В. Т. Борухов, О компакте решений неравенства диссипации для релаксационных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 549–550

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 549–550

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.938

О КОМПАКТЕ РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВА ДИССИПАЦИИ ДЛЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. **В. Т. Борухов**

Рассмотрим линейную управляемую и наблюдаемую релаксационную односвязную систему

$$\Sigma = (A, b, c, d): \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t) + du(t), \quad t \geq 0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Напомним, что система Σ называется релаксационной [1], если $d \geq 0$ и функция $V(t) = ce^{At}b$ удовлетворяет условиям полной монотонности: $(-1)^k V^{(k)}(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$, $\forall k = \overline{0, \infty}$.

В приложениях теории релаксационных систем важное место занимает неравенство диссипации [1, 2], матричная форма которого для системы Σ имеет вид

$$-W(Q) \geq 0, \quad W(Q) := \begin{bmatrix} L_A Q & Qb - c' \\ b'Q - c & -2d \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $Q \in S_n$, S_n – пространство вещественных симметрических $n \times n$-матриц, $L_A Q := A'Q + QA$, штрих обозначает транспонирование, неравенство $-W(Q) \geq 0$ означает, что квадратичная форма $-z'W(Q)z$ $(z \in \mathbb{R}^{n+1})$ неотрицательно определена.

Далее, без ограничения общности будем считать, что выполнено условие $d > 0$, $\det A \neq 0$. Множество $\Omega = \{Q |\ W(Q) \leq 0\}$ решений неравенства (1) является в этом случае замкнутым выпуклым компактом в S_n размерности $\dim \Omega = n(n+1)/2$. При этом, согласно [3], Ω допускает стратификацию $\Omega = (\Omega_0 \setminus \Omega_1) \cup \ldots \cup (\Omega_n \setminus \Omega_{n+1})$, где $\Omega_0 = \Omega$ $(\Omega_{n+1} = \emptyset)$, $\Omega_i \setminus \Omega_{i+1}$ $\forall i = \overline{1, n}$ – гладкие многообразия размерности $(n-i)(n+i+2)/2$, $\Omega_1 = \partial\Omega$ – граница Ω, Ω_i $\forall i = \overline{2, n}$ – полуалгебраические множества расположенных на $\partial\Omega$ особых точек кратности не меньше i алгебраического множества $P_1 = \{Q |\operatorname{rank} W(Q) \leq n\}$. Множество Ω_i имеет вид $\Omega_i = P_i \cap \partial\Omega$, где $P_i = \{Q |\operatorname{rank} W(Q) \leq n - i + 1\}$. Алгебраические множества P_i $\forall i = \overline{1, n}$ образуют фильтрацию

$$S_n =: P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n \supset P_{n+1} = \emptyset \tag{2}$$

пространства S_n. В работе [4] показано, что совокупность Ω_n особых точек максимальной кратности полуалгебраического множества Ω имеет мощность 2^n, $\Omega_n = P_n$ и, кроме того, Ω_n совпадает со множеством симметрических вещественных решений алгебраического уравнения Риккати

$$R(Q) := L_A Q + (2d)^{-1}(Qb - c')(b'Q - c) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим разрешающий многогранник $\operatorname{conv} \Omega_n$ для неравенства диссипации (1). Геометрические свойства многогранника $\operatorname{conv} \Omega_n$ изучались в работах [5, 6], из которых, в частности, следует, что $\dim \operatorname{conv} \Omega_n = \dim \Omega$ и Ω_n – множество вершин $\operatorname{conv} \Omega_n$. Целью настоящей работы является описание класса граней $\operatorname{conv} \Omega_n$, лежащих на границе множества Ω.

Обозначим через $\mathcal{L}_k$ объединение аффинных плоскостей размерности k, составленных из аффинных оболочек подмножеств множества Ω_n, а через L_k объединение k-мерных граней разрешающего многогранника. Определим индекс m_j, полагая

$$m_j = \begin{cases} n - j - 1 & \text{для} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n-5\}, \\ l + 1 & \text{для} \quad j \in \{n - 2l, n - 2l + 1\}, \quad l = 1, 2. \end{cases} \tag{4}$$

Класс плоскостей, принадлежащих фильтрации (2), характеризует

Теорема 1. *Справедливы включения* $\mathcal{L}_{m_j - 1} \subseteq P_j$ $\forall j = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Пусть Q_i, $i = \overline{1, m_j}$, – особые точки кратности n такие, что $\dim \operatorname{aff}\{Q_i | i = \overline{1, m_j}\} = m_j - 1$. Образуем матрицу $Q_0 = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i Q_i$, $\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m_j}$, которая соответствует произвольной точке из плоскости, натянутой на Q_i, $i = \overline{1, m_j}$.

