А. О. Слисенко, О максимальных регуляторах непрерывности конструктивных функций, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1967, том 4, 201–208

А.О.Слисенко

О МАКСИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРАХ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ*)

1. Посредством R_ν будем обозначать множество всех слов вида $x_1 * \ldots * x_\nu$, где $x_1, \ldots, x_\nu$ – дуплексы**) ($\nu \geqslant 1$). Буквы X, Y, Z, U будут использоваться в качестве переменных для элементов множества R_ν. Запись $x_1 * \cdots * x_\nu = y_1 * \cdots * y_\nu$ будет означать, что $x_i \underset{\text{в}}{=} y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$ (Знак "=" будет использоваться также для обозначения равенства множеств). Ф у н к ц и е й на R_ν будем называть всякий алгорифм f, такой что

$$\forall X (f(X) \overset{+}{\in} \underline{\text{вещ. дуп}}) \,\&\, \forall XY (X = Y \supset f(X) = f(Y)).$$

Пусть f – функция на R_ν, ε – положительное рациональное число, $X \in R_\nu$; пусть задано однопараметрическое се-

---

*)Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 12 и 19 мая 1966 г.

**)В заметке используются терминология и обозначения из [1]; термин "множество" применяется в том же смысле, что и в [1:0.18]. Буквы x, y, z, u и они же с нижними индексами будут использоваться в качестве дуплексных переменных.

мейство подмножеств множества R_ν, содержащих X и состоящее из множеств некоторого фиксированного типа (например, семейство кубов с центром в точке X). При рассмотрении некоторых задач, связанных с приближенным вычислением функции f в точке X с точностью до ε, часто бывает полезно знать максимальный (по включению) из тех элементов W указанного семейства, который удовлетворяет условию

$$\forall Y\,(Y \in W \supset |f(X)-f(Y)| \leq \varepsilon).$$

Ниже рассматривается вопрос о возможности построения такого максимального элемента в случае, когда f равномерно непрерывна на множествах из упомянутого семейства.

2. Пусть A - формула, γ - переменная для элементов множества R_ν, отличная от X, Y, Z, U и x_0 - положительный дуплекс. Будем говорить, что пара $(\mathsf{q}\gamma A, x_0)$ является допустимым семейством множеств относительно подмножества Π множества R_ν, если

1) A имеет ровно три параметра: α, β и γ, причем α - переменная для элементов множества R_ν, отличная от γ, а β - дуплексная переменная,

2) при любых X и x имеет место: $\Phi(X,x) \subseteq R_\nu$ (здесь и ниже $\Phi(X,x) \leftrightharpoons \mathsf{q}\gamma\, F^{\alpha,\beta}_{X,x} \llcorner A \lrcorner$),

$$3)\ \forall XYZUxy((X=Y \,\&\, Z=U \,\&\, 0 \leq x = y \leq x_0$$
$$\&\, Z \in \Phi(X,x)) \supset U \in \Phi(Y,y)),$$

4) $\forall XY(Y\in\Phi(X,0)\supset X=Y)$,

5) $\forall Xxy(0\leq x<y\leq x_0\supset(\Phi(X,x)\subseteq\Phi(X,y))$,

6) можно построить алгорифм E , такой что, каковы бы ни были X,ε,x , если $X\in\Pi$, ε - положительное рациональное число и $0\leq x\leq x_0$, то $E\ (X\square\varepsilon\square x)$ является конечной ε-сетью в множестве $\Phi(X,x)$(в смысле обычной метрики в ν-мерном евклидовом пространстве).

В дальнейшем считаем, что $(\mathfrak{q}\gamma A, x_0)$ - допустимое семейство множеств относительно подмножества Π множества R_ν . Это семейство будем обозначать буквой $\mathfrak{D}$. Буквы $\varepsilon,\varepsilon_1$ и δ будем использовать в качестве переменных для положительных рациональных чисел.

Будем говорить, что алгорифм φ является максимальным $\mathfrak{D}$-регулятором непрерывности[ж)] функции f на множестве Π , если при любом X из Π и любом ε

$$\varphi(\varepsilon\square X)\stackrel{+}{\in}\underline{\text{вещ.дуп}}\ \&\ И(f,\varepsilon,X,\varphi(\varepsilon\square X))\ \&$$

$$\forall y(И(f,\varepsilon,X,y)\supset y\leq\varphi(\varepsilon\square X)),$$

[ж)]Вместо слов " $\mathfrak{D}$ -регулятор непрерывности" будем писать $\mathfrak{D}$-РН.

