М. Г. Григорян, Об абсолютной сходимости рядов Фурье–Хаара в метрике $L^p(0,1)$, $0<p<1$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2018, том 467, 34–54

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

М. Г. Григорян

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ–ХААРА В МЕТРИКЕ $L^p(0,1)$, $0<p<1$

§1. Введение

Работа посвящена изучению абсолютной сходимости рядов Фурье по системе Хаара в пространствах $L^p(0,1)$, $0<p<1$, с точки зрения классических теорем Н. Н. Лузина [1] и Д. Е. Меньшова [2–4] об исправлении функций.

Напомним следующие обозначения и определения. Пусть $p\in(0,\infty)$ и пусть $L^p[0,1]$– класс всех определенных на $[0,1]$ измеримых функций $f(x)$ с $\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx<\infty$.

Коэффициенты Фурье функции $f\in L^p[0,1], p\geqslant 1$, по системе Хаара $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ (см.[5]) обозначим через

$$c_k(f):=\int\limits_0^1 f(t)h_k(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Пусть

$$\operatorname{spec}(f):=\{k,\quad c_k(f)\neq 0,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}. \tag{1.2}$$

Под $||f||_\infty$ понимаем $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$. Меру Лебега измеримого множества E обозначим через $|E|$.

Определение 1. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($f_n\in L^p[0,1]$, $p\in(0,\infty)$, $n=1,2,\dots$) *называется безусловно сходящимся к* $f(x)$ *в метрике* $L^p[0,1]$, $p\in(0,\infty)$, *если для любой перестановки* $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *натуральных чисел ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в метрике* $L^p[0,1]$,

Ключевые слова: система Хаара, модификация функций, абсолютная сходимость в метрике $L^p(0,1)$, $0<p<1$.

т.е.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N}f_{\sigma(k)}(x)-f(x)\right|^p dx=0.$$

Определение 2. *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(f_n \in L^p[0,1],\ p \in [0,\infty],\ n=1,2,\ldots)$ *называется абсолютно сходящимся к* $f(x)$ *в метрике* $L^p[0,1]$, $p\in(0,\infty)$, *если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в метрике* $L^p[0,1]$ *и*

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|\right)^p dx<\infty.$$

Напомним, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Лузину (см. [1]).

Им в 1912 г. был получен знаменитый результат, согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию. В 1939 г. Д. Е. Меньшов [2] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема (Усиленное C-свойство). *Пусть* $f(x)$ *измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$. *Каково бы ни было* $\epsilon>0$, *можно определить непрерывную функцию* $g(x)$, *совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E, $|E|>2\pi-\epsilon$, *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

В работе [6] С. В. Кисляков доказал аналог теоремы Меньшова для произвольной локально компактной абелевой группы конечной топологической размерности. Им получен также следующий результат (см. [7]).

Теорема (С. В. Кисляков). *Пусть* $f(x)\in L^{\infty}[0,2\pi]$. *Каково бы ни было* $\delta>0$, *можно определить непрерывную функцию* $g(x)$, *такую, что*

$$|\{x:\ f(x)\neq g(x)\}|<\delta,$$

ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$ *и*

$$\|g\|_U = \sup\left\{ |\sum_{k=n}^{m} \widehat{g}(k)\zeta^k|; n, m \in \mathbb{Z}; |\zeta| = 1 \right\} < \text{const}\,(\ln\frac{1}{\delta})\,\|f\|_{L^\infty}\,.$$

Далее в этом направлении интересные результаты получены в работах [8–19]. Ряд работ [20–24] был посвящен теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера) монотонно убывали. Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к утверждениям, полученным в настоящей работе.

В работе [8] автору удалось доказать, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством для суммируемых функций.

Теорема 1 (Усиленное L^1-свойство)**.** *Для любого* $\epsilon > 0$ *существует измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 2\pi - \epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$ *можно найти функцию* $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$*, совпадающую с* $f(x)$ *на* E *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по* $L^1[0, 2\pi]$*-норме.*

Более того, на вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым – обладает ли произвольная ортонормированная система усиленным L^1-свойством, – автор дал положительный ответ (см. [9] и [10]). Для системы Хаара в работе [11] доказана следующая теорема.

Теорема (Ф. Г. Арутюнян)**.** *Для любой измеримой, почти всюду конечной на* $[0, 1]$ *функции* $f(x)$ *и для любого числа* $0 < \epsilon < 1$ *можно найти функцию* $\widetilde{f} \in L^2[0, 1], |\{x : f(x) \neq \widetilde{f}(x)\}| < \epsilon$*, так, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на* $[0, 1]$.

