В. И. Матов, Топологическая классификация ростков функций максимума и минимакса семейств функций общего положения, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 167–168

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РОСТКОВ ФУНКЦИЙ МАКСИМУМА И МИНИМАКСА СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В. И. Матов

0. Каждой непрерывной действительной функции f, определенной на пространстве локально тривиального расслоения p_1: $X \to Y$ с компактным слоем, можно сопоставить непрерывную функцию, заданную на базе: точке y базы ставится в соответствие максимальное значение функции f на слое $p_1^{-1}(y)$. Полученная функция называется функцией максимума функции f. Если база Y в свою очередь является пространством локально тривиального расслоения с компактным слоем p_2: $Y \to Z$, то, взяв функцию минимума функции максимума, получим функцию минимакса. В настоящей заметке доказывается, что любой росток как функции максимума, так и функции минимакса гладкой функции общего положения топологически эквивалентен ростку морсовской функции.

1. **Определения.** Пусть $\dim X = n$, $\dim Y = k$, $\dim Z = m$. Гладкая функция f: $X \to \mathbb{R}$ называется *семейством функций* от n_1 переменных с k параметрами, где $n_1 = n - k$. Пусть M и N — гладкие многообразия. Росток отображения H: $M \to N$ в точке $x \in M$ будем обозначать H: $(M, x) \to (N, H(x))$ или $[H]_x$. Ростки функций F: $(M, x) \to (\mathbb{R}, F(x))$ и G: $(N, y) \to (\mathbb{R}, G(y))$ *топологически эквивалентны*, если существует росток гомеоморфизма H: $(M, x) \to (N, y)$ такой, что $F = G \circ H$. Функцию $M \to \mathbb{R}$ будем называть *C-морсовской*, если ее росток в любой точке $x \in M$ топологически эквивалентен либо ростку линейной функции, либо ростку морсовской функции в особой точке (в этом случае точку x будем называть *C-особой*, а ее индексом — индекс соответствующей квадратичной формы). *Прямой суммой* ростков F: $(M, x) \to (\mathbb{R}, 0)$, G: $(N, y) \to (\mathbb{R}, 0)$ будем называть росток $F \oplus G$: $(M \times N, (x, y)) \to (\mathbb{R}, 0)$, где $(F \oplus G)(u, v) = F(u) + G(v)$. Функцию максимума и функцию минимакса семейства f обозначим через $\max(f)$ и $\operatorname{minmax}(f)$ соответственно. Через $\mathfrak{m}(p)$ обозначим пространство гладких ростков $(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$.

2. Теорема 1. *Функция максимума семейства общего положения является C-морсовской.*

Это утверждение было сформулировано в качестве гипотезы А. М. Вершиком при обсуждении работы [2], в которой оно проверено для $k \leqslant 6$; доводы в пользу общей гипотезы приведены В. И. Арнольдом в [1].

Теорема 2. *Функция минимакса семейства общего положения является C-морсовской.*

Теорема 3. *Индекс $\nu(y)$ C-особой точки y функции $\max(f)$ семейства f общего положения удовлетворяет неравенству $\nu(y) \leqslant k - s(y) + 1$, где $s(y)$ — число различных точек слоя $p_1^{-1}(y)$, в которых f достигает значения $\max(f)(y)$.*

Теорема 4. *Индекс $\eta(z)$ C-особой точки z функции $\operatorname{minmax}(f)$ семейства f общего положения удовлетворяет неравенствам $l(z) - 1 \leqslant \eta(z) \leqslant m + l(z) - (\max(1, s_1(z) - k_1) + \ldots + \max(1, s_{l(z)} - k_1)$, где $k_1 = k - m$, $l(z)$ — число различных точек (пусть это — точки $y^1, \ldots, y^{l(z)}$) слоя $p_2^{-1}(z)$, в которых $\max(f)$ достигает значения $\operatorname{minmax}(f)(z)$, $s_i(z)$ — число различных точек слоя $p_1^{-1}(y^i)$, в которых f достигает этого значения.*

3. **Схема доказательств теорем 1 и 3.** Пусть f — семейство общего положения, $y \in Y$, $\max(f)(y) = 0$. Пусть $X(s)$ — прообраз диагонали при субмерсии p_1^s: $X^s \to Y^s$, где $(\cdot)^s$ — s-кратное прямое произведение. Обозначим через $r(y)$ ранг композиции вложения $X(s) \hookrightarrow X^s$ и отображения f^s: $X^s \to \mathbb{R}^s$ в мультиточке $(x^1, \ldots, x^s)$, где $s = s(y)$ и $f(x^i) = \max(f)(y)$, $p_1(x^i) = y$.

Лемма. *Для семейства f общего положения для каждой точки $y \in Y$, за исключением множества $Y(f)$ размерности 0, $r(y) = s(y)$. Если $y \in Y(f)$, то $r(y) = s(y) - 1$ и точки x^i $(i = 1, \ldots, s(y))$ являются морсовскими точками функции $f \mid p_1^{-1}(y)$.*

Введя в окрестности точек x^i подходящие системы координат, получим, что росток $[\max(f)]_y$ топологически эквивалентен ростку $[F]_0$ функции F: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, где $F(v) = \max\{\max\{f_i(u, v) \mid u \in \mathbb{R}^{n_1}, \|u\| \leqslant \varepsilon\} \mid i = 1, \ldots, s\}$, $\varepsilon > 0$ и $0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — точка максимума гладкой функции $f_i \mid \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$. В случае $r(y) = s - 1$ из теоремы о неявной функции следует, что $[F]_0 = \max(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$, где $\varphi_i \in \mathfrak{m}(k)$.

