ОКТЯБРЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 10

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223

Ш. А. АЛИМОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в области $\Omega_m \subset R^n$

$$\Omega_m = \{x \in R^n : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + |x_n|^m < 1\}, \quad m > 1,$$

с границей $\partial\Omega_m$ и экватором $S = \{x \in \partial\Omega_m : x_n = 0\}$ равномерно эллиптический оператор

$$A(x, D) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c,$$

коэффициенты a_{jk}, b, $c \leqslant 0$ которого зависят только от $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и являются достаточно гладкими.

В настоящй работе изучается следующая краевая задача:

$$A(x, D)u(x) = 0, \quad x \in \Omega_m, \tag{A}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega_m, \tag{B}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S. \tag{C}$$

Решением задачи (A)—(C) назовем функцию из класса $C^2(\Omega_m) \cap C^1(\overline{\Omega}_m)$, удовлетворяющую условиям (A)—(C) в классическом смысле.

Исследование задачи с наклонной производной в n-мерной области при $n \geqslant 3$ в случае выхода направления дифференцирования в касательную плоскость было начато в работах А. В. Бицадзе [1] (см. подробнее [2]) и Р. Боррелли [3] и продолжено в работах [4, 5]; дальнейшие исследования в более общем случае проводились в работах [6—11] и ряде других.

В данной работе рассматривается вопрос о гладкости решения задачи (A)—(C) в классах Гёльдера $C^\lambda(\overline{\Omega}_m)$, $\overline{\Omega}_m = \Omega_m + \partial\Omega_m$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda > 1 - \frac{1}{m}$, *причем число* $\lambda + \frac{1}{m}$ *не является целым. Для любой функции* $\varphi \in C^\lambda(\partial\Omega_m)$ *решение задачи* (A)—(C) *существует и принадлежит классу* $C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\overline{\Omega}_m)$.

Доказательство теоремы 1 основано на изучении поведения решения однородного эллиптического уравнения и его производных вблизи гра-

ницы в зависимости от расстояния до границы. При этом существенно используется оценка производных функции Грина задачи Дирихле.

Теорема 1 является уточнением одного результата Б. Винцеля [11]. Следующая теорема свидетельствует о точности найденного в теореме 1 показателя гладкости.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda>0$, *причем число* $\lambda+\frac{1}{m}$ *не является целым. Существует функция* $\varphi\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ *такая, что решение задачи (A)—(C) при любом* $\varepsilon>0$ *не принадлежит классу* $C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}(\overline{\Omega}_m)$.

Отметим также, что утверждение теоремы 1 становится неверным, если $\lambda+\frac{1}{m}$ является целым числом.

§ 2. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Основные утверждения, доказываемые в этом параграфе, носят вспомогательный характер и в существенном известны (см. [12, 13]).

Пусть Ω — произвольная выпуклая n-мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Для любой точки $x\in\Omega$ обозначим символом $\bar{x}$ точку $\partial\Omega$, наименее удаленную от x. Таким образом, для любой точки $x\in\Omega$ и любой точки $y\in\partial\Omega$ выполняется неравенство

$$|x-\bar{x}|\leqslant|x-y|. \tag{2.1}$$

Заметим, что для точек x, близких к границе, направление вектора $x-\bar{x}$ совпадает с направлением внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\bar{x}$.

Рассмотрим в области Ω равномерно эллиптический оператор с достаточно гладкими коэффициентами

$$L(x, D)=\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x), \tag{2.2}$$

$$c\leqslant 0.$$

Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора $L(x, D)$:

$$L(x, D)G(x, y)=\delta(x-y),\quad x\in\Omega,\quad y\in\Omega,$$

$$G(x, y)=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad y\in\Omega.$$

Положим для $x\in\Omega$, $y\in\partial\Omega$

$$P(x, y)=\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x, y), \tag{2.3}$$

где ν — вектор конормали. Тогда любая функция $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, являющаяся решением уравнения

$$L(x, D)u(x)=0,$$

представляется в виде

$$u(x)=\int_{\partial\Omega} P(x, y)u(y)ds(y). \tag{2.4}$$

Для производных функции Грина справедлива следующая оценка (см. [14]):

$$|D_x^\alpha G(x, y)| \leqslant C|x-y|^{2-n-|\alpha|}, \tag{2.5}$$

где α — мультииндекс, а x и y из $\overline{\Omega}$.

Из этой оценки, в частности, следует, что

$$|D_x^\alpha P(x, y)| \leqslant C|x-y|^{1-n-|\alpha|}, \quad x\in\Omega, \quad y\in\partial\Omega. \tag{2.6}$$

В дальнейшем символом C будет обозначаться положительная постоянная, не обязательно одна и та же.

Лемма 2.1. *Пусть $Q(y, h)$ — функция, определенная при $0<h<1$ и $y\in R^{n-1}$ и удовлетворяющая при $|y|<1$ условию*

$$|Q(y, h)| \leqslant C(h+|y|)^{1-n-\mu}, \quad \mu>0.$$

Пусть для любой бесконечно дифференцируемой в шаре $\bar{B}_{n-1}=\{|y|\leqslant 1\}$ функции φ интеграл

$$\int\limits_{B_{n-1}} Q(y, h)\varphi(y)dy$$

ограничен по h. Тогда если $0\leqslant\lambda<\mu$, то для любой функции $\varphi\in C^\lambda(\bar{B}_{n-1})$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(y, h)\varphi(y)dy\right| \leqslant Ch^{\lambda-\mu}.$$

Доказательство. Пусть $0\leqslant\lambda<\mu$ и $\varphi\in C^\lambda(\bar{B}_{n-1})$. Положим

$$\psi(y)=\varphi(y)-\sum_{|\alpha|\leqslant[\lambda]}\frac{D^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}y^\alpha.$$

Очевидно, $|\psi(y)|\leqslant C|y|^\lambda$. В таком случае

$$\left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(y, h)\varphi(y)dy\right| \leqslant \left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(y, h)\psi(y)dy\right| + C \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{B_{n-1}} (h+|y|)^{1-n-\mu}|y|^\lambda dy + C \leqslant Ch^{\lambda-\mu}.$$

В дальнейшем до конца этого параграфа будет предполагаться, что $u(x)$ — функция, принадлежащая $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

Лемма 2.2. *Пусть $\lambda\geqslant 0$ и α — мультииндекс с $|\alpha|>\lambda$. Пусть $L(x, D)u(x)=0$, $x\in\Omega$. Если $u\in C^\lambda(\partial\Omega)$, то*

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-|\alpha|}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Из равенства (1.4) следует, что

$$D^\alpha u(x)=\int\limits_{\partial\Omega} D^\alpha P(x, y)u(y)ds(y).$$

Фиксируем точку $\bar{x}\in\partial\Omega$ и проведем через нее плоскость, касательную к поверхности $\partial\Omega$. Рассмотрим такую окрестность $V\subset\partial\Omega$ точки $\bar{x}$, проекция которой на касательную плоскость представляет собой круг с центром в точке $\bar{x}$. Положим $h=|x-\bar{x}|$ и покажем, что функция $Q(y, h)=D^\alpha P(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1 с $\mu=|\alpha|$.

Заметим, что из неравенств

$$|x-\bar{x}|\leqslant|x-y|,\quad x\in\Omega,\quad y\in\partial\Omega,$$
$$|\bar{x}-y|\leqslant|\bar{x}-x|+|x-y|\leqslant 2|x-y|$$

вытекает следующее неравенство:

$$|x-\bar{x}|+|\bar{x}-y|\leqslant 3|x-y|.$$

Из этого неравенства и (1.6) следует оценка

$$|D^{\alpha}P(x,y)|\leqslant C(h+|y-\bar{x}|)^{1-n-|\alpha|},\quad h=|x-\bar{x}|.$$

Наконец, заметим, что если $\varphi\in C^{\infty}(\partial\Omega)$, то

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} D^{\alpha}P(x,y)\varphi(y)\,ds(y)\right|\leqslant C.$$

Таким образом, можно применить лемму 2.1, из которой следует требуемая оценка (2.7).

Лемма 2.3. *Пусть* $0<\lambda<1$. *Если* $|\nabla u|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-1}$, *то* $|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda}$.

Доказательство. Пусть $h=|x-\bar{x}|$, $l=\dfrac{1}{h}(x-\bar{x})$. Тогда

$$u(x)-u(\bar{x})=u(\bar{x}+hl)-u(\bar{x})=\int\limits_0^h l\frac{\partial u}{\partial l}(\bar{x}+tl)\,dt.$$

Отсюда

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant C\int\limits_0^h t^{\lambda-1}dt=Ch^{\lambda}.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $0<\lambda<1$. *Если* $|\nabla u(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-1}$, *то* $u\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — две любые точки $\partial\Omega$, $h=|\bar{x}-\bar{y}|$. Выберем соответствующие им точки $x\in\Omega$ и $y\in\Omega$ так, чтобы выполнялись равенства

$$|x-\bar{x}|=|y-\bar{y}|=h.$$

Тогда

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|\nabla u(\xi)|\,|x-y|\leqslant Ch^{\lambda-1}|x-y|\leqslant Ch^{\lambda}.$$

Далее, в силу леммы 2.3

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant Ch^{\lambda},\quad |u(y)-u(\bar{y})|\leqslant Ch^{\lambda}.$$

Следовательно, $|u(\bar{x})-u(\bar{y})|\leqslant Ch^{\lambda}$.

Лемма 2.5. *Пусть* $0<\lambda<1$. *Если* $|\nabla u(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-1}$, *то* $u\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $x\in\Omega$, $y\in\Omega$ и $|x-y|=h$. Требуется доказать, что

$$|u(x)-u(y)|\leqslant Ch^{\lambda}.$$

Предположим, что $|y-\bar{y}|\geqslant|x-\bar{x}|$, т. е. y лежит дальше от границы, чем x. Рассмотрим два случая.

1) $|x-\bar{x}|\geqslant h$. В этом случае $|u(x)-u(y)|\leqslant|\nabla u(\xi)|\,|x-y|\leqslant Ch^{\lambda-1}|x-y|=Ch^{\lambda}$.

2) $|x-\bar{x}|<h$. В этом случае $|y-\bar{y}|\leqslant|y-\bar{x}|\leqslant|y-x|+|x-\bar{x}|\leqslant 2h$.

Тогда, согласно лемме 2.3,

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant Ch^{\lambda},\quad |u(y)-u(\bar{y})|\leqslant Ch^{\lambda}.$$

Далее, в силу леммы 2.4

$$|u(\bar{x})-u(\bar{y})|\leqslant C|\bar{x}-\bar{y}|^{\lambda}\leqslant Ch^{\lambda}.$$

Отсюда следует требуемая оценка.

Лемма 2.6. *Пусть $0<\lambda<l$, где l — натуральное число, а λ не является целым. Пусть для некоторой функции $u\in C^{l}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ выполняется оценка*

$$\sum_{|\alpha|=l}|D^{\alpha}u(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-l}. \tag{2.8}$$

Тогда $u(x)\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если выполняется оценка (2.8), то для любого мультииндекса α такого, что $\lambda<|\alpha|\leqslant l$, имеет место неравенство

$$|D^{\alpha}u(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-|\alpha|}. \tag{2.9}$$

Действительно, если $|\alpha|=l-1$ и $|\alpha|>\lambda$, то, фиксировав какую-нибудь точку $x_0\in\Omega$, лежащую на продолжении отрезка $[\bar{x}, x]$, получим

$$|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial l}D^{\alpha}u(y)\,dl\right|\leqslant C\int_{|x-\bar{x}|}^{1}t^{\lambda-l}dt\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-l+1}.$$

Аналогично получается оценка (2.9) для любого α, $\lambda<|\alpha|\leqslant l$.

Фиксируем теперь произвольный мультииндекс α с $|\alpha|=[\lambda]$. Для этого α из (2.9) следует оценка

$$|\nabla D^{\alpha}u(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-|\alpha|-1},$$

и так как $0<\lambda-|\alpha|<1$, то, согласно лемме 2.5, $D^{\alpha}u\in C^{\lambda-|\alpha|}(\bar{\Omega})$. Это и означает, что $u\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

Лемма 2.7. *Пусть λ — положительное нецелое число. Пусть $L(x, D)u(x)=0$. Если $u\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то $u\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.*

Доказательство следует из лемм 2.2 и 2.6.

Следующие четыре леммы относятся к поведению решения задачи

$$L(x, D)u(x)=f(x),\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.10}$$

вблизи границы. Решение этой краевой задачи представляется в следующем виде:

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x, y)f(y)\,dy, \tag{2.11}$$

где $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора $L(x, D)$.

Лемма 2.8. *Пусть $x\in\Omega$, $\xi\in\Omega$. Тогда*

$$\int_{\Omega}|\nabla G(x, y)-\nabla G(\xi, y)|\leqslant C|x-\xi|\ln\frac{C}{|x-\xi|}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Положим $h=|x-\xi|$ и разобъем интеграл в левой части (2.12) на две части

$$\int_{\Omega} = \int_{|x-y|\leqslant 2h} + \int_{|x-y|>2h} = I_1 + I_2.$$

Оценим вначале I_1:

$$I_1 \leqslant \int_{|x-y|\leqslant 2h} |\nabla G(x, y)|\, dy + \int_{|x-y|\leqslant 2h} |\nabla G(\xi, y)|\, dy.$$

Применяя оценку (2.5) с $|\alpha|=1$, получим

$$\int_{|x-y|\leqslant 2h} |\nabla G(x, y)|\, dy \leqslant C \int_{|x-y|\leqslant 2h} |x-y|^{1-n} dy \leqslant Ch.$$

Так как $|\xi-y| \leqslant |\xi-x| + |x-y| \leqslant 3h$, то, применяя снова оценку (2.5), будем иметь

$$\int_{|x-y|\leqslant 2h} |\nabla G(\xi, y)|\, dy \leqslant \int_{|\xi-y|\leqslant 3h} |\nabla G(\xi, y)|\, dy \leqslant C \int_{|\xi-y|\leqslant 3h} |\xi-y|^{1-n} dy \leqslant Ch.$$

Следовательно, $I_1 = O(h)$.

Оценим теперь I_2. Воспользовавшись формулой Лагранжа, получим

$$|\nabla G(x, y) - \nabla G(\xi, y)| \leqslant \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} G(z, y)| \cdot |x-\xi|,$$

где z — некоторая точка отрезка $[x, \xi]$. Сумму в правой части можно оценить, применив (2.5). В результате получим неравенство

$$|\nabla G(x, y) - \nabla G(\xi, y)| \leqslant C |z-y|^{-n} h. \tag{2.13}$$

Напомним, что $h = |x-\xi|$. Поэтому из неравенства $|x-y| \geqslant 2h$ следует $|\xi-y| \geqslant h$. Тогда

$$h + |x-y| \leqslant |\xi-z| + |z-y| + |x-z| + |z-y| = h + 2|z-y|.$$

Отсюда $|x-y| \leqslant 2|z-y|$, и из (2.13) получаем

$$|\nabla G(x, y) - \nabla G(\xi, y)| \leqslant C |x-y|^{-n} h.$$

Следовательно,

$$I_2 \leqslant C \int_{|x-y|\geqslant 2h} |x-y|^{-n} h\, dy \leqslant Ch \ln \frac{C}{h}.$$

Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.9. *Пусть $h>0$ и $0<t<h$. Положим $S_t = \{y \in \Omega : |y-\bar{y}| = t\}$.*

Тогда если $|x-\bar{x}| \geqslant 2h$, то

$$\int_{S_t} |\nabla G(x, y)|\, ds(y) \leqslant C \ln \frac{C}{h}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$ и $|x-\bar{x}| \geqslant 2h$. Обозначим символом x_t точку пересечения отрезка $[x, \bar{x}]$ с поверхностью S_t. Очевидно, для любой точки $y \in S_t$

$$|x-x_t| \leqslant |x-y|. \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что

$$|x_t-y| \leqslant |x_t-x| + |x-y| \leqslant 2|x-y|. \tag{2.15}$$

Так как $|x-x_t|=|x-\bar{x}|-t\geqslant 2h-t\geqslant h$, то из неравенства (2.14) следует, что $h\leqslant|x-y|$. Складывая это неравенство с (2.15), получаем

$$h+|x_t-y|\leqslant 3|x-y|.$$

Из этого неравенства и оценки (2.5), взятой при $|\alpha|=1$, следует

$$|\nabla G(x, y)|\leqslant C|x-y|^{1-n}\leqslant C(h+|x_t-y|)^{1-n},\quad y\in S_t.$$

Отсюда

$$\int\limits_{S_t}|\nabla G(x, y)|\,ds(y)\leqslant C\int\limits_{S_t}(h+|x_t-y|)^{1-n}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^1(h+r)^{1-n}r^{n-2}dr\leqslant C\ln\frac{C}{h}.$$

Лемма 2.10. *Пусть* $0<\mu<1$. *Пусть* $u\in C(\bar{\Omega})$ *и для любых точек* $x\in\Omega$ *и* $y\in\Omega$ *таких, что* $|x-\bar{x}|\geqslant|x-y|$, $|y-\bar{y}|\geqslant|x-y|$, *выполняется оценка*

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y|^{\mu}.$$

Тогда $u\in C^{\mu}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что для любой точки $x\in\Omega$ выполняется неравенство

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\mu}.$$

Положим $x_k=2^{-k}(x-\bar{x})+\bar{x}$. Тогда $|x_k-x_{k+1}|=|x_{k+1}-\bar{x}|$, и поэтому

$$|u(x_k)-u(x_{k+1})|\leqslant C|x_k-x_{k+1}|^{\mu}=C2^{-\mu k}|x-\bar{x}|^{\mu}. \tag{2.16}$$

Заметим теперь, что

$$u(x)-u(\bar{x})=\sum_{k=0}^{\infty}[u(x_k)-u(x_{k+1})].$$

В таком случае, применяя оценку (2.16), получим

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x-\bar{x}|^{\mu}}{2^{\mu k}}=C|x-\bar{x}|^{\mu}.$$

Лемма 2.11. *Пусть* $0<\lambda<1$. *Пусть* $u(x)$ *является решением задачи (2.10) с функцией* f, *удовлетворяющей условию*

$$|f(x)|\leqslant C|x-\bar{x}|^{\lambda-1}. \tag{2.17}$$

Тогда для любого $\mu<\lambda$ *функция* u *принадлежит классу* $C^{1+\mu}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть x и ξ — две произвольные точки области Ω. Обозначим $h=|x-\xi|$ и предположим, что $|x-\bar{x}|\geqslant 2h$, $|\xi-\bar{\xi}|\geqslant 2h$. Если доказать, что

$$|\nabla u(x)-\nabla u(\xi)|\leqslant Ch^{\lambda}\ln\frac{1}{h}, \tag{2.18}$$

то утверждение леммы 2.11 будет следовать из леммы 2.10.

Итак, достаточно доказать оценку (2.18). Воспользуемся для этого равенством (2.11). Из этого равенства получаем

$$\nabla u(x)-\nabla u(\xi)=\int\limits_{\Omega}[\nabla G(x, y)-\nabla G(\xi, y)]\,f(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$|\nabla u(x)-\nabla u(\xi)|\leqslant\int\limits_{\Omega}|\nabla G(x,\ y)-\nabla G(\xi,\ y)|\cdot|f(y)|\,dy.$$

Для того чтобы оценить интеграл, разобъем область Ω на две части:

$$\Omega_1=\{y\in\Omega\ :\ |y-\bar{y}|\geqslant h\},$$
$$\Omega_2=\{y\in\Omega\ :\ |y-\bar{y}|<h\}.$$

Оценим вначале интеграл по множеству Ω_1. Используя условие (2.17) и применяя лемму 2.8, получим

$$\int\limits_{\Omega_1}|\nabla G(x,\ y)-\nabla G(\xi,\ y)|\,|f(y)|\,dy\leqslant Ch^{\lambda-1}\int\limits_{\Omega}|\nabla G(x,\ y)-\nabla G(\xi,\ y)|\,dy\leqslant$$
$$\leqslant Ch^{\lambda-1}h\ln\frac{C}{h}=Ch\ln\frac{C}{h}.$$

Оценим теперь интеграл по Ω_2. Используя снова условие (2.17) и применяя лемму 2.9, получим

$$\int\limits_{\Omega_2}|\nabla G(x,\ y)-\nabla G(\xi,\ y)|\,|f(y)|\,dy\leqslant\int\limits_0^h dt\int\limits_{S_t}|\nabla G(x,\ y)-$$
$$-\nabla G(\xi,\ y)|\,|f(y)|\,ds(y)\leqslant C\int\limits_0^h t^{\lambda-1}dt\int\limits_{S_t}(|\nabla G(x,\ y)|+$$
$$+|\nabla G(\xi,\ y)|)\,ds(y)\leqslant C\int\limits_0^h t^{\lambda-1}\ln\frac{1}{h}\,dt=Ch^{\lambda}\ln\frac{1}{h}.$$

Лемма 2.11 доказана.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Напомним, что символом Ω_m обозначена область

$$\Omega_m=\{x\in R^n\ :\ x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+|x_n|^m<1\}. \tag{3.1}$$

Если $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n)$, то символом $\tilde{x}$ будем обозначать точку $\tilde{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})\in R^{n-1}$. При этом будет также использоваться обозначение $x=(\tilde{x},\ x_n)$. Уравнение границы $\partial\Omega_m$ области Ω_m в таких обозначениях имеет следующий вид:

$$\partial\Omega_m=\{x\in R^n\ :\ |\tilde{x}|^2+|x_n|^m=1\}. \tag{3.2}$$

Для любой точки $x\in\Omega_m$ символом $\bar{x}$ будет, как и в § 2, обозначаться точка границы $\partial\Omega_m$ области Ω_m, наименее удаленная от x.

Лемма 3.1. *Для любой точки $x\in\Omega_m$ выполняются неравенства*

$$C_1|x-\bar{x}|\leqslant 1-|x_n|^m-|\tilde{x}|^2\leqslant C_2|x-\bar{x}|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x\in\Omega_m$ и рассмотрим любую точку $y\in\partial\Omega_m$. Согласно (3.2), $g(y)\equiv|\tilde{y}|^2+|y_n|^m=1$. Тогда

$$1-g(x)=g(y)-g(x)=\nabla\,g(\xi)\,(y-x).$$

Из ограниченности ∇g следует правое неравенство (3.3).

Левое неравенство (3.3), очевидно, достаточно доказать для точек $x \in \Omega_m$ таких, что $g(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Заметим, что при этом условии

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{|x|} \nabla g(x) = \frac{1}{|x|} (2|\tilde{x}|^2 + m|x_n|^m) \geqslant \frac{g(x)}{|x|} \geqslant C_0.$$

В таком случае, взяв точку $y \in \partial\Omega_m$, одинаково направленную с x, получим

$$1 - g(x) = \nabla g(\xi)(y - x) = |y - x| \frac{\partial g}{\partial x}(\xi) \geqslant C_0 |y - x| \geqslant C_0 |\bar{x} - x|.$$

Лемма 3.2. *Пусть* $0 < x^m < a$, $\mu > \frac{1}{m}$. *Тогда*

$$I_\mu(a) \equiv \int_0^x (a - t^m)^{-\mu} dt \leqslant C_{m,\mu} (a - x^m)^{-\mu + \frac{1}{m}}, \tag{3.4}$$

где $C_{m,\mu}$ *не зависит от* a *и* x.

Доказательство. Предположим вначале, что $\mu > 1$. Обозначим $\varepsilon = \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ и рассмотрим два случая.

1) Пусть $x \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$I_\mu(a) \leqslant \int_0^\varepsilon (a - t^m)^{-\mu} dt \leqslant (a - \varepsilon^m)^{-\mu} \varepsilon =$$

$$= \left(\frac{a + x^m}{2}\right)^{-\mu} \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{-\mu} \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= C(a - x^m)^{-\mu + \frac{1}{m}}.$$

2) Пусть теперь $x > \varepsilon$. Тогда

$$I_\mu(a) = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^x \leqslant C(a - x^m)^{-\mu + \frac{1}{m}} + \int_\varepsilon^x (a - t^m)^{-\mu} dt.$$

Последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_\varepsilon^x (a - t^m)^{-\mu} dt \leqslant \varepsilon^{1-m} \int_\varepsilon^x (a - t^m)^{-\mu} t^{m-1} dt <$$

$$< \frac{\varepsilon^{1-m}}{m(\mu - 1)} (a - x^m)^{-\mu + 1} = C(a - x^m)^{-\mu + \frac{1}{m}}.$$

Тем самым при $\mu > 1$ оценка (3.4) доказана. Предположим теперь, что $\frac{1}{m} < \mu \leqslant 1$. Так как при фиксированном x очевидно $I_\mu(a) \to 0$ при $a \to \infty$, то

$$I_\mu(a) = -\int_a^\infty I'_\mu(s) ds.$$

Заметим теперь, что $I'_\mu(s) = -\mu I_{\mu+1}(s)$. Так как $\mu+1>1$, то, применяя доказанную в этом случае оценку (3.4), получим

$$I_\mu(a) \leqslant C \int_a^\infty (s - x^m)^{-\mu-1+\frac{1}{m}}\, ds = C(a - x^m)^{-\mu+\frac{1}{m}}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $x=(\tilde{x}, x_n)\in\Omega_m$ и пусть $x_t=(\tilde{x}, t)$, $0<t<x_n$. Пусть $\bar{x}_t$ и $\bar{x}$ — точки $\partial\Omega_m$, наименее удаленные от x_t и x соответственно. Тогда при $\mu > \dfrac{1}{m}$*

$$\int_0^{x_n} |x_t - \bar{x}_t|^{-\mu}\, dt \leqslant C|x - \bar{x}|^{-\mu+\frac{1}{m}}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1, $|x_t - \bar{x}_t| \leqslant C(1 - |\tilde{x}|^2 - t^m)$. Поэтому

$$\int_0^{x_n} |x_t - \bar{x}_t|^{-\mu} dt \leqslant C \int_0^{x_n} (1 - |\tilde{x}|^2 - t^m)^{-\mu} dt.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 3.2 с $a = 1 - |\tilde{x}|^2$, получим

$$\int_0^{x_n} |x_t - \bar{x}_t|^{-\mu}\, dt \leqslant C(1 - |\tilde{x}|^2 - x_n^m)^{-\mu+\frac{1}{m}}.$$

Воспользовавшись еще раз леммой 3.1, получим требуемую оценку (3.5).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\tilde{x}\in R^{n-1}$. Рассмотрим в шаре $B_{n-1} = \{\tilde{x}\in R^{n-1};\ |\tilde{x}|<1\}$ равномерно эллиптический дифференциальный оператор

$$A_0(\tilde{x}, D) = \sum_{j,k=1}^{n-1} c_{jk}(\tilde{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(\tilde{x}). \tag{4.1}$$

Пусть $x=(\tilde{x}, x_n)\in R^n$. В области $\Omega_m \subset R^n$, определяемой соотношением (3.1), рассмотрим эллиптический оператор

$$A(x, D) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + A_0(\tilde{x}, D). \tag{4.2}$$

Нашей целью является изучение задачи (A)—(C), сформулированной во введении, для оператора $A(x, D)$ в области Ω_m.

Следуя А. В. Бицадзе (см. [2]), рассмотрим предварительно задачу Дирихле

$$A(x, D)v(x) = 0, \quad x\in\Omega_m; \quad v(x) = \varphi, \quad x\in\partial\Omega_m. \tag{4.3}$$

Решение задачи (A)—(C) будем искать в следующем виде:

$$u(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)\, dt - w(\tilde{x}), \tag{4.4}$$

где функция $w(\tilde{x})$ подлежит определению. Применяя оператор (4.2) к левой и правой частям равенства (4.4), получим с учетом (4.3)

$$A(x, D)u(x) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(\tilde{x}, 0) - A_0(\tilde{x}, D)w(\tilde{x}).$$

Таким образом, для $w(\tilde{x})$ получаем следующую краевую задачу:

$$A_0(\tilde{x}, D)w(\tilde{x}) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(\tilde{x}, 0), \ |\tilde{x}| < 1; \ w|_{|\tilde{x}|=1} = 0. \tag{4.5}$$

Пусть λ — положительное число, причем $\lambda + \frac{1}{m}$ не является целым. Докажем, что если $\varphi \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, то функция u, определенная равенством (4.4), принадлежит $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Введем функцию

$$g(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)\,dt. \tag{4.6}$$

Фиксируем произвольный мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с $|\alpha| = \left[\lambda + \frac{1}{m}\right]$ и докажем, что

$$D^{\alpha}g \in C^{\lambda+\frac{1}{m}-|\alpha|}(\bar{\Omega}_m). \tag{4.7}$$

Заметим, что если $\alpha_n > 0$, то $D^{\alpha}g = D^{\beta}v$, где $|\beta| = |\alpha| - 1$. Согласно лемме 2.6, $v \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}_m)$, поэтому $D^{\beta}v \in C^{\lambda-|\alpha|+1}(\bar{\Omega}_m)$. Отсюда следует, что $D^{\alpha}g \in C^{\lambda+1-|\alpha|}(\bar{\Omega}_m)$ и тем более $D^{\alpha}g \in C^{\lambda+\frac{1}{m}-|\alpha|}(\bar{\Omega}_m)$.

Итак, включение (4.7) достаточно доказать для α с $\alpha_n = 0$. Для таких α из определения функции (4.6) имеем

$$D^{\alpha}g(x) = \int_0^{x_n} D^{\alpha}v(\tilde{x}, t)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму 2.5, можно утверждать, что включение (4.7) будет следовать из оценки

$$|\nabla D^{\alpha}g(x)| \leqslant C|x - \bar{x}|^{\lambda-|\alpha|+\frac{1}{m}-1}.$$

Для доказательства этой оценки в свою очередь достаточно получить оценку

$$|\tilde{\nabla} D^{\alpha}g(x)| \leqslant C|x - \bar{x}|^{\lambda-|\alpha|+\frac{1}{m}-1}, \tag{4.8}$$

где $\tilde{\nabla}$—градиент по $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Очевидно,

$$\tilde{\nabla} D^{\alpha}g(x) = \int_0^{x_n} \tilde{\nabla} D^{\alpha}v(\tilde{x}, t)\,dt. \tag{4.9}$$

Так как v является решением задачи (4.3) с $\varphi \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, то, согласно лемме 2.2,

$$|\tilde{\nabla} D^{\alpha}v(x)| \leqslant C|x - \bar{x}|^{\lambda-|\alpha|-1}. \tag{4.10}$$

Заметим, что $|\alpha| = \left[\lambda + \frac{1}{m}\right]$, и поэтому $\lambda - |\alpha| - 1 < -\frac{1}{m}$.

Следовательно, можно применить лемму 3.3. Оценивая с помощью этой леммы 3.3 и неравенства (4.10) интеграл в правой части (4.9), получим

$$|\tilde{\nabla} D^{\alpha} g(x)| \leqslant C \int_0^{x_n} |x_t - \bar{x}_t|^{\lambda - |\alpha| - 1} dt \leqslant C\, |x - \bar{x}|^{\lambda - |\alpha| - 1 + \frac{1}{m}}.$$

Тем самым оценка (4.8), а значит, и включение (4.7) доказаны. Следовательно, $g \in C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается убедиться в том, что функция w, являющаяся решением краевой задачи (4.5), принадлежит классу $C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Если $\lambda > 1$, то это утверждение следует из оценок Шаудера (см. [15]). Действительно, $v \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}_m)$, если λ нецелое, и во всяком случае $C^{\lambda - \varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$ при любом $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$. Поэтому $\dfrac{\partial v}{\partial x_n} \in C^{\lambda - 1 - \varepsilon}$, а тогда из оценок Шаудера следует, что $w \in C^{\lambda + 1 - \varepsilon}(\bar{B}_{n-1})$.

Если $0 \leqslant \lambda < 1$, то функция v в силу леммы 2.2 удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \right| \leqslant C |x - \bar{x}|^{\lambda - 1}.$$

Применяя лемму 2.10 с $f(\tilde{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(\tilde{x}, 0)$, и в этом случае получим, что $w \in C^{\lambda + 1 - \varepsilon}(\bar{B}_{n-1})$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ решение задачи (4.5) принадлежит классу Гёльдера с показателем $\lambda + 1 - \varepsilon$. Взяв $\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{m}$, получим требуемое включение $w \in C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$. Теорема 1 доказана.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $A_0(\tilde{x}, D)$ — равномерно эллиптический в круге $B_{n-1} = \{\tilde{x} \in R^{n-1} : |\tilde{x}| < 1\}$ дифференциальный оператор, определенный равенством (4.1). Пусть ψ — функция, определенная и непрерывная на сфере $\partial B_{n-1} = \{\tilde{x} : |\tilde{x}| = 1\}$.

Лемма 5.1. *Пусть $\lambda > 0$, причем λ не является целым. Пусть функция $v \in C^2(B_{n-1}) \cap C(\bar{B}_{n-1})$ есть решение краевой задачи*

$$A_0(\tilde{x}, D) v(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in B_{n-1}; \quad v|_{\partial B_{n-1}} = \psi. \tag{5.1}$$

Тогда если функция

$$u(x) = x_n v(\tilde{x}) \tag{5.2}$$

принадлежит $C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$, то $\psi \in C^{\lambda}(\partial B_{n-1})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция u, определенная равенством (5.2), удовлетворяет уравнению $A(x, D) u(x) = 0$, где $A(x, D)$ — эллиптический оператор (4.2). Так как по предположению $u \in C^{1 + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$, то в силу леммы 2.2 для любого мультииндекса α с $|\alpha| > \lambda + \dfrac{1}{m}$ выполняется оценка

$$|D^{\alpha} u(x)| \leqslant C\, |x - \bar{x}|^{\lambda + \frac{1}{m} - |\alpha|}. \tag{5.3}$$

Если $\alpha_n=0$, то $D^\alpha u(x)=x_n D^\alpha v(\tilde{x})$. Поэтому для любого α с $\alpha_n=0$ и $|\alpha|>\lambda+\frac{1}{m}$ из (5.3) следует оценка

$$|D^\alpha v(\tilde{x})|\leqslant C\,|x_n|^{-1}\,|x-\bar{x}|^{-\lambda+\frac{1}{m}-|\alpha|}. \tag{5.4}$$

Пусть $\tilde{x}$ — произвольная точка из B_{n-1}. Положим

$$x_n=\frac{1}{2}\,(1-|\tilde{x}|^2)^{\frac{1}{m}}. \tag{5.5}$$

Тогда $1-|\tilde{x}|^2-|x_n|^m=(1-|\tilde{x}|^2)\,(1-2^{-m})$.

Из этого равенства и леммы 3.1 следуют неравенства

$$c_1|x-\bar{x}|\leqslant 1-|\tilde{x}|^2\leqslant c_2|x-\bar{x}|,$$

справедливые при выполнении условия (5.5). Поэтому если выполняется (5.5), то из 5.4 получаем

$$|D^\alpha v(\tilde{x})|\leqslant C(1-|\tilde{x}|^2)^{\lambda-|\alpha|},$$

причем это неравенство уже не зависит от x_n и справедливо для любого $\tilde{x}\in B_{n-1}$. Из этого неравенства в силу леммы 2.6 вытекает, что $v\in C^\lambda(\bar{B}_{n-1})$. Лемма 5.1 доказана.