В работе [26] доказано, что безусловная и абсолютная сходимость почти всюду рядов Хаара $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$ эквивалентны (где $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Хаара и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – *последовательность действительных чисел*).

Точнее, верно следующее утверждение.

Теорема (Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов)**.** *Для безусловной сходимости почти всюду на множестве* $E \subset [0, 1]$ *с мерой* $|E| > 0$ *ряда*

Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k h_k(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на множестве* E *была конечна сумма* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k h_k(x)| < \infty$.

Отметим, что картина совсем иная в случае сходимости в метрике $L^p[0,1]$, $p \in (0,2]$.

В самом деле, нетрудно видеть, что ряд Фурье функции

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \frac{1}{k 2^{\frac{k}{2}}} h_{2^k+m}(x) \in \ L^2[0,1], \tag{1.3}$$

по системе Хаара сходится безусловно *во всех метриках* $L^p[0,1]$, $p \in (0,2]$, однако

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{N} |c_n(f) h_n(x)| \Big)^p dx = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \Big)^p = \infty, \quad p \in (0,2].$$

В этой работе доказывается следующий факт.

Теорема 2. *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $g \in L^1[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E *и такую, что ее ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится в метрике* $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, *все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции* g *по системе Хаара расположены в убывающем порядке и*

$$\int\limits_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(g) |h_n(x)| \Big)^p dx \leqslant \frac{2^{3-p}}{2^{1-p}-1} \Big(\int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx \Big).$$

Легко видеть, что из этой теоремы следует ещё и такой результат.

Теорема 3. *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $| E | > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $\widetilde{f} \in L^1[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E *и такую, что ее ряд Фурье–Хаара безусловно сходится к ней как в метрике* $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, *так и почти всюду на* $[0,1]$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции* $\widetilde{f}$ *по системе Хаара расположены в убывающем порядке.*

В связи с этой теоремой отметим, что А. М. Олевский [16] построил пример функции $f \in L^{\infty}[0,1]$, ряд Фурье которой по системе Хаара расходится почти всюду на $[0,1]$ после некоторой перестановки.

Замечание 1. Необходимо отметить, что как в теоремах Д. Е. Меньшова и С. В. Кислякова, так и в теореме Ф. Г. Арутюняна "исключительное" множество e, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции, а в теореме 1 и в теоремах 2 и 3, доказанных в настоящей статье, это исключительное множество не зависит от исправляемой функции, оно универсально, т.е. обслуживает целый функциональный класс.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что теорема 2 неверна для тригонометрической системы.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

Вопрос 1. Верна ли теорема 3 в случае $p = 1$*?*

Вопрос 2. Можно ли в теореме 1 исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы ее *ряд Фурье* по тригонометрической системе безусловно сходился по $L^1[0,2\pi]$-норме (хотя бы в метрике $L^p[0,2\pi]$, $0 < p < 1$, или по мере)?

Вопрос 3. Для каждой функции $f(x) \in L^1[0,2\pi]$ и для любого $\epsilon > 0$, можно ли найти функцию $g(x) \in L^1[0,2\pi]$ с $|\{x : g(x) \neq f(x)\ \}| < \epsilon$ так, чтобы ее ряд Фурье по тригонометрической системе безусловно сходился почти всюду на $[0,2\pi]$?

Вопрос 4. Для каждой функции $f(x) \in L^1[0,1]$ и для любого $\epsilon > 0$, можно ли найти функцию $g(x) \in L^1[0,1]$ с $|\{g(x) \neq f(x), x \in [0,1]\}| < \epsilon$ так, чтобы последовательность коэффициентов (или модулей коэффициентов) разложения функции $g(x)$ по классическим системам (по тригонометрической системе, по системе Франклина и Хаара) была бы монотонно убывающей?

В связи с этим вопросом отметим, что в случае системы Хаара исправленную функцию $\widetilde{f}$, когда исключительное множество e, на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции $f(x)$, невозможно выбрать так, чтобы для коэффициентов Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}$ выполнялись неравенства

$$c_m(\widetilde{f}) \geqslant c_{m+1}(\widetilde{f}), \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Это следует из следующей теоремы, доказанной в работе [27].

Теорема (П. Л. Ульянов). *Пусть последовательность положительных чисел* $\{a_i\}$ *такова, что*

$$a_n \geqslant a_{n+1} \quad \text{для всех натуральных } n, \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Если ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$$

сходится на множестве положительной меры к функции f, *то функция* $\bigl|f\bigr|$ *интегрируема в любой степени* $q \in [1,\infty)$.

