Г. В. Осинникова, И. Н. Сергеев, О недостижимости центральных показателей в классе правильных систем, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, номер 4, 39–44 да следует, что пространства $\hat{P}_\varepsilon E$ и $P_e E$, где $E=L_2(T^n)$, имеют одинаковую размерность.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ $(n\leqslant 4)$ с достаточно гладкой границей. Рассматривается уравнение (1) с граничными условиями $u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0$. Решения этой краевой задачи обозначаем $z_e(x)$, а решения уравнения (2) с условием на границе $u|_{\partial\Omega}=0$ — через $z_0(x)$. Тогда теоремы 1, 2 и 3 переносятся на этот случай со следующими изменениями: дополнительно требуется условие $f(0)=0$; вместо пространства $H_{4,\varepsilon}(T^n)$ рассматривается пространство

$$E=H_{4,\varepsilon}(T^n)\cap\{u : u|\partial\Omega=\Delta u|\partial\Omega=0\}.$$

Соответственно функция Ляпунова для уравнения (1) существует в шаре $B_R=\{u\in E : \|u\|_{4,\varepsilon}\leqslant R\}$.

В доказательстве теоремы 3 компенсация невязки в выполнении граничных условий при переходе от собственных функций оператора $A_0'(z_0)$ к собственным функциям оператора $\hat{A}_\varepsilon'(z_0)$ осуществляется с помощью функций пограничного слоя [4]. В остальном все доказательства аналогичны периодическому случаю. Граничные условия обеспечивают обращение в нуль всех интегралов по границе при интегрировании по частям.

Автор глубоко благодарен профессору М. И. Вишику за постановку задачи и подробное обсуждение получаемых результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности//Успехи матем. наук. 1983. **38**, № 4. 133—187.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям//Матем. сб. 1985. **126**, № 3. 397—419.
3. Бабин А. В., Вишик М. И. Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения//Успехи матем. наук. 1986. **41**, № 4. 3—34.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//Успехи матем. наук. 1957. **12**, № 5. 3—122.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.

Поступила в редакцию
28.11.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 4

УДК 517.926.4

Г. В. Осинникова, И. Н. Сергеев

О НЕДОСТИЖИМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В КЛАССЕ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим метрическое пространство $\mathfrak{R}$ правильных линейных систем вида

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad t\in\mathbf{R}^+, \tag{1}$$

задаваемых ограниченными кусочно непрерывными оператор-функциями $A:\mathbf{R}^+\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ (и отождествляемых в дальнейшем с соответствующими функциями), с равномерной на полупрямой метрикой, определяемой нормой

$$|A| = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |A(t)| = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \sup_{|x|=1} |A(t)\, x|. \qquad (2)$$

Напомним [1], что система A называется *правильной*, если выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

где $\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ — характеристические *показатели Ляпунова* системы A.

Известно [2], что в пространстве всех (не обязательно правильных) систем вида (1) с нормой (2) *достижимыми* являются верхний и нижний *центральные показатели*

$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln |X(jT, (j-1)T)|, \qquad (4)$$

$$\omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln |X^{-1}(jT, (j-1)T)|^{-1} \qquad (5)$$

(где $X(t, s)$ — оператор Коши системы (1)), что означает следующее: в любой окрестности какой-либо системы найдутся системы, у которых старшие или младшие показатели Ляпунова соответственно (даже *одновременно* [3]) сколь угодно близки к верхнему или нижнему центральным показателям исходной системы. Если же ограничиться только автономными или периодическими, вообще *приводимыми* (т. е. ляпуновски приводимыми к автономным [1]) системами вида (1), то для таких систем справедливы просто равенства $\lambda_1(A) = \Omega(A)$, $\lambda_n(A) = \omega(A)$.

По-другому обстоит дело в классе правильных систем (который в определенном смысле достаточно широк [4] и содержит, в частности, все приводимые системы). В настоящей работе доказано, что в пространстве $\mathfrak{R}$ центральные показатели, вообще говоря, недостижимы (теорема 3), а также могут не быть достижимыми одновременно (теорема 4). В случае $n=2$ получены необходимые и достаточные условия их достижимости (теоремы 1, 2). Согласно результатам [5], аналогичные выводы можно сделать для пространства правильных систем с интегральной (в среднем на полупрямой) топологией.

