УДК 514.76

К ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ СТРУКТУРНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Ю. И. Ермаков

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются тензорные структуры, которые могут быть заданы в векторных расслоениях послойными полями ковариантных или контравариантных тензоров произвольной валентности. Римановы структуры при этом, как правило, исключаются, так как во многих построениях предполагается, что валентность структурного тензора больше двух. Фиксирование в векторном расслоении структурного тензорного поля указанного типа дает возможность при достаточно широких предположениях о его строении ввести внутреннюю линейную связность, позволяющую развить геометрию этих структур и использовать полученные результаты при решении ряда задач дифференциальной геометрии и ее приложений.

Многие общие построения могут быть проведены в произвольных векторных расслоениях банахова типа или с некоторыми ограничениями. Им посвящено четыре первых параграфа. В последних двух параграфах существенно используется конечномерность слоев.

Статья посвящена обзору работ, развивающих теорию инвариантов указанных выше структур, рассмотрение же различных их приложений в эту работу не включено. Некоторые из приложений данных структур в конечномерных касательных расслоениях к инвариантному оснащению подмногообразий как общего, так и специального вида, в том числе с пониженными размерностями касательных пространств высших порядков, в теории сетей, в геометрических теориях дифференциальных уравнений с частными производными содержатся в работах [3], [13], [14], [16], [28], [38], [42].

Глава 1

ПОСЛОЙНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ В ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

§ 1. Векторные расