



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Черников, О группах с дополняемыми
бесконечными абелевыми подгруппами,
Матем. заметки, 1980, том 28, вы-
пуск 5, 665–674

<https://www.mathnet.ru/mzm6397>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с
пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

22 мая 2025 г., 16:39:37



О ГРУППАХ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н. С. Черников

Известно, что если в группе дополняемы все подгруппы, то она локально конечна (см. [1]). Более того, для локальной конечности группы достаточно, чтобы в ней были дополняемы только абелевы подгруппы (см. [2]) или даже только циклические подгруппы (см. [3]). В связи с результатами работ [1] — [3] естественно возник следующий вопрос [4, вопрос 5.62].

Будет ли локально конечной группа, содержащая бесконечные абелевы подгруппы, при условии, что все они дополняемы в ней?

Автор настоящей работы показал, что в классе бинарно конечных групп этот вопрос решается утвердительно, т. е. что всякая бинарно конечная группа с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами локально конечна (см. [5], [6]). Однако, как показывает теорема 1 настоящей работы, в общем случае ответ на приведенный вопрос отрицателен. Более того, из этой теоремы следует, что периодическая группа, содержащая бесконечные абелевы подгруппы, может не быть локально конечной при условии дополняемости в ней всех нециклических абелевых подгрупп или даже абелевых подгрупп непростых порядков. Отметим, что локально конечные группы, в которых дополняемы абелевы нециклические подгруппы, и локально конечные группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков описаны в [7], [8], а локально конечные группы с дополняемыми элементарными

абелевыми подгруппами простых порядков — в [9], [10].

Дадим необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть

$$\{G_i \mid i \in I\} \quad (1)$$

— семейство групп, где I конечное или бесконечное множество индексов, и

$$G = \prod_{i \in I}^* G_i \quad (2)$$

— свободное произведение групп семейства (1).

О п р е д е л е н и е 1 (см. [11, стр. 8], а также [12, стр. 745, примечание]). Пусть никакая группа семейства (1) не содержит инволюций (т. е. элементов порядка 2). Тогда периодическим произведением нечетного показателя n семейства групп (1) называется группа F , получающаяся в результате добавления к соотношениям свободного произведения (2) всех определяющих соотношений вида

$$a^n = 1 \quad (a \in G), \quad (3)$$

где a есть элементарный период ранга $\alpha \geq 1$, и при этом слово a^n входит в некоторое слово из $\bar{M}_{\alpha-1}$. Периодическое произведение групп семейства (1) обозначается через $\prod_{i \in I}^n G_i$.

Определение элементарного периода ранга $\alpha \geq 1$ и множества $\bar{M}_{\alpha-1}$ можно найти в монографии [13].

В дальнейшем, когда речь пойдет о периодическом произведении показателя n какого-либо семейства групп, всегда будет подразумеваться, что группы этого семейства не содержат инволюций и что число n нечетно.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [14, стр. 474]). Пусть задан класс абстрактных групп (т. е. изоморфные группы отождествлены) и операция \circ , которая сопоставляет всякому (не обязательно конечному) семейству групп G_α (не обязательно различных), $\alpha \in I$, вполне определенную группу $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Операция \circ называется точной, если для всех $\alpha \in I$ заданы гомоморфизмы $\varphi_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$, причем группа G порождается своими подгруппами $G_\alpha \varphi_\alpha$.

О п р е д е л е н и е 3. Группа G вида $H \rtimes K$, где $H \neq 1$, $K \neq 1$, называется группой Фробениуса с инвариантным множителем H и дополнительным множителем K , если для любого $1 \neq x \in H$ имеет место равенство

$$x^{-1}Kx \cap K = 1. \quad (4)$$

П р е д л о ж е н и е 1 (см., например, [14, стр. 459—460]). Пусть $\prod_{i \in I} G_i$ — прямое произведение групп семейства (1). Тогда отображение φ , сопоставляющее всякому элементу $g_i \in G_i$ ($i \in I$) свободного произведения $\prod_{i \in I}^* G_i$ тот же самый элемент в группе $\prod_{i \in I} G_i$ и любому произведению элементов в $\prod_{i \in I}^* G_i$ соответствующее произведение образцов в $\prod_{i \in I} G_i$, является гомоморфизмом свободного произведения $\prod_{i \in I}^* G_i$ на прямое произведение $\prod_{i \in I} G_i$.

В силу предложения 1 в свободном произведении $G = \prod_{i \in I}^* G_i$ найдется нормальный делитель N (а именно, ядро отображения φ), для которого выполняются соотношения

$$G_i \cap N = 1 \quad (i \in I), \quad (5)$$

$$G/N = \prod_{i \in I} G_i N/N. \quad (6)$$

П р е д л о ж е н и е 2 (см. [11, теорема 3]). Операция периодического умножения групп (не содержащих инволюций) при (нечетных) $n \geq 665$ является точной операцией. Она обладает свойством наследственности по подгруппам (постулат Мальцева).