здесь и ниже $\mathcal{U}(f, \varepsilon, X, z)$ обозначает формулу

$$0 \leq z \leq x_0 \& \forall \mathcal{U} (\mathcal{U} \in \Phi(X, z) \supset |f(X) - f(\mathcal{U})| \leq \varepsilon).$$

Наибольший интерес представляет построение максимального $\mathfrak{D}$-РН данной функции на R_ν. Однако это можно сделать далеко не всегда, даже если функция равномерно непрерывна на R_ν. Оказывается целесообразным обобщить понятие максимального $\mathfrak{D}$-РН так, как это сделано в следующем разделе.

3. Будем говорить, что слово ς в алфавите $\mathcal{U}_0$ является п с е в д о с е г м е н т о м, и писать $\varsigma \in R^\sigma$, если, каково бы ни было κ, $\langle \varsigma \rangle (\kappa)$ является*) вещественным сегментом и $\langle \varsigma \rangle (\kappa+1) \leq \langle \varsigma \rangle (\kappa)$. Будем говорить, что псевдосегмент ς является S-ч и с л о м и писать $\varsigma \in \underline{S_{чис}}$, если для любого ε можно указать κ, такое что длина $\langle \varsigma \rangle (\kappa)$ меньше ε. Введем обозначения:

$$\gamma[\varsigma] \leftrightharpoons \exists x \forall \kappa (x \in \langle \varsigma \rangle (\kappa)), \quad \varsigma \overset{=}{\scriptstyle\sigma} \eta \leftrightharpoons \gamma[\varsigma] = \gamma[\eta].$$

Будем говорить, что алгорифм ψ является м а к с и м а л ь н ы м о б о б щ е н и е м $\mathfrak{D}$-РН функции f на множестве Π, если, каково бы ни было ε и X из Π, $\psi(\varepsilon \square X)$ является псевдосегментом и

---

*) Выражение вида $\langle Q \rangle$, где Q - слово в $\mathcal{U}_0$, обозначает алгорифм в алфавите $\mathcal{U}_ч^{ca} \cup \{*\}$, записью которого является слово Q.

$$\forall x (x \in \Upsilon[\psi(\varepsilon \square X)] \supset И(f, \varepsilon, X, x)) \,\&\, \forall y (\forall z (z \in$$

$$\Upsilon[\psi(\varepsilon \square X)] \supset z < y) \supset \neg И(f, \varepsilon, X, y)).$$

4. О слове H в алфавите $\mathcal{U}_0 \cup \{*\}$ будем говорить, что оно является полным шифром функции на R_ν, равномерно непрерывной относительно $\mathfrak{D}$, и писать $H \in Ш_\nu$, если H имеет вид $P * Q$, где P и Q - слова в $\mathcal{U}_0$, такие, что $\langle P \rangle$ - функция на R_ν, а алгорифм $\langle Q \rangle$ перерабатывает любой X из Π в запись регулятора равномерной непрерывности функции $\langle P \rangle$ на множестве $\Phi(X, x_0)$. Если H - слово описанного вида, то $\overline{H}$ будет обозначать алгорифм $\langle P \rangle$. Буквы t и s будут использоваться в качестве переменных для полных шифров функций на R_ν, равномерно непрерывных относительно $\mathfrak{D}$.

Будем говорить, что алгорифм φ является оператором, строящим максимальные обобщенные $\mathfrak{D}$-РН на подмножестве E множества $Ш_\nu$, если для любого t из E выполнены условия: (1) $\varphi(t) \overset{+}{\in} c_0$, и алгорифм $\langle \varphi(t) \rangle$ является максимальным обобщенным $\mathfrak{D}$-РН функции $\overline{t}$ на Π; (2) каковы бы ни были s, ε, X, Y, если $s \in E, X \in \Pi, Y \in \Pi, X = Y$ и функции $\overline{t}$ и $\overline{s}$ равны, то $\langle \varphi(t) \rangle (\varepsilon \square X) \overset{=}{=} \langle \varphi(s) \rangle (\varepsilon \square Y)$.

О подмножестве E множества $Ш_\nu$ будем говорить, что оно является квазиоткрытым, если

$$\forall t\,(t\in E\supset\neg\neg\exists\varepsilon\,\forall s\,(\forall X\,(|\bar{t}(X)-\bar{s}(X)|\leq\varepsilon)\supset s\in E)).$$

<u>Теорема 1</u>. Можно построить алгорифм Ω, такой что, каково бы ни было подмножество E множества Ш_ν: (1) Ω является оператором, строящим максимальные обобщенные $\mathfrak{D}$-РН на E, (2) если E квазиоткрыто, то любой оператор φ, строящий максимальные обобщенные $\mathfrak{D}$-РН на E, удовлетворяет условию

$$\forall t\,\varepsilon\,X\,((t\in E\;\&\;X\in\Pi)\supset\gamma[\langle\Omega(t)\rangle(\varepsilon\,\square\,X)]\leq\gamma[\langle\varphi(t)\rangle(\varepsilon\,\square\,X)]),$$

(Свойство (2) алгорифма Ω показывает, что он является в некотором смысле наилучшим оператором, строящим максимальные обобщенные $\mathfrak{D}$-РН на E).