Введем обозначения

$$\overline{\lambda}(A) = \overline{\lim_{B\to A}}\, \lambda(B), \quad \underline{\lambda}(A) = \underline{\lim_{B\to A}}\, \lambda(B),$$

$$\Omega_1(A) = \inf_{T>0} \underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln |X(jT, (j-1)T)|, \qquad (6)$$

$$\chi(f) = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau)\, d\tau,$$

где $A, B \in \mathfrak{R}$, $\lambda : \mathfrak{R} \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.

Замечания [1].

1. Сумма показателей Ляпунова любой (не обязательно правиль-

ной) системы A не может быть меньше *нижнего* (и даже верхнего) *среднего* $\chi(\operatorname{tr} A)$ следа системы A.

2. Если $A \in \mathfrak{R}$, то существует *точное среднее* следа

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau = \chi(\operatorname{tr} A).$$

3. Если $A \in \mathfrak{R}$, то *характеристический показатель* любого решения $x \neq 0$ системы A является *точным*, т. е. существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

4. Если $A \in \mathfrak{R}$, то характеристический показатель оператор-функции $X(t, 0)$, равный старшему показателю $\lambda_1(A)$, также является точным.

Лемма 1. *Для любой системы вида* (1) *верны утверждения*:

а) $\lambda_n(A) \geqslant \omega(A)$;

б) $\overline{\Omega}_1(A) \leqslant \Omega(A)$, *а кроме того, если в формуле* (6) *нижнюю грань по* $T>0$ *заменить пределом при* $T\to\infty$, *то число* $\Omega_1(A)$ *при этом не изменится*;

в) *если* $A \in \mathfrak{R}$, *то* $\overline{\lambda}_1(A) \leqslant \Omega_1(A)$.

Справедливость утверждений этой леммы выводится из равенств (4)—(6) в основном так же, как в § 7, 8, 13 [1] (наиболее существенное отличие, состоящее в замене верхнего среднего каждой C-функции $R(t)$ ее нижним средним $\chi(R)$, в данном случае обусловлено замечанием 3).

Лемма 2. *Если* $n=2$ *и* $A \in \mathfrak{R}$, *то*

$$\overline{\lambda}_1(A) + \underline{\lambda}_2(A) = \chi(\operatorname{tr} A) = \underline{\lambda}_1(A) + \overline{\lambda}_2(A),$$

$$\overline{\Omega}_1(A) + \omega(A) = \chi(\overline{\operatorname{tr}} A). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно равенству (3), при $n=2$ функционалы $(\lambda_1+\lambda_2)(A) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A)$ и $\chi(\operatorname{tr})(A) = \chi(\operatorname{tr} A)$ на пространстве $\mathfrak{R}$ совпадают, причем последний из них непрерывен, поэтому

$$\overline{\lambda}_1(A) = \overline{(\chi(\operatorname{tr}) - \lambda_2)}(A) = \chi(\operatorname{tr} A) - \underline{\lambda}_2(A).$$

Аналогично устанавливается второе равенство леммы.

Далее, при $n=2$ имеем

$$|X(t, s)| \cdot |X^{-1}(t, s)|^{-1} = \exp \int_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant s \geqslant 0,$$

откуда получаем

$$\frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln |X(jT, (j-1)T)| = \frac{1}{mT} \int_0^{mT} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln |X^{-1}(jT, (j-1)T)|^{-1}.$$

Наконец, переходя в последнем равенстве к нижнему пределу при $m\to\infty$ (и учитывая замечание 2), а затем к пределу при $T\to\infty$, получаем требуемое (см. формулы (5), (6) и лемму 1.б)).

Теорема 1. *Если* $n=2$ *и* $A \in \mathfrak{R}$, *то следующие два условия эквивалентны*:

1) $\overline{\lambda}_1(A)=\Omega_1(A)$;

2) $\underline{\lambda}_2(A)=\omega(A)$.