Ввиду предложения 2 никакой отличный от единицы элемент g_i произвольной группы G_i семейства (1) не обращается в единицу в периодическом произведении $F = \prod_{i \in I}^n G_i$.

Гомоморфизм группы $G = \prod_{i \in I}^* G_i$ на группу $F = \prod_{i \in I}^n G_i$, сопоставляющий всякому элементу $g_i \in G_i$ ($i \in I$)

свободного произведения $\prod_{i \in I}^* G_i$ тот же самый элемент в группе $\prod_{i \in I} G_i$ ($n \geq 665$), обозначим через ψ , а его ядро — через H .

Предложение 3 (см. [11, теорема 4]). *Операция периодического умножения показателя n при $n \geq 665$ коммутативна и ассоциативна.*

Предложение 4 (см. [11, теорема 6], [12, стр. 745, примечание]). *Пусть F — периодическое произведение показателя $n \geq 665$ семейства (1), состоящего не менее чем из двух неединичных групп G_i . Тогда группа F бесконечна.*

Предложение 5 (см. [11, теорема 7]). *Пусть F — периодическое произведение показателя $n \geq 665$ групп семейства (1). Если неединичный элемент x группы F сопряжен некоторому элементу y одной из подгрупп G_i группы F , то всякий перестановочный с x элемент группы F принадлежит той же сопряженной с G_i подгруппе $h^{-1}G_i h$, которой принадлежит y .*

Предложение 6 (см. [11, теорема 8]). *Пусть F — периодическое произведение показателя (нечетного) $n \geq 665$ семейства групп (1). Если коммутативная подгруппа F_1 группы F не содержится ни в одной из подгрупп $h^{-1}G_i h$, сопряженных подгруппам G_i , то F_1 есть циклическая группа, порядок которой делит n .*

Перейдем теперь к изложению результатов, установленных автором настоящей работы.

ЛЕММА 1. *Если экспонента всякой группы семейства (1) делит (нечетное) число $n \geq 665$, то в их периодическом произведении $F = \prod_{i \in I}^n G_i$ показателя n найдется нормальный делитель M , для которого выполняются соотношения*

$$G_i \cap M = 1 \quad (i \in I), \quad (7)$$

$$F/M = \prod_{i \in I} G_i \cdot M/M. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть N — нормальный делитель свободного произведения $G = \prod_{i \in I}^* G_i$, для которого выполняются условия (5), (6). Так как экспонента

всякой группы G_i ($i \in I$) делит показатель n , то отсюда следует, что и экспонента группы

$$G/N = \prod_{i \in I} G_i N/N$$

делит показатель n . В силу этого всякий элемент группы G вида x^n , где $x \in G$, очевидно, содержится в N , и потому определенный выше нормальный делитель H (см. предложение 2) содержится в N . Так как $H \subset N$, то нетрудно проверить, что $\psi^{-1}\varphi$ (см. предложения 1, 2) есть гомоморфизм группы F на группу $\prod_{i \in I} G_i$. Легко убедиться, что при этом гомоморфизме всякому элементу $g_i \in G_i$ ($i \in I$) периодического произведения F соответствует тот же самый элемент в группе $\prod_{i \in I} G_i$. Пусть M — ядро гомоморфизма $\psi^{-1}\varphi$. Очевидно, для M выполняются соотношения (7) и (8). Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Если при условиях леммы 1 по крайней мере две группы семейства (1) отличны от единицы, то периодическое произведение F является группой Фробениуса, дополнительным множителем которой является произвольная неединичная группа G_j ($j \in I$) семейства (1), а инвариантным множителем — подгруппа R , порожденная группами семейства $\{G_i \mid i \in I \setminus j\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 1 $G = R \rtimes G_j$.

Пусть $h \neq 1$ — произвольный элемент подгруппы R . Покажем, что

$$h^{-1}G_j h \cap G_j = 1.$$

В самом деле, допустим, что

$$a \in h^{-1}G_j h \cap G_j$$

и $a \neq 1$. Тогда, очевидно, $a = h^{-1}b^{-1}h$, где $b \in G_j$, и потому

$$[h, b] = h^{-1}b^{-1}hb = ab. \quad (9)$$

Следовательно, ввиду соотношения (9) $[h, b] \in G_j$. Однако, так как подгруппа R инвариантна в F и $h \in R$, то, очевидно, $[h, b] \in R$. Отсюда вытекает, что $[h, b] = 1$. Тогда ввиду предложения 5 элемент h должен быть сопря-

жен некоторому элементу группы G_j , что невозможно. Следствие доказано.

