A. N. Vetokhin, A property of central exponents, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2002, Number 1, 52–53

Краткие сообщения

УДК 517.926.4

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

А. Н. Ветохин

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с ограниченными непрерывными по $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функциями $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Наделим множество $\mathcal{M}_n$ структурой метрического пространства с равномерной на полупрямой $\mathbb{R}^+$ метрикой

$$\rho(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t) - B(t)\|,$$

получившееся метрическое пространство обозначим $\mathcal{M}_n^u$.

В [1] доказано, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, рассматриваемые как функции на пространстве $\mathcal{M}_n^u$, принадлежат второму классу Бэра, а в [2] доказано, что они могут не принадлежать первому классу Бэра. Поэтому возникает вопрос о нахождении минимальной функции первого класса Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$, оценивающей показатели Ляпунова сверху.

Следуя [3], функционал $\lambda : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ назовем *остаточным функционалом*, если для каждой пары оператор-функций A, $B \in \mathcal{M}_n^u$, совпадающих на всей полупрямой $\mathbb{R}^+$, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$. Напомним [3], что i-й центральный показатель определяется формулой $\Omega_i(A) = \lim\limits_{T \to \infty} \overline{\lim\limits_{m \to \infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_{L_i}(Tj, T(j+1))\|$, где $X_{L_i}(\tau, t)$ — сужение оператора Коши системы (1) на линейное подпространство i-го показателя Ляпунова.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть $\varphi(\cdot) : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ — остаточный функционал первого класса Бэра на $\mathcal{M}_n^u$ и для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ выполнены неравенства $\lambda_i(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \Omega_i(A)$, тогда $\varphi(A) \equiv \Omega_i(A)$.*

Доказательство теоремы разделим на леммы, которые представляют самостоятельный интерес.

Множество систем $B \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющих условию $B(t) - A(t) \to 0$ при $t \to \infty$, обозначим через $\mathcal{B}(A)$, а сами возмущения $B - A$ системы A при этом условии назовем *бесконечно малыми* [3].

Лемма 1 [4]. *Пусть остаточный функционал $\lambda(\cdot) : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{M}_n^u$. Тогда для любых двух систем $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{B}(A)$ верно равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению леммы 1, нашлись две системы A, B, для которых выполнены соотношения

$$B \in \mathcal{B}(\mathcal{A}),\ \lambda(\mathcal{A}) \neq \lambda(\mathcal{B}). \tag{2}$$

Пусть C — произвольная система из $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Построим последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_n$:

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t) \quad \text{при } t \in [0, m]; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) \quad \text{при } t \in [m, m+1]; \\ A(t) \quad \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Пределом этой последовательности в пространстве $\mathcal{M}_n^u$ является система C, так как

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t \in [m,m+1)} \|A_m(t) - C(t)\| + \sup_{t \in [m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| =$$

$$= \sup_{t \in [m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) - C(t)\| + \sup_{t \in [m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| \leqslant 2 \sup_{t \in [m,\infty)} \|A(t) - C(t)\|,$$

следовательно,

$$\lim_{m \to \infty} \rho(A_m, C) = \lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [m,\infty)} \|A(t) - C(t)\| = 0. \tag{3}$$

В силу остаточности функционала λ получаем $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Аналогично построим последовательность $\{B_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_n$, для которой выполнены соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \rho(B_m, C) = 0, \quad \lambda(B_m) = \lambda(B). \tag{4}$$

Из (2)–(4) следует, что каждая точка C замкнутого множества $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ является точкой разрыва функционала λ, но пространство $\mathcal{M}_n^u$ — полное, а поэтому функционал не является функцией первого класса Бэра на этом пространстве [5, с. 430]. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\overline{\lambda}(\cdot) : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ функционал, заданный следующей формулой:

$$\overline{\lambda}(A) = \sup_{B\in\mathcal{B}(A)} \lambda(B).$$

Лемма 2. *Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$ и для произвольной системы A выполнены неравенства $\lambda(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \overline{\lambda}(A)$, тогда $\varphi(A) \equiv \overline{\lambda}(A)$.*

Доказательство. Допустим, что существуют система A и число $\delta > 0$, такие, что выполнено равенство $\varphi(A) = \overline{\lambda}(A) - \delta$. В силу определения функционала $\overline{\lambda}$ существует система $B \in \mathcal{B}(A)$, такая, что $\lambda(B) \geqslant \overline{\lambda}(A) - \frac{\delta}{2}$, следовательно, $\varphi(B) \geqslant \lambda(B) > \overline{\lambda}(A) - \delta = \varphi(A)$. Согласно лемме 1, функционал φ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Из леммы 2 следует, что если функционал $\overline{\lambda}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$, то он является наименьшей функцией первого класса Бэра, оценивающей функционал λ сверху.

Завершение доказательства теоремы. Пусть $\lambda_i(A)$ — i-й показатель Ляпунова системы A. Обозначим через $\lambda^{\max}$ минимальную полунепрерывную сверху мажоранту i-го показателя Ляпунова, т.е.

$$\lambda_i^{\max}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\rho(A,B)\leqslant\varepsilon} \lambda_i(B).$$

В силу определения функционал $\lambda_i^{\max}$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$. В [3] доказана справедливость следующих равенств:

$$\overline{\lambda}_i(A) = \lambda_i^{\max}(A) = \Omega_i(A), \tag{5}$$

из которых вытекает, что фукционал $\overline{\lambda}_i$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$. Следовательно, из леммы 2 и равенств (5) получаем, что для остаточного функционала φ первого класса Бэра, удовлетворяющего неравенствам

$$\lambda_i(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \Omega_i(A),$$

выполнено тождество $\varphi(A) \equiv \Omega_i(A)$. Теорема доказана.

Таким образом, наименьшей функцией первого класса Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$, оценивающей i-й показатель Ляпунова сверху, является i-й центральный показатель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миллионщиков В.М.* Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. 1986. **39**, № 1. 29–51.
2. *Рахимбердиев М.И.* О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1962. **31**, № 6. 925–931.
3. *Сергеев И.Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. 111–166.
4. *Ветохин А.Н.* О классе Бэра остаточных показателей // Дифференц. уравнения. 1995. **31**, № 5. 909–1000.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию
13.09.2000