Доказательство. Поскольку в силу леммы 2 справедливо соотношение

$$\Omega_1(A)-\overline{\lambda}_1(A)=\underline{\lambda}_2(A)-\omega(A),$$

то из равенства нулю левой части этого соотношения следует равенство нулю правой его части и наоборот.

Таким образом, при $n=2$ показатели $\Omega_1(A)$ и $\omega(A)$ либо оба недостижимы, либо оба достижимы. При этом последний случай имеет место, например, если достижим показатель $\Omega(A)$, критерием чего служат условия 2) и 3) следующей теоремы.

Теорема 2. *Если $n=2$ и $A\in\mathfrak{R}$, то следующие три условия эквивалентны*:

1) $\overline{\lambda}_1(A)=\Omega(A)$;

2) $\Omega_1(A)=\Omega(A)$;

3) $\Omega(A)+\omega(A)=\chi(\operatorname{tr} A)$,

причем любое из них влечет за собой условие

4) $\underline{\lambda}_2(A)=\omega(A)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1), тогда в силу леммы 1. б), в) справедливы равенства

$$\overline{\lambda}_1(A)=\Omega_1(A)=\Omega(A),$$

означающие выполнение условий 2), а также 4) (см. теорему 1).

Далее, из 2), согласно равенству (7), вытекает 3).

Пусть, наконец, выполнено условие 3). В силу следствия 8.5 [6] существует система B, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t\to\infty}|B(t)-A(t)|=0,\ \lambda_2(B)=\omega(A),\ \lambda_1(B)\leqslant\Omega(A),$$

а значит, и соотношениям (см. замечание 1)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr}(B(\tau)-A(\tau))\,d\tau=0,$$

$$\chi(\operatorname{tr} A)=\chi(\operatorname{tr} B)\leqslant\lambda_1(B)+\lambda_2(B)\leqslant\Omega(A)+\omega(A)=\chi(\operatorname{tr} A).$$

Поэтому получаем

$$\chi(\operatorname{tr} B)=\lambda_1(B)+\lambda_2(B)=\Omega(A)+\omega(A),$$

т. е. $B\in\mathfrak{R}$ и $\lambda_1(B)=\Omega(A)$, следовательно, выполнено условие 1). Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любого значения $n>1$ существует система $A\in\mathfrak{R}$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\omega(A)<\underline{\lambda}_n(A)=\overline{\lambda}_1(A)<\Omega_1(A)<\Omega(A).$$

Доказательство. 1. Пусть P_1, P_2 — ортогональные проекторы на две взаимно ортогональные прямые в $\mathbf{R}^n$ соответственно. Положим

$$c(t)=\begin{cases}2, & t\in[t_0;\,t_1[,\\ 0, & t\in[t_{2k-1};\,t_{2k}[,\\ 3, & t\in[t_{2k};\,t_{2k+1}[,\end{cases}$$

где $t_0=0$, $t_k=2^k$ при $k\in\mathbf{N}$. Тогда, как показывает подсчет, $\chi(c)=1$ и система C с оператор-функцией

$$C(t)=c(t)\,(P_1-P_2)$$

удовлетворяет условиям

$$\Omega_1(C)=\chi(c)=-\omega(C),\quad \chi(\operatorname{tr} C)=0,\quad \Omega(C)=2.$$

2. Пусть система A задана оператор-функцией

$$A(t)=a(t)(P_1-P_2),$$

где

$$a(t)=(-1)^{\left[\frac{t}{2^k}\right]}c(t) \text{ при } t\in[t_{2k};\, t_{2k+2}[,\ k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Тогда имеем равенство $\chi(\operatorname{tr} A)=0$, а для оператора Коши X системы A получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|X(t,\,0)|=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t a(\tau)\,d\tau\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\,3\sqrt{t}=0,$$

т. е. $\lambda_1(A)\leqslant 0$, откуда $A\in\mathfrak{R}$ (см. замечание 1).

3. Кроме того, для каждого значения $T_k=2^k$ при всех $j>t_{2k}/T_k$ справедливо равенство

$$\ln|X(jT_k,\,(j-1)T_k)|=\int_{(j-1)T_k}^{jT_k}c(\tau)\,d\tau,$$

откуда $\Omega(A)=\Omega(C)$, $\Omega_1(A)=\Omega_1(C)$ (см. формулы (4), (6) и лемму 1.б)), и при $n=2$ в силу формулы (7) получаем $\omega(A)=\omega(C)$ (в случае $n>2$ последнее равенство проверяется аналогично предыдущим).

4. Докажем, что для любой системы $B\in\mathfrak{R}$, удовлетворяющей условию

$$|B-A|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0, \tag{8}$$

выполнена оценка $\lambda_1(B)\leqslant\varepsilon$. Пусть, напротив, справедливо неравенство

$$\lambda_1(B)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|Y(t,\,0)|=\lambda>\varepsilon,$$

где Y — оператор Коши системы B (см. замечание 4). Тогда для достаточно большого $k\in\mathbf{N}$ имеем оценки

$$\begin{gathered}\ln|X(t_{2k},\,0)|\geqslant\left(\lambda-\frac{\lambda-\varepsilon}{4}\right)t_{2k},\\ \ln|X(t_{2k-1},\,0)|\leqslant\left(\lambda+\frac{\lambda-\varepsilon}{4}\right)t_{2k-1},\end{gathered} \tag{9}$$

а с учетом условия (8) получаем

$$\ln|X(t_{2k},0)|\leqslant\ln|X(t_{2k},\,t_{2k-1})|+\ln|X(t_{2k-1},\,0)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(t_{2k}-t_{2k-1})+\left(\lambda+\frac{\lambda-\varepsilon}{4}\right)t_{2k-1}=\left(\lambda-\frac{3(\lambda-\varepsilon)}{8}\right)t_{2k},$$

что противоречит неравенству (9).

5. Таким образом, $\overline{\lambda}_1(A)\leqslant 0$, и при $n=2$ в силу леммы 2 получаем $\overline{\lambda}_1(A)=\underline{\lambda}_n(A)$ (в случае $n>2$ последнее соотношение вытекает из неравенства $\overline{\lambda}_n(A)\geqslant 0$, доказательство которого можно провести аналогично пункту 4). Теорема доказана.

Как видно из теоремы 3, для некоторых систем $A\in\mathfrak{R}$ все три показателя $\omega(A)$, $\Omega_1(A)$ и $\Omega(A)$ недостижимы. Наконец, следующая теорема утверждает, что показатель $\Omega(A)$ может быть недостижимым даже в случае достижимости двух других показателей, откуда, в частности, следует неэквивалентность условий 1) и 4) теоремы 2.

Теорема 4. *Для любого значения* $n>1$ *существует система* $A\in\mathfrak{R}$, *удовлетворяющая соотношениям*

$$\omega(A)=\Omega_1(A)<\Omega(A).$$

Доказательство этой теоремы дословно повторяет пункты 1—3 доказательства теоремы 3 с той лишь разницей, что последовательность чисел t_k выбирается по-другому:

$$t_0=0,\quad t_1=2,\quad t_{2k}=(2t_{2k-1})^2,\quad t_{2k+1}=3t_{2k}-2t_{2k-1} \text{ при } k\in\mathbf{N},$$

откуда $\chi(c)=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей//Сиб. матем. журн. 1969. **10**, № 1. 99—104.
3. Диб К. А. Одновременная достижимость центральных показателей//Дифференц. уравнения. 1974. **10**, № 12. 2125—2136.
4. Миллионщиков В. М. Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений//Докл. АН СССР. 1968. **179**, № 1. 20—23.
5. Сергеев И. Н. Подвижность показателей Ляпунова при малых в среднем возмущениях в классе правильных систем//Дифференц. уравнения. 1985. **21**, № 11. 2016—2017.
6. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений//Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. 111—166.

Поступила в редакцию
17.12.85