Заметим, что если экспонента групп $\{G_i \mid i \in I\}$ не ограничена, то заключение следствия может оказаться неверным. Так, например, если p — простое число и $p \geq 665$, то периодическое произведение $F = G_1^p G_2$ показателя p двух квазициклических p -групп G_1 и G_2 является простой группой (это вытекает из [12, теорема 1]). Отметим еще, что, как вытекает из предложений 5 и 6, подгруппа G_1 совпадает со своим нормализатором в F и взаимно проста со своими сопряженными подгруппами. Этот пример опровергает следующую гипотезу, высказанную О. Ю. Шмидтом в 1947 г. (см. [21]): если подгруппа H периодической группы G совпадает со своим нормализатором, взаимно проста со своими сопряженными подгруппами и отлична от своего коммутанта, то G не проста.

Из полученного следствия непосредственно вытекает следующее

Предложение. Для любых двух неединичных периодических групп без элементов порядка 2 G_1 и G_2 конечной экспоненты n существует периодическая группа Фробениуса вида $R \rtimes G_2$, где $R \supset G_1$, экспонента которой конечна и делится на n .

Известно, что локально конечные группы Фробениуса всегда непримарны, инвариантные множители в них нильпотентны, а в их дополнительных множителях все абелевы подгруппы локально циклические (см. [15] — [19]). В частности, дополнительный множитель локально конечной группы Фробениуса конечен или счетен. Из установленного выше предложения сразу же вытекает, что ни одно из указанных свойств дополнительного и инвариантного множителей в случае произвольных периодических групп Фробениуса не выполняется.

Далее условимся говорить, что если в группе G нет подгрупп со свойством α , то все подгруппы со свойством α дополняемы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для групп семейства (1) выполняется одно из следующих условий:

- 1) в любой группе G_i ($i \in I$) дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы;
- 2) в любой группе G_i ($i \in I$) дополняемы все нециклические абелевы подгруппы;

3) в любой группе G_i ($i \in I$) дополняемы все абелевы подгруппы непростых порядков.

Тогда, если экспонента всякой группы G_i ($i \in I$) делит некоторое нечетное число $n \geq 665$ и при этом среди групп G_i есть по крайней мере две неединичные группы,

то периодическое произведение $F = \prod_{i \in I}^n G_i$ показателя является нелокально конечной периодической группой экспоненты n и имеют место соответственно следующие утверждения:

1') в группе F дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы;

2') в группе F дополняемы все нециклические абелевы подгруппы;

3') если n — простое число, то в группе F дополняемы все абелевы подгруппы непростых порядков.

Доказательство. Пусть G_j, G_k ($j \neq k$) — отличные от единицы группы семейства (1), $g_j \in G_j, g_k \in G_k$ — отличные от единицы их элементы. Тогда ввиду предложения 2

$$\langle g_j, g_k \rangle \simeq \langle g_j \rangle^n \langle g_k \rangle \quad (10)$$

(здесь $\langle g_j, g_k \rangle$ — подгруппа группы F , порожденная элементами g_j и g_k , $\langle g_j \rangle^n \langle g_k \rangle$ — периодическое произведение групп $\langle g_j \rangle$ и $\langle g_k \rangle$).

Ввиду соотношения 10 и предложения 4 подгруппа $\langle g_j, g_k \rangle$ бесконечна. Следовательно, F не локально конечная группа.

Пусть выполняется одно из условий 1) — 3), и пусть абелева подгруппа A группы F будет соответственно:

- 1) бесконечной абелевой группой,
- 2) нециклической абелевой группой,
- 3) абелевой группой непростого порядка.

Из предложения 6 вытекает, что подгруппа A сопряжена некоторой подгруппе G_s семейства (1). Ввиду следствия леммы 1

$$F = R \rtimes G_s = R \rtimes h^{-1}G_s h,$$

где

$$h^{-1}G_s h \supset A.$$

В силу одного из условий 1) — 3) подгруппа A дополняема в группе $h^{-1}G_s h$. Пусть D — дополнение к ней. Не-

трудно убедиться, что подгруппа $R \cdot D$ дополняет подгруппу A в F . Теорема доказана.

