А. Ю. Сысоев, Тепловой взрыв в горючем газе, содержащем капли жидкого топлива, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2005, часть 3, 224–227

На графиках рисунка представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (15) в шестом приближении в сравнении с точным решением [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2005, 430 с.
3. *Кудинов* В.*А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Аналитические методы теплопроводности. Самара: СамГТУ, 2004. 209 с.

УДК 517.9

А.Ю. Сысоев

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ В ГОРЮЧЕМ ГАЗЕ, СОДЕРЖАЩЕМ КАПЛИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА

Изучению задачи о тепловом взрыве в смеси, состоящей из воспламеняющегося газа и капель горючей жидкости, посвящено достаточно много публикаций. В последние годы предлагаются все более сложные модели этого явления, анализ которых в основном опирается на использование современных вычислительных средств. При этом последовательно учитываются тепло- и массоперенос и процессы горения в смеси газа и капель горючего. Однако такой подход не позволяет учитывать вклад каждого фактора в отдельности и не дает возможности понять относительное влияние каждого из этих процессов. Альтернативный подход основывается на аналитическом анализе дифференциальных уравнений в некоторых предельных случаях. Этот подход не может заменить численное исследование модели, но может эффективно дополнить его.

Настоящая работа посвящена теоретическому изучению явления теплового взрыва, возникающего в воспламеняющейся газовой смеси с добавлением летучих капель горючего. Рассматриваемая физическая модель представляет собой развитие модели, предложенной в работе [1]. Исследуемая математическая модель представляет собой сингулярно возмущенную систему четырех существенно нелинейных дифференциальных уравнений, которые учитывают энергетические и концентрационные связи в газовой и жидкой фазах. Динамика этой дифференциальной системы исследуется методами геометрической теории сингулярных возмущений [2,3].

Итак, рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dR_d}{dt} = -\frac{F(T_d, T_g)}{R_d}, \tag{1}$$

$$\frac{d(R_d^3 T_d)}{dt} = \frac{3}{c_l \rho_l} R_d^2 (q_c + q_r - q_l), \tag{2}$$

$$C_{pg}\rho_g \varphi_g \frac{dT_g}{dt} = c_f Q_f \mu_f \varphi_g A \exp\left(-\frac{E}{R_u T_g}\right) - 4\pi R_d^2 n_d q_c, \tag{3}$$

$$\mu_f \varphi_g \frac{dc_f}{dt} = -c_f \mu_f \varphi_g A \exp\left(-\frac{E}{R_u T_g}\right) - 4\pi R_d^2 n_d \frac{q_l}{L}, \tag{4}$$

где R_d – радиус капли, T_g – температура газа, T_d – температура капли, c_f – молярная концентрация горючей компоненты в газовой смеси.

После процедуры обезразмеривания и введения некоторых параметров, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dr}{d\tau} = -k_1 \frac{F(\vartheta_d, \vartheta_g)}{r}, \tag{5}$$

$$\frac{d(r^3 \vartheta_d)}{d\tau} = k_2 r^2 (q_c + q_r - q_l) + k_3 r F(\vartheta_d, \vartheta_g), \tag{6}$$

$$\frac{d\vartheta_g}{d\tau} = k_4 \eta \exp\left(\frac{\vartheta_g}{\vartheta_g \beta + 1}\right) - k_5 r^2 q_c, \tag{7}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\eta \exp\left(\frac{\vartheta_g}{\vartheta_g \beta + 1}\right) - k_6 r^2 q_l. \tag{8}$$

При выбранных значениях параметров можно положить $q_r = 0$ в уравнении (6). Тогда для системы уравнений (5)–(8) существует интеграл

$$\vartheta_g + k_4\eta + \frac{k_5}{k_2} r^3 \vartheta_d + \frac{k_8}{3} r^3 = const \,.$$

Введем новую переменную

$$x = \vartheta_g + k_4\eta + \frac{k_5}{k_2} r^3 \vartheta_d + \frac{k_8}{3} r^3 ,$$

