Atiyah M. F., Bott R.*, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I. Ann. Math., 1967, 86, № 2, 374—407 (РЖМат, 1968, 3A534)
  30. *Borel A.*, La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes. Comment. math. helv., 1953, 27, № 2, 3, 165—197 (РЖМат, 1954, 2908)
  31. *Ehresmann C.*, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. Colloq. internat. Centre nat. rech. sci., Strasbourg, 1953, 97—110 (РЖМат, 1957, 2162)
  32. *Goldschmidt H.*, Existence theorems for analytic linear partial differential equations. Ann. Math., 1967, 86, № 2, 246—270 (РЖМат, 1969, 2A568)
  33. —, Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations. J. Differ. Geom., 1967, 1, № 3, 269—307 (РЖМат, 1969, 4A479)
  34. —, *Sternberg S.*, The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1973, 23, № 1, 203—267
  35. *Guillemin V.*, Some algebraic results concerning the characteristics of over-determined partial differential equations. Amer. J. Math., 1968, 90, № 1, 270—284 (РЖМат, 1969, 8A405)
  36. *Hermann R. E.*, Cartan's geometric theory of partial differential equations. Adv. Math., 1965, 1, № 3, 265—317 (РЖМат, 1967, 9A415)
  37. *Kuranishi M.*, Lectures on involutive systems of partial differential equations. (Publ. Soc. Mat. São Paulo). São Paulo, 1967, 77 pp. (РЖМат, 1968, 1B295K)
  38. *Lie S.*, Gesammelte Abhandlungen. Bd. 4. Leipzig: Teubner, 1929, 448 S.
  39. *Lychagin V. V.*, Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena. Acta appl. math., 1985, 3, № 2, 135—173 (РЖМат, 1985, 9B511)
  40. —, Topological aspects of geometrical theory of differential equations. Lect. Notes Math., 1986, 1214, 101—116 (РЖМат, 1987, 7A639)
  41. *Quillen D.*, Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations. Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1964, 96 pp.
  42. *Thom R.*, The two-fold way of catastrophe theory. Lect. Notes Math., 1976, 525, 235—252 (РЖМат, 1977, 6A412)
-