Действительно, согласно этой теореме, для любого множества $E \subset [0,1]$ с $|E| > 0$, если выбрать функцию f таким образом, чтобы имело место соотношение $\int\limits_E f^2(t)\,dt = \infty$, то ни для какой функции $\widetilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающей с f на E, последовательность коэффицентов Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}$ не может монотонно стремиться к нулю.

Но тем не менее, в теоремах 2 и 3 все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье исправленной функции $\widetilde{f}$ расположены в убывающем порядке.

Отметим также, что в работе [28] доказано, что для системы Уолша вопрос 4 имеет положительный ответ, более того, доказано, что для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mid E \mid > 1-\epsilon$ и *функция* $g \in L^1[0,1]$ с

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0,1,2,\dots,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E, такую, что ряд Фурье–Уолша функции $\widetilde{f}(x)$ сходится по норме $L^1[0,1]$ и все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша удовлетворяют условию

$$|c_k(\widetilde{f})| = c_k(g), \quad k = 0,1,2,\dots.$$

§2. Доказательство основных лемм

Напомним определение системы Хаара $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, нормированной в L^2 (см., например, [5]).

Возьмем $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = (0,1)$, $h_0(x) = h_0^{(0)}(x) = \chi_{(0,1)}$, и

$$h_1(x) = h_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,1/2), \\ -1 & \text{при } x \in (1/2,1], \end{cases}$$

где $\chi(E)$ – характеристическая функция множества E.

Пусть $n = 2^k + i, 0 < i \leqslant 2^k, k = 1,2,\dots; \Delta_n = \Delta_k^{(i)} = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$. Тогда $h_n(x)$ – функция системы Хаара – определяется следующим образом

$$h_n(x) = h_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}-1} & \text{при } x = \frac{i-1}{2^k}, \\ 2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x \in (\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}), \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x \in (\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}), \\ -2^{\frac{k}{2}-1} & \text{при } x = \frac{i}{2^k}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Значения функции в точках $\{0,1\}$ определяются как односторонний предел в этих точках (соответственно правый и левый).

Отметим, что система Хаара является базисом во всех $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и безусловным базисом в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

Лемма 1. *Пусть даны числа $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, $N_0 > 1$, $q > 2$, $\delta \in (0,1)$ и интервал Хаара $\Delta = [\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu}]$, $i \in [1, 2^\nu]$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином по системе Хаара вида*

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k h_k(x)$$

такие, что

(1) $$\int_0^1 |Q(x)|\, dx \leqslant 2|\gamma||\Delta|,$$

(2) $$Q(x) = \gamma, \quad x \in E,$$

(3) $$|E| = (1 - 2^{-q})|\Delta|,$$

(4) $$\sum_{k=N_0}^{N} a_k |h_k(x)| < 2^q|\gamma|, x \in \Delta, \sum_{k=N_0}^{N} a_k|h_k(x)| = 0, x \in [0,1] \setminus \Delta,$$

(5) $$0 \leqslant a_k < \delta,$$

и ненулевые коэффициенты в $\{a_k\}_{k=N_0}^{N}$ *расположены в убывающем порядке,*

$$(6)\qquad \int\limits_{\Delta}\Big(\sum_{k=N_0}^{N} a_k|h_k(x)|\Big)^p\,dx < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1}|\gamma|^p|\Delta| \quad \textit{для всех}\;\; p\in(0,1).$$

Доказательство леммы 1. Пусть $\{l_i\}$– подпоследовательность натуральных чисел с

$$l_{i+1}-l_i \geqslant 2,\quad i\in\mathbb{N}, \tag{2.2}$$

$$l_1 \geqslant 2\;\log_2\frac{|\,\gamma\,|}{\delta}+\nu. \tag{2.3}$$

Определим полином Q_1, полагая

$$Q_1 = 2^{-\frac{l_1}{2}}\,|\,\gamma\,|\sum_{s\;(\Delta_{l_1}^{(s)}\subset\Delta)} h_{l_1}^{(s)}.$$