которая будет «медленной» в системе уравнений (5)–(8) при $q_r \neq 0$. Теперь имеем четыре уравнения относительно $x, \vartheta_g, \vartheta_d, r$:

$$\frac{dx}{d\tau} = k_5 r^2 q_r , \tag{9}$$

$$\frac{d\vartheta_g}{d\tau} = k_4 \eta(x, \vartheta_g, \vartheta_d, r) \exp\left(\frac{\vartheta_g}{\vartheta_g \beta + 1} \right) - k_5 r^2 q_c , \tag{10}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -k_1 \frac{F(\vartheta_d, \vartheta_g)}{r} , \tag{11}$$

$$\frac{d(r^3 \vartheta_d)}{d\tau} = k_2 r^2 (q_c + q_r - q_l) + k_3 r F(\vartheta_d, \vartheta_g) . \tag{12}$$

В системе (9)–(12) комбинация $r^3 \vartheta_d$ – «быстрая», поэтому имеется следующая медленная поверхность:

$$k_2 r^2 (q_c + q_r - q_l) + k_3 r F(\vartheta_d, \vartheta_g) = 0, \tag{13}$$

откуда $\vartheta_g = \vartheta_d + m/Y(\vartheta_d)$, $\dot{\vartheta}_g = M(\vartheta_d)\dot{\vartheta}_d$. В нулевом приближении можно положить $x = x_0 = const$, и тогда на медленной поверхности (13) порядок системы (9)–(12) может быть снижен до двух:

$$\frac{d\vartheta_d}{d\tau} = [k_4 \eta(x_0, \vartheta_g(\vartheta_d), \vartheta_d, r) \exp\left(\frac{\vartheta_g(\vartheta_d)}{\vartheta_g(\vartheta_d)\beta + 1} \right) - k_5 r^2 q_c] M^{-1}(\vartheta_d) , \tag{14}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -k_1 \frac{F(\vartheta_d)}{r} . \tag{15}$$

Численные решения систем (5)–(8), (9)–(12) и (14)–(15) хорошо согласуются между собой. Дальнейшее исследование системы (14)–(15) направлено на получение оценки времени зажигания, как одной из наиболее важных с практической точки зрения характеристик процесса горения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Goldfarb I, Sazhin S, and Zinoviev A.* Delayed thermal explosion in flammable gas containing fuel droplets: asymptotic analysis // Journal of Engineering Mathematics, No. 0, 2004. P. 1–16
2. *Sobolev V.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System & Control Letters, Vol. 5. 1984. P. 169–179.
3. *Gol'dshtein V., Sobolev V.* Integral manifolds in chemical kinetics and combustion // Singularity theory and some problems of functional analysis, AMS Translations, Series. Vol 2. No. 153. 1992. P. 73–92.

Работа частично поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы».

УДК 517.925

А.М. Тезин

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется расположение траекторий в пространстве $R^n((t,x)$. Идеи методов выражены в [1–12].

I. Локальный метод нелинейного анализа с помощью нормальных форм [1, 2]. Система рассматривается в векторном виде

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), i = \overline{1,n},\ X = (x_1,\ldots,x_n), \tag{1}$$

$\varphi_i(0) = 0$, φ_i – аналитические в окрестности $V(0)$ точки O с помощью нормальных форм

$$\dot{Y} = \psi(Y). \tag{2}$$

При $n = 2$ автономная система (1) допускает применение метода Фроммера или обобщенные методы [3, 8–12].

Пример 1 [1, с.70]. $x^2 y' = y - x$ при переходе к уравнению $y' = \dfrac{y-x}{x^2}$ показывает изоклину нуля $y = x$ и бесконечности $x = 0$. Полуоси системы (xy) и два луча $y = x$ $(x > 0, x < 0)$ разбивают плоскость на 6 углов; по знакам y' внутри углов устанавливается, что O – седло – узел, тогда как А. Д. Брюно утверждает иное.