5. Пусть $t\in\text{Ш}_\nu$, а Ω - алгорифм, возможность построения которого утверждается в теореме 1. Формулируемая ниже теорема 2 показывает, при каких ограничениях на семейство $\mathfrak{D}$ и функцию $\bar{t}$ алгорифм Ω фактически строит максимальный $\mathfrak{D}$-РН функции $\bar{t}$ на множестве Π.

<u>Теорема 2</u>. Каковы бы ни были X и ε, если $X\in\Pi$, то

$$\langle\Omega(t)\rangle(\varepsilon\,\square\,X)\in\underline{S_{\text{чис}}}\equiv\forall xy\,((0\leq x<y\leq x_0\;\&\;\Phi(X,y)\cap B=\varnothing)$$

$$\supset\neg\neg\exists\delta\,(\delta<\varepsilon\;\&\;\Phi(X,x)\cap C=\varnothing)),$$

где $\varnothing$ обозначает пустое множество,

$$B \rightleftharpoons \mathsf{q} Y(|\bar{t}(X)-\bar{t}(Y)|>\varepsilon),\ C \rightleftharpoons \mathsf{q} Y(\varepsilon-\delta \leqslant |\bar{t}(X)-\bar{t}(Y)| \leqslant \varepsilon).$$

6. Будем говорить, что дуплекс x является **максимальным** ε-$\mathfrak{D}$-**индикатором непрерывности** в точке X из Π функции f на R_ν, и писать $\mathcal{M}(f, \varepsilon, X, x)$, если

$$\mathcal{U}(f, \varepsilon, X, x) \,\&\, \forall u (\mathcal{U}(f, \varepsilon, X, u) \supset u \leqslant x).$$

Легко видеть, что алгорифм φ тогда и только тогда является максимальным $\mathfrak{D}$-РН функции f (на R_ν) на множестве Π, когда при любом ε и любом X из Π алгорифм φ перерабатывает пару $\varepsilon \square X$ в дуплекс, являющийся максимальным ε-$\mathfrak{D}$-индикатором непрерывности в точке X функции f.

Пусть $t \in Ш_\nu$, ε - произвольно и Ω - тот же алгорифм, что и в разделе 5. Выражение $\mathcal{M}(\bar{t}, \varepsilon, X, x)$ будем обозначать буквой Γ. Будем говорить, что предикат Γ **определен в точке** X из Π, если $\neg\neg\exists x \Gamma$. Будем говорить, что предикат Γ **непрерывен в точке** X из Π, и писать $\Gamma \underline{\text{непр}}\, X$, если Γ определен в точке X и

$$\forall \varepsilon_1 \neg\neg\exists \delta \forall Y x y ((y \in \Pi \,\&\, \Gamma \,\&\, F^{X,x}_{Y,y} \llcorner \Gamma \lrcorner \,\&\, \varrho(X \square Y) \leqslant$$

$$\leqslant \delta) \supset |x-y| \leqslant \varepsilon_1),$$

где ϱ - обычная метрическая функция в ν-мерном евклидовом пространстве.

Если $\varepsilon < 1$ и если в качестве допустимого семейства множеств в R_1 взять семейство $(\mathfrak{q}\, x_1\, (|x_1 - X| \leq x), 2)$, то каждый из перечисленных ниже случаев реализуется на примере неубывающей функции: 1) Имеется X из Π, такой что Γ не определен в точке X. 2) При любом X из Π предикат Γ определен в точке X, но $\exists X (X \in \Pi \,\&\, \neg(\Gamma$ $\underline{\text{непр}}\ X))$. 3) Имеет место

$$\forall X (X \in \Pi \supset \Gamma\ \underline{\text{непр}}\ X), \qquad (1)$$

можно построить алгорифм R, такой что

$$\forall X (X \in \Pi \supset (R(X) \overset{+}{\in} \underline{\text{вещ.дуп}} \,\&\, F^{x}_{R(X)} \llcorner \Gamma \lrcorner)), \qquad (2)$$

и при любом X из Π имеет место $\langle \Omega(t) \rangle (\varepsilon \square X) \in \underline{S\,\text{чис}}$.

4) Имеет место (1), можно построить алгорифм R, удовлетворяющий условию (2), но имеется X из Π, такой что $\langle \Omega(t) \rangle (\varepsilon \square X) \notin \underline{S\,\text{чис}}$. 5) Имеет место (1), но невозможен алгорифм R, удовлетворяющий условию (2).

Очевидно, что имеет место двойное отрицание дизъюнкции случаев 1) - 5).

Литература

1. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Тр.Матем.ин-та АН СССР" 1962, 67, 15-294.