Из леммы 5.1 непосредственно следует теорема 2. Действительно, выберем функцию $\psi\in C^\lambda(\partial B_{n-1})$ так, чтобы решение задачи (5.1) принадлежало $C^\lambda(\bar{B}_{n-1})$ и чтобы $\psi\notin C^{\lambda+\varepsilon}(\partial B_{n-1})$, $\varepsilon>0$. Тогда функция (5.2) удовлетворяет всем условиям теоремы 5.2.

В заключение подчеркнем, что требование отличия $\lambda+\frac{1}{m}$ от целого числа, содержащееся в формулировке теоремы 2, является существенным. Это вытекает из доказываемой ниже леммы.

Введем в R^{n-1} сферические координаты $\tilde{x}=(r,\theta)$, где $r=|\tilde{x}|$, а θ — сферические углы. Символом D_θ обозначим вектор градиента по углам θ.

Лемма 5.2. *Пусть l — натуральное число и пусть v — решение задачи (5.1). Если $u(x)=x_n v(\tilde{x})$ принадлежит $C^l(\bar{\Omega}_m)$, то для любого мультииндекса α с $|\alpha|=l-1$ выполняется равенство*

$$D_\theta^\alpha\psi(\tilde{x})-D_\theta^\alpha\psi(\tilde{y})=o(1)|\tilde{x}-\tilde{y}|^{1-\frac{1}{m}}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть α — произвольный мультииндекс с $|\alpha|=l-1$. По условию $\nabla D^\alpha u\in C(\bar{\Omega}_m)$. Обозначим, как и в лемме 5.1, символом $\tilde{\nabla}$ градиент по $\tilde{x}$. Тогда если $\alpha_n=0$, то $\tilde{\nabla}D^\alpha u(x)=x_n\tilde{\nabla}D^\alpha v(\tilde{x})$ и из непрерывности этой функции следует

$$x_n\tilde{\nabla}D^\alpha v(\tilde{x})=o(1),\quad |\tilde{x}|\to 1. \tag{5.7}$$

Положив $x_n=\frac{1}{2}\,(1-|\tilde{x}|^2)^{\frac{1}{m}}$, из (5.7) получим

$$\tilde{\nabla}D^\alpha v(\tilde{x})=o(1)\,(1-|\tilde{x}|)^{-\frac{1}{m}}. \tag{5.8}$$

Из этого равенства очевидным образом вытекает соотношение

$$\tilde{\nabla}D_\theta^\alpha v(\tilde{x})=o(1)(1-|\tilde{x}|)^{-\frac{1}{m}},$$

справедливое для $|\alpha|=l-1$. Отсюда требуемое равенство (5.6) получается в полной аналогии с рассуждениями, примененными в леммах 2.3 и 2.4.

Следствие. *Пусть* $\lambda>0$ *и пусть число* $\lambda+\frac{1}{m}$ *является целым. Тогда существует функция* $\varphi\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ *такая, что решение задачи (A)—(C) не принадлежит классу* $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Действительно, выберем функцию $\psi\in C^{\lambda}(\partial B_{n-1})$ так, чтобы при $|\alpha|=[\lambda]$

$$D_{\theta}^{\alpha}\psi(\tilde{x})-D_{\theta}^{\alpha}\psi(\tilde{y})\neq o(1)\,|\tilde{x}-\tilde{y}|^{\lambda-|\alpha|}.$$

Согласно лемме 2.7, функция v, являющаяся решением задачи (5.1), принадлежит $C^{\lambda}(\bar{B}_{n-1})$, однако из леммы 5.2 следует, что функция $u(x)=x_n v(\tilde{x})$, которая является решением задачи (A)—(C) с $\varphi=v$, не принадлежит $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Автор приносит глубокую благодарность А. В. Бицадзе за постановку задачи и внимание, проявленное им к этой работе.

Литература

1. Бицадзе А. В.— Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 4, с. 749—752.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.— М.: Наука, 1966.
3. Borrelli R. L.— J. Math. and Mech., 1966, vol. 16, N 1, p. 51—81.
4. Янушаускас А. И.— Сибир. мат. журн., 1967, т. 8, № 2, с. 447—462.
5. Малютов М. Б.— Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 2, с. 283—286.
6. Хёрмандер Л. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи.— В сб.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, с. 166—296.
7. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.— Мат. сб., 1969, т. 78, № 1, с. 148—176.
8. Мазья В. Г.— Мат. сб., 1972, т. 87, № 3, с. 417—454.
9. Melin A., Sjöstrand J.— Comm. Partial Differential Equations, 1976, vol. 1, p. 313—400.
10. Winzell B.— Math. Ann., 1977, vol. 229, N 3, p. 267—278.
11. Winzell B.— Math. Scand., 1978, vol. 43, N 1, p. 169—176.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. I.— М.: Мир, 1965.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.
14. Соболевский П. Е.— Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 4, с. 804—807.
15. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М.: ИЛ, 1957.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 21 мая 1981 г.