Полином Q_1 на интервале Δ принимает значения γ и $-\gamma$. Через E_1 обозначим множество, на котором Q_1 равняется $-\gamma$. По индукции определим полиномы $Q_2, Q_3, \dots, Q_q$ и множества $E_2, E_3, \dots, E_q$ следующим образом:

$$Q_{i+1} = 2^{i-\frac{l_{1+i}}{2}}\,|\,\gamma\,|\sum_{s\;(\Delta_{l_{1+i}}^{(s)}\subset E_i)} h_{l_{1+i}}^{(s)}(x), \tag{2.4}$$

$$E_{i+1} = \{t\in E_i:\quad Q_{i+1}(t)\neq 2^i\gamma\}. \tag{2.5}$$

Ясно, что

$$|Q_{i+1}(x)| = 2^{i-\frac{l_{1+i}}{2}}|\gamma|\sum_{s\;(\Delta_{l_{1+i}}^{(s)}\subset E_i)}|h_{l_{1+i}}^{(s)}(x)| = \begin{cases}2^i\,|\,\gamma\,|, & x\in E_i,\\ 0, & x\notin E_i.\end{cases}, \tag{2.6}$$

$$|\,E_1\,| = \frac{|\,\Delta\,|}{2}\quad\text{и}\quad |\,E_{i+1}\,| = \frac{|\,E_i\,|}{2}\quad\text{для всех}\quad i=1,2,\dots,q-1 \tag{2.7}$$

и

$$\Delta = E_0\supset E_1\supset E_2\ldots\supset E_q. \tag{2.8}$$

Определим множество E и полином Q следующим образом:

$$E = \Delta\setminus E_q, \tag{2.9}$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{q} Q_i(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k h_k(x)\quad(\text{см. (1.4), (2.3), (2.4)}), \tag{2.10}$$

где

$$a_k = \int_0^1 Q(x) h_k(x)\, dx.$$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты в разложениях полиномов Q_i неотрицательны, поэтому неотрицательными будут и коэффициенты a_k. Все ненулевые коэффициенты полинома Q_i равняются $2^{i-1-\frac{l_i}{2}} \mid \gamma \mid$, а согласно (2.2) имеем

$$2^{i-1-\frac{l_i}{2}} \mid \gamma \mid \geqslant 2^{i-\frac{l_{1+i}}{2}} \mid \gamma \mid,$$

поэтому все ненулевые числа в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке.

Для окончания доказательства первого пункта леммы остается заметить, что

$$2^{i-\frac{l_{1+i}}{2}} \mid \gamma \mid \leqslant 2^{-\frac{l_1}{2}} \mid \gamma \mid < \delta,$$

где мы воспользовались неравенством (2.3).

Из (2.7) и (2.9) непосредственно следует, что

$$\mid E \mid = (1 - 2^{-q})|\Delta|.$$

А согласно (2.4)–(2.8) и (2.10) получаем

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{на } \Delta \setminus E_q, \\ -(2^q - 1)\gamma & \text{на } E_q, \\ 0 & \text{вне } \Delta, \end{cases}$$

$$\int_0^1 |Q(x)|\, dx \leqslant 2|\gamma|\, |\Delta|,$$

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_k |h_k(x)| = \sum_{i=1}^{q} |Q_i(x)| < 2^q |\gamma|, \quad x \in \Delta,$$

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_k |h_k(x)| = 0, \quad x \in [0,1] \setminus \Delta.$$

Учитывая соотношения (2.4)–(2.8), для всех $p \in (0,1)$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Delta} \Big(\sum_{k=N_0}^{N} a_k |h_k(x)| \Big)^p dx \\
&= \sum_{s=0}^{q-1} \int\limits_{E_s \setminus E_{s+1}} \Big(\sum_{i=1}^{q} |Q_i(x)| \Big)^p dx + \int\limits_{E_q} \Big(\sum_{i=1}^{q} |Q_i(x)| \Big)^p dx \\
&= \sum_{s=0}^{q-1} \int\limits_{E_s \setminus E_{s+1}} \Big(\sum_{i=1}^{s} |Q_i(x)| \Big)^p dx + \int\limits_{E_q} \Big(\sum_{i=1}^{q} |Q_i(x)| \Big)^p dx \\
&\leqslant |\gamma|^p \sum_{s=0}^{q} 2^{sp} \frac{|\Delta|}{2^s} < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} |\gamma|^p |\Delta|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Лемма 2. *Пусть даны числа* $k_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon, \delta < 1$, *и полином* $f(x)$ *по системе Хаара. Тогда можно найти измеримое множество* $E \subset [0,1]$, *функцию* g *и полином по системе Хаара вида*

$$Q = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k h_{n_k} \ , \ n_k \nearrow,$$

удовлетворяющие условиям:

1) $| E | > 1 - \epsilon$,
2) $g(x) = f(x)$ *для всех* $x \in E$,
3) $\int_0^1 |g(x)|\, dx < 2\Big(\int_0^1 |f(x)|\, dx \Big)$,
4) $\int_0^1 |Q(x) - g(x)|\, dx < \delta$,
5) $\delta > a_k > a_{k+1} > 0$, $k \in (k_0, \bar{k})$,
6) $\int_0^1 \Big| \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \Big|^p dx < \frac{2^{2-p}}{2^{(1-p)}-1} \Big(\int_0^1 |f(x)|\, dx \Big)^p$ *для всех* $p \in (0,1)$.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x) \ (\text{где } \Delta_k \text{ имеют вид } \Delta_m^{(i)}), \quad [0,1) = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} \Delta_\nu. \quad (2.11)$$

Положим

$$q = \Big[\log_2\Big(\epsilon^{-1}\int_0^1 |f(x)|\,dx\Big)\Big] + 1. \tag{2.12}$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} h_{n_k}(x),\ \ \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad m_0 = k_0 + 1, \tag{2.13}$$

которые для всех $1 \leqslant \nu \leqslant \mu_0$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| = 0, \quad x \notin \Delta_\nu, \tag{2.14}$$

$$\delta > a_{m_{\nu-2}}^{(\nu-1)} \geqslant \dots \geqslant a_k^{(\nu-1)} \geqslant a_{k+1}^{(\nu-1)} \geqslant \dots \geqslant a_{m_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)}$$

$$> a_{m_{\nu-1}}^{(\nu)} \dots \geqslant a_k^{(\nu)} \geqslant a_{k+1}^{(\nu)} \geqslant \dots \geqslant a_{m_\nu - 1}^{(\nu)} \quad > 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \mu_0, \tag{2.15}$$

$$|E_\nu| = (1 - 2^{-q})|\Delta_\nu|, \tag{2.16}$$

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x)|\ dx < 2|\gamma_\nu||\Delta_\nu|, \tag{2.18}$$

$$\int_{\Delta_\nu} \Big(\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)|\Big)^p dx \leqslant \frac{2^{1-p}}{2^{1-p} - 1} |\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu|, \quad p \in (0, 1), \tag{2.19}$$

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| < 2^q|\gamma|, \quad x \in \Delta,$$

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| = 0, \quad x \in [0, 1] \setminus \Delta. \tag{2.20}$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x), \tag{2.21}$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} E_\nu, \tag{2.22}$$

$$Q(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k h_{n_k}(x), \quad \bar{k} = m_{\mu_0} - 1, \tag{2.23}$$

где

$$a_k = b_k + \frac{\frac{1}{2}\inf_{0<p\leqslant 1}\{\frac{\epsilon\delta}{2}, \int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\}}{2^k \max_{x\in[0,1]} |h_{n_{\bar{k}}}(x)|}, \quad k \in (k_0, \bar{k}] \tag{2.24}$$

и

$$b_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in [m_{\nu-1}, m_\nu), \quad \nu \in [1, \mu_0]. \tag{2.25}$$

Из (2.11), (2.12), (2.17) и (2.21)–(2.23) вытекает, что

$$g(x) = f(x) \text{ при } x \in E,$$

$$|E| > 1 - \epsilon.$$

В силу (2.13), (2.15), (2.17)–(2.19) и (2.23)–(2.25), получим

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 |f(x)|\,dx\right) \leqslant \int\limits_0^1 |g(x)|\,dx < 2\int\limits_0^1 |f(x)|\,dx,$$

$$\int\limits_0^1 |Q(x) - g(x)|\,dx < \delta, \quad \delta > a_k > a_{k+1} > 0, \quad k \in (k_0, \bar{k}).$$

Учитывая соотношения (2.11), (2.19) и (2.23)–(2.25), будем иметь

$$\int_0^1 \Big(\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \Big)^p dx$$

$$\leqslant \int_0^1 \Big(\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} b_k |h_{n_k}(x)| \Big)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p\, dx}{2}$$

$$\times \int_0^1 \Big(\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} \frac{1}{2^k \max_{x\in[0,1]} |h_{n_{\bar{k}}}(x)|} |h_{n_k}(x)| \Big)^p dx$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_\nu} \Big(\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} b_k |h_{n_k}(x)| \Big)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p\, dx}{2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_\nu} \Big(\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| \Big)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p\, dx}{2}$$

$$\leqslant \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \sum_{\nu=1}^{\mu_0} |\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu| + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p\, dx}{2}$$

$$\leqslant 2 \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 |f(x)|^p\, dx. \qquad \square$$

Замечание 3. Из доказательства леммы 2 видно, что *функция* $g(x)$ *и полином* $Q(x)$ удовлетворяют также условиям

$$\|Q(x) - g(x)\|_\infty < \delta, \qquad \Big\| \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \Big\|_\infty < \frac{2\|f\|_\infty}{\epsilon}.$$

§3. Доказательство теоремы 2

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ и $p \in (0,1)$. Обозначив через

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по системе Хаара с рациональными коэффициентами и последовательно применив лемму 2, можем найти последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, множеств $\{E_n\}$ и полиномов

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} h_{s_k}(x), \quad m_n \nearrow, s_k \nearrow, m_0 = 0, \tag{3.2}$$

которые для всех $n \geqslant 1$ удовлетворяют условиям:

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \tag{3.3}$$

$$|E_n| > 1 - 2^{-n-2}, \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|\, dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)|\, dx, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 \left| \overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x) \right| < 2^{-8(n+1)p^{-1}} \lambda, \text{ где } \lambda = \min\left\{ \left(\frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}; 1 \right\}, \tag{3.6}$$

$$0 < a_{s_{m_n}} < a_{s_{k+1}} < a_{s_k} < \ldots; \quad k \in [m_{n-1}; m_n), \quad n \geqslant 1, \tag{3.7}$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx \leqslant 2\frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx \right). \tag{3.8}$$

Положим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{s_k} h_{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} h_{s_k}(x) \tag{3.9}$$

и

$$E = \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n \right), \quad n_0 = |\log_{\frac{1}{2}} \epsilon| + 1. \tag{3.10}$$

Очевидно, что (см. (3.4), (3.10)) $|E| > 1 - \epsilon$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i(x), \tag{3.11}$$

где

$$a_i = a_{s_k} - \frac{a_{s_k} - a_{s_{k+1}}}{(s_{k+1} - s_k)}(i - s_k) \quad \text{при} \quad i \in [s_k, s_{k+1}), \quad k \geqslant 0,$$

$$a_i = a_{s_0} + (s_0 - i), \quad i \in [0, s_0). \tag{3.12}$$

Ясно, что $a_i > a_{i+1} > 0$, $i \geqslant 1$, $(a_i \searrow 0)$ (см. (3.7)).

Пусть $p \in (0,1)$, $f(x) \in L^1[0,1]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x) - f(x)\right| dx = 0, \quad k_1 > n_0, \tag{3.13}$$

$$\int_0^1 |f_{k_n}(x)|\, dx < 2^{-8np^{-1}}\lambda, \quad n \geqslant 2, \quad \lambda = \min\left\{\left(\frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}; 1\right\}. \tag{3.14}$$

Ясно, что

$$\int_0^1 |f_{k_1}(x)|^p\, dx < \frac{3}{2}\int_0^1 |f(x)|^p\, dx. \tag{3.15}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \cdots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$, $\overline{g}_{k_1}(x) = g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ и полиномы

$$\overline{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{k=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_k} h_{s_k}(x), \quad 1 \leqslant n \leqslant q-1, \tag{3.16}$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E, \ 1 \leqslant n \leqslant q-1,$$

$$\int_0^1 |g_n(x)|\, dx < 2^{-(n+1)}, \quad 1 < n \leqslant q-1,$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)\right]\right| dx < 2^{-(n+1)p^{-1}}, \quad 1 < n \leqslant q-1, \tag{3.17}$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_i}|h_{s_i}(x)|\right)^p dx < \left(\frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)2^{-n},$$
$$1 < n \leqslant q-1, \quad p \in (0,1).$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1)) таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right) \right| dx < 2^{-8qp^{-1}} \lambda. \tag{3.18}$$

В силу (3.14), (3.17) и (3.18) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right| dx \right) < 2^{-2qp^{-1}} \lambda.$$

Отсюда и из (3.18) вытекает

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right|^p dx < 2^{-q} \lambda^p. \tag{3.19}$$

Положим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)]. \tag{3.20}$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.5), (3.10) и (3.17)–(3.20), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \tag{3.21}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right) \right| dx$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)|\, dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right| dx < 2^{-q-1}. \tag{3.22}$$

Из (3.14), (3.17) и (3.18) следует

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right| dx \leqslant \int_0^1 \left| \overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x) \right| dx$$

$$+ \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right) \right| dx < 2^{-2qp^{-1}} \lambda. \tag{3.23}$$

В силу (3.8), (3.14) и (3.19) имеем

$$\int_0^1 \Bigl(\sum_{i=m_{\nu_{q-1}}}^{m_{\nu_q}-1} a_{s_i}|h_{s_i}(x)|\Bigr)^p\,dx < \Bigl(\frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\Bigr)2^{-q}. \tag{3.24}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ $(g_1(x) = f_{k_1}(x))$ и полиномов $\{\overline{Q}_{\nu_q}(x)\}$, удовлетворяющих условиям (3.21)–(3.24) для всех $q > 1$. Из (3.22) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^1 |g_q(x)|\,dx < \infty.$$

Определим функцию $g(x)$ и последовательность чисел $\{\delta_i\}$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \tag{3.25}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i \in \{s_k\}_{k=1}^{\infty}\bigcap\bigcup_{q=1}^{\infty}[m_{\nu_{q-1}}, m_{\nu_q}),\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{3.26}$$

Из (3.13), (3.21) и (3.25) вытекает

$$g(x) \in L^1[0,1], \quad g(x) = f(x), \quad x \in E.$$

В силу (3.22), (3.2), (3.25) и (3.26) для всех $q > k_0$ будем иметь

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \Bigl|\sum_{i=1}^{s_{m_{\nu_q}}} \delta_i a_i h_i(x) - g(x)\Bigr|\,dx\\ &\qquad\leqslant \int_0^1 \Bigl|\sum_{i=1}^{q-1}[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)]\Bigr|\,dx + \sum_{i=q}^{\infty}\int_0^1 |g_i(x)|\,dx < 2^{-q}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\delta_i a_i = \int_0^1 g(x)h_i(x)\,dx = c_i(g), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Учитывая соотношения (3.13), (3.15) и (3.26), получим для $p \in (0,1)$:

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i(g) |h_i(x)| \, dx \right)^p$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\sum_{i=m_{\nu_1-1}}^{m_{\nu_1}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{i=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx$$

$$\leqslant 2 \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \left(\int_0^1 |f_{k_1}(x)|^p \, dx \right) + \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \leqslant \frac{2^{3-p}}{2^{1-p}-1} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right). \quad \square$$

Замечание 4. Из доказательства теоремы 2 (применяя также замечание 3) видно, что можно получить более общий результат.

Теорема 4. *Существует ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x), \quad a_i > a_{i+1} > 0, \quad i \geqslant 1, \quad (a_i \searrow 0),$$

удовлетворяющий следующим условиям.

1. *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E и такую, что ее ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится во всех метриках $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$, и*

$$c_n(g) = a_n, \quad n \in \operatorname{spec}(g),$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(g) |h_n(x)| \right)^p dx \leqslant \frac{2^{3-p}}{2^{1-p}-1} \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right), \quad p \in (0,1).$$

2. *Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0,1]$ функции $f(x)$ и для любого числа $0 < \epsilon < 1$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in L^{\infty}[0,1]$, $|\{x : \ f(x) \neq \widetilde{f}(x)\}| < \epsilon$, так, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на $[0,1]$ и*

$$c_n(\widetilde{f}) = a_n, \quad n \in \operatorname{spec}(\widetilde{f}).$$

Замечание 5. Отметим, что в пункте 2 теоремы 4 “исключительное” множество, на котором происходит изменение, существенно зависит от исправляемой функции $f(x)$: для системы Хаара невозможно выбрать универсальное “исключительное” множество.

Отметим также, что в работе [30] доказано, что для системы Фабера–Шаудера это возможно.

Теорема 5. *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1 - \epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $g \in L^1[0,1]$*, совпадающую с* f *на* E*, такую, что ее разложение* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(g)\varphi_k(x)$ *по системе Фабера–Шаудера абсолютно сходится равномерно на* $[0,1]$ *и*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(g)|\varphi_n \right\|_{L^\infty} \leqslant \|g\|_{L^\infty} < 2\,\|f\|_{L^\infty}.$$

Необходимо отметить, что теорема 5 не верна для всех базисов пространства $C[0,1]$, в частности в работе [29] доказано, что она не верна для системы Франклина. Заметим, что система Франклина является ортогональным базисом пространства $C[0,1]$ (функции этой системы непрерывны на $[0,1]$ и ортогональны).

Интересно было бы выяснить: существует ли ортогональный базис пространства $C[0,1]$, для которого имела бы место теорема 5?

Список литературы

1. Н. Н. Лузин, *К основной теореме интегрального исчисления.* — Мат. Сб., **28**, No. 2 (1912), 266–294.
2. Д. Е. Меньшов, *О равномерной сходимости рядов Фурье.* — Мат. Сб., **53**, No. 2 (1942), 67–96.
3. Д. Е. Меньшов, *О рядах Фурье от суммируемых функций.* — Тр. Моск. мат. общества, **1** (1952), 5–38.
4. Д. Е. Меньшов, *О рядах Фурье непрерывных функций.* — Уч. Записки, Математика, **148**, No. 4 (1951), 108–132.
5. A. Haar, *Zur Teorie der orthogonalen Funktionensysteme.* — Math. Ann. **69** (1910), 331–371.
6. С. В. Кисляков, *Замечания об исправлении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **135** (1984), 69–75.
7. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **92** (1979), 182–191.
8. M. G. Grigoryan, *On the convergence of Fourier series in the metric of* L^1. — Analysis Math. **17** (1991), 211–237.

9. М. Г. Григорян, *О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам.* — Мат. Сб., **181**, No. 8 (1990), 1011–1030.
10. М. Г. Григорян, *Об усиленном L^p_μ свойстве.* — Мат. Сб., **194**, No. 10 (2003), 77–106.
11. Ф. Г. Арутюнян, *О рядах по системе Хаара.* — ДАН Арм. ССР, **42** (1966), 134–140.
12. Б. И. Кашин, Г. Г. Кошелева, *Об одном подходе к теоремам об исправлении.* — Вестник МГУ, Сер. мат. мех., **1** (1988), 6–8.
13. К. И. Осколков, *Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры.* — ДАН СССР **228**, No. 2 (1976), 304–306.
14. J. J. Price, *Walsh series and adjustment of functions on small sets.* — Illinois J. Math. **13** (1969), 131–136.
15. Ш. В. Хеладзе, *Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L^1.* — Мат. Сб. **107**, No. 2 (1978), 245–258.
16. А. М. Олевский, *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана.* — ДАН СССР **238** (1978), 796–799.
17. Г. Г. Геворкян, *О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина.* — Доклады АН Арм. ССР **83**, No. 1 (1986) 15–18.
18. M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, *On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series.* — J. Math. Anal. Appl. **434**, No. 1 (2016), 554–567.
19. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **217** (1994), 83–91.
20. M. G. Grigoryan, R. E. Zink, *Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system.* — Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134**, No. 12 (2006), 3495–3505.
21. М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, *Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций.* — Analysis Math., **32** (2006), 49–80.
22. M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, *On the coefficients of expansion of elements from $C[0,1]$ space by the Faber–Schauder system.* — J. Funct. Spaces Appl. **2** (2011), 34–42.
23. М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, *Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера–Шаудера.* — Мат. Заметки **93**, No. 3 (2013), 17–25.
24. К. А. Навасардян, А. А. Степанян, *О рядах Хаара.* — Изв. НАН Армении, **43**, No. 4 (2007), 3–12.
25. М. Г. Григорян, *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация.* — Мат. Сб. **203**, No. 3 (2012), 49–78.
26. Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, *Об абсолютной и безусловной сходимости.* — УМН **22**, No. 3 (1967), 240–242.
27. П. Л. Ульянов, *О рядах по системе Хаара*, Мат. Сб., **63**, No. 3 (1964), 356–391.

28. М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, *Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша.* — Изв. РАН, Сер. матем. **80**, No. 6 (2016), 65–92.
29. Л. Н. Галоян, М. Г. Григорян, А. Х. Кобелян, *О сходимости рядов Фурье по классическим системам.* — Мат. Сб. **206**, No. 7 (2015), 55–94.
30. M. G. Grigoryan, T. M. Grigoryan, *On the absolute convergece Schauder series.* — Advances Theor. Appl. Math. **9**, No. 1 (2014), 11–14.

Grigoryan M. G. On the absolute convergence of Fourier–Haar series in the metric of $L^p(0,1)$, $0<p<1$.

It is proved that for any $\epsilon>0$ there exists a measurable set $E\subset[0,1]$ with $|E|>1-\epsilon$ such that for any function $f(x)\in L^1[0,1]$ one can find a function $g(x)\in L^1[0,1]$ equal to $f(x)$ on E such that its Fourier–Haar series converges absolutely in the metric of $L^p(0,1)$, $0<p<1$.

Физический факультет,
Кафедра высшей математики
Ереванский государственный
университет,
ул. А. Манукяна 1,
0025, Ереван, Арм. Республика
E-mail: gmarting@ysu.am

Поступило 8 июня 2018 г.