Лемма. *Если отображение $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ с компонентами $f_1, \ldots, f_s$ имеет в нуле ранг s, то росток $[F]_0$ топологически эквивалентен ростку линейной функции.*

Лемма. *Если f — семейство общего положения и росток $(\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$ с компонентами $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ имеет в нуле ранг $s - 1$, то росток $[F]_0$ топологически эквивалентен прямой сумме ростка $\max(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$, где $\gamma_i \in \mathfrak{m}(s-1)$, и ростка невырожденной квадратичной формы из $\mathfrak{m}(k - s + 1)$. При этом набор ростков $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ удовлетворяет условиям следующей леммы.*

Лемма. *Если любые p из q векторов $\operatorname{grad} \gamma_i(0)$ $(i = 1, \ldots, q;\ q > p)$, где $\gamma_i \in \mathfrak{m}(p)$, линейно независимы, то росток $\max(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ топологически эквивалентен либо ростку y_1, либо ростку $y_1^2 + \ldots + y_p^2$, где $y_1, \ldots, y_p$ — координаты в $\mathbb{R}^p$.*

4. Схема доказательств теорем 2 и 4. Пусть f — семейство общего положения, $z \in Z$, $\operatorname{minmax}(f)(z) = 0$. Пусть для $i = 1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, s_i$, где $l = l(z)$, $s_i = s_i(z)$, точки x^{ij} таковы, что $x^{ij} \in p_1^{-1}(y^i)$ и $f(x^{ij}) = \operatorname{minmax}(f)(z)$. Обозначим через $r_i(z)$ ранг сужения композиции вложения $X(s_i) \hookrightarrow X^{s_i}$ и $f^{s_i}\colon X^{s_i} \to \mathbb{R}^{s_i}$ на прообраз слоя $p_2^{-1}(z)$ при отображении $X(s_i) \to Y$ в мультиточке $(x^{i1}, \ldots, x^{is_i})$. Пусть $X(s_1, \ldots, s_l)$ — прообраз диагонали при сквозном отображении $X(s_1) \times \ldots \times X(s_l) \to Y^l \to Z^l$. Обозначим через $r(z)$ ранг композиции вложения $X(s_1, \ldots, s_l) \hookrightarrow X^s$ и отображения $f^s\colon X^s \to \mathbb{R}^s$, где $s = s_1 + \ldots + s_l$, в мультиточке $(x^{11}, \ldots, x^{ls_l})$.

Лемма. *Для семейства f общего положения для каждой точки $z \in Z$, за исключением множества $Z(f)$ размерности 0, $r(z) = s(z)$. Если $z \in Z(f)$, то $r(z) = s(z) - 1$, $r_i(z) = \min(s_i(z) - 1, k - m)$ и точки x^{ij} $(j = 1, \ldots, s_i(z))$ являются морсовскими точками функций $f \mid p_1^{-1}(y^i)$ $(i = 1, \ldots, l(z))$.*

Лемма. *Для семейства f общего положения росток $[\operatorname{minmax}(f)]_z$ в случае $z \in Z \setminus Z(f)$ топологически эквивалентен ростку линейной функции $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, а в случае $z \in Z(f)$ — прямой сумме ростка $\min(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \bigoplus\limits_{i=1}^{l} \max(\beta_1^i, \ldots, \beta_{q_i}^i)$, где $l = l(z)$, $\alpha_j \in \mathfrak{m}(l-1)$, $\beta_j^i \in \mathfrak{m}(s_i - r_i - 1)$, и ростка невырожденной квадратичной формы из $\mathfrak{m}(m + r_1 + \ldots + r_l - s + 1)$. При этом наборы $\{\alpha_j\}$ и $\{\beta_1^i, \ldots, \beta_{q_i}^i\}$ удовлетворяют условиям последней леммы п. 3.*

5. При доказательстве последней леммы используется теорема 5.

Теорема 5. *Пусть $g\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ — полуквазиоднородная функция степени d с показателями $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)$ и квазиоднородной частью φ и $0 \in \mathbb{R}^p$ — точка локального минимума функций $g \mid \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $\varphi \mid \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ росток $\hat{g}\colon (\mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, где $\hat{g}(y) = \min\{g(x, y) \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\}$, равен $\hat{\varphi} + \psi$, где $\hat{\varphi}(y) = \min\{\varphi(x, y) \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ — квазиоднородный росток степени d с показателями $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$, а на компактах $\psi(t^{\beta_1} y_1, \ldots, t^{\beta_q} y_q)/t^d \rightrightarrows 0$ при $t \to +0$.*

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду за постановку и полезные обсуждения задачи и А. Г. Кушниренко за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. I. Arnold. On some problems in singularity theory.— Geometry and Analysis' Indian Academy of Sciences, Bangalore, 1980, p. 1—10.

[2] Л. Н. Брызгалова. Особенности функций максимума.— Диссертация, М.: МГУ, 1978.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 9 марта 1982 г.