Простейшими примерами нелокально конечных групп, в которых дополняемы бесконечные абелевы подгруппы, будут периодические произведения вида

$$A^{p^k} \langle b \rangle,$$

где p — любое простое число, отличное от 2, $p^k > 665$, A — бесконечная элементарная абелева p -группа, $\langle b \rangle$ — группа порядка p . При $p = 3$ получаем пример 3-группы с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами. Для 2-групп верна

ТЕОРЕМА 2. *Всякая 2-группа K с дополняемыми бесконечными абелевыми подгруппами локально конечна.*

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что группа неэкстремальна. Покажем, что она не содержит элементов порядка 4. В самом деле, пусть a элемент порядка 4 группы K . Так как группа K неэкстремальна, то ввиду результатов работы [20] всякая максимальная элементарная абелева подгруппа группы K бесконечна. Поэтому бесконечна всякая максимальная элементарная абелева подгруппа группы K , содержащая элемент a^2 , и, следовательно, централизатор $C_G(\langle a^2 \rangle)$ неэкстремален. Так как группа $C_G(\langle a^2 \rangle)$ неэкстремальна, то и фактор-группа $C_G(\langle a^2 \rangle) / \langle a^2 \rangle$ неэкстремальна. Из результатов работы [20] снова вытекает, что группа $C_G(\langle a^2 \rangle) / \langle a^2 \rangle$ обладает неэкстремальной абелевой подгруппой $B / \langle a^2 \rangle$, содержащей подгруппу $\langle a \rangle / \langle a^2 \rangle$. Поскольку подгруппа $\langle a \rangle$, очевидно, инвариантна в группе B , то индекс ее централизатора $C_B(\langle a \rangle)$ в B конечен. В силу этого централизатор $C_B(\langle a \rangle)$ неэкстремален, и, значит, некоторая его максимальная абелева подгруппа C неэкстремальна (см. [20]). Очевидно, $C \supseteq a$.

Пусть C_1 — нижний слой группы C . Подгруппа C_1 , как нетрудно видеть, бесконечна и потому дополняема в группе $C_1 \cdot \langle a \rangle$. Но в таком случае $C_1 \cdot \langle a \rangle$ — элементарная абелева подгруппа, и потому элемент a имеет порядок 2. Полученное противоречие доказывает, что в группе K все отличные от единицы элементы имеют порядок 2. Следовательно, K — элементарная абелева группа. Теорема доказана.

Фактически мы показали здесь, что всякая неэкстремальная 2-группа с дополняемыми бесконечными подгруппами является элементарной абелевой группой.

Институт математики
АН УССР

Поступило
30.X.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баева Н. В., Вполне факторизуемые группы, Докл. АН СССР, 92, № 5 (1953), 877—880.
- [2] Каргаполов М. И., Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, Докл. АН СССР, 127, № 6 (1959), 1164—1166.
- [3] Горчаков Ю. М., Примитивно факторизуемые группы, Уч. зап. Пермского ун-та, 17 (1960), 15—31.
- [4] Коуровская тетрадь (нерешенные задачи теории групп), Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, 1976.
- [5] Черников Н. С., Группы с условиями минимальности для недополняемых абелевых подгрупп, Докл. АН СССР, 223, № 4 (1975), 797—798.
- [6] Черников Н. С., Локально конечные ωA -факторизуемые группы, Сб., Исследования по теории групп, Киев, Институт математики АН УССР, 1976, 63—110.
- [7] Зуб О. Н., Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы, Сб., Группы с ограничениями для подгрупп, Киев, «Наукова думка», 1971, 134—158.
- [8] Зайцев Д. И., Зуб О. Н., Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков, Сб., Группы с заданными свойствами подгрупп, Киев, Институт математики АН УССР, 1973, 105—126.
- [9] Сысак Я. П., Конечные элементарно факторизуемые группы, Матем. сб., Киев, «Наукова думка», 1976, 108—111.
- [10] Сысак Я. П., Группы с дополняемыми элементарными абелевыми подгруппами непростых порядков, Препринт ИМ — 76—18, Киев, Институт математики АН УССР, 1976.
- [11] Адян С. И., Периодические произведения групп, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 142 (1976), 3—21.
- [12] Адян С. И., О простоте периодических произведений, Докл. АН СССР, 241, № 4 (1978), 745—748.
- [13] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., «Наука», 1975.
- [14] Курош А. Г., Теория групп, М., «Наука», 1967.
- [15] Thompson J. G., Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1959), 578—581.
- [16] Burnside W., The theory of groups of finite order, Cambridge, 1911.
- [17] Higman G., Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc., 30 (1957), 321—334.

- [18] Б у с а р к и н В. М., С т а р о с т и н А. И., О расщепляемых локально конечных группах, Матем. сб., 62, № 3 (1963), 275—294.
- [19] K e g e l D., Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition, Arch. Math., 13 (1962), 10—28.
- [20] Ш у н к о в В. П., Об одном классе p -групп, Алгебра и логика, 9, № 4 (1970), 484—496.
- [21] Ш м и д т О. Ю., Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, Избранные тр., М., Изд-во АН СССР, 1959, 298—300.