Запишем P_j в виде $P_j = \{Q : \operatorname{rank} R(Q) \le n - j\}$. Применим оператор Риккати $R : S_n \to S_n$, действие которого определено формулой (3), к матрице Q_0. Имеем $R(Q_0) = L_{A-\frac{1}{2d}bc}Q_0 + \dfrac{1}{2d}(Q_0bb'Q_0 + +c'c)$, где

$$L_{A-\frac{1}{2d}bc}Q_0 = \Big(A' - \frac{1}{2d}c'b'\Big)Q_0 + Q_0\Big(A - \frac{1}{2d}bc\Big) = \sum_{i=1}^{m_j}\alpha_i\bigg(\Big(A' - \frac{1}{2d}c'b'\Big)Q_i + Q_i\Big(A - \frac{1}{2d}bc\Big)\bigg) =$$

$$= -\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{m_j}\alpha_i(Q_ibb'Q_i + c'c) = -\frac{1}{2d}\bigg(\sum_{i=1}^{m_j}\alpha_iQ_ibb'Q_i + c'c\bigg).$$

Тогда

$$2dR(Q_0) = Q_0bb'Q_0 - \sum_{i=1}^{m_j}\alpha_iQ_ibb'Q_i. \tag{5}$$

Таким образом, $\operatorname{rank} R(Q_0) \le m_j+1$ для $j \in \{1, \ldots, n-5\}$ и, следовательно, $Q_0 \in P_j$, где $j = n-m_j-1$. Так как Q_0 – произвольная точка из плоскости, натянутой на $n-j-1$ особых точек, то на P_j лежит вся эта плоскость.

Далее преобразуем правую часть выражения (5). Пусть $\gamma_{m_j} := \{(i,l)|\ 1 \le i < l \le m_j\}$, тогда

$$2dR(Q_0) = \sum_{i=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_j}\alpha_i\alpha_lQ_ibb'Q_l - \sum_{i=1}^{m_j}\alpha_iQ_ibb'Q_i = \sum_{i=1}^{m_j}\alpha_i(\alpha_i-1)Q_ibb'Q_i + \sum_{i=1}^{m_j}\sum_{l=1,\ l\ne i}^{m_j}\alpha_i\alpha_lQ_ibb'Q_l =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_j}\sum_{l=1,\ l\ne i}^{m_j}\alpha_i\alpha_lQ_ibb'Q_l - \sum_{i=1}^{m_j}\sum_{l=1,\ l\ne i}^{m_j}\alpha_i\alpha_lQ_ibb'Q_i = \sum_{i=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_j}\alpha_i\alpha_lQ_ibb'(Q_l - Q_i) =$$

$$= \sum_{(i,l)\in\gamma_{m_j}}\alpha_i\alpha_l(Q_ibb'(Q_l-Q_i) + Q_lbb'(Q_i-Q_l)) = -\sum_{(i,l)\in\gamma_{m_j}}\alpha_i\alpha_l(Q_l-Q_i)bb'(Q_l-Q_i).$$

Получаем, что $\operatorname{rank} R(Q_0) \le m_j(m_j-1)/2$ и, следовательно, $Q_0 \in P_j$, где $j = n - m_j(m_j-1)/2$. Значит, на P_j лежат плоскости, натянутые на $m_j = [(\sqrt{8(n-i)+1}+1)/2]$ особых точек ($[\cdot]$ – целая часть числа).

Итак, $m_j = \max\{n-j-1,\ [(\sqrt{8(n-j)+1}+1)/2]\}$, откуда и вытекает (4). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Справедливы включения* $L_{m_j-1} \subseteq \mathcal{L}_{m_j-1}$, $L_{m_j-1} \subseteq \Omega_j$ $\forall j = \overline{1, n-1}$.

Следствие 2. *На границе множества* Ω *лежат: 1) ребра для* $n = 2, 3, \ldots$; *2) 2-мерные грани для* $n = 4, 5, \ldots$; *3)* $(n-3)$ *-мерные грани для* $n \ge 6$ *многогранника* $\operatorname{conv}\Omega_n$.

Напомним, что отрезок, соединяющий две вершины и не принадлежащий ни одной собственной грани многогранника, называется диагональю многогранника.

Следствие 3. *Выпуклая оболочка размерности* $m_j - 1$ $\forall j = \overline{1, n-1}$ *подмножества вершин* $\operatorname{conv}\Omega_n$ *принадлежит границе многогранника* $\operatorname{conv}\Omega_n$. *В частности,* $\operatorname{conv}\Omega_n$ *не имеет диагоналей.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willems J.C.* // J. of Franklin Inst. 1978. V. 301. № 6. P. 605–621.
2. *Якубович В.А.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
3. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 3–14.
4. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Автоматика и телемеханика. 2003. № 4. С. 18–29.
5. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 6. С. 21–23.
6. *Борухов В.Т.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 158–166.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
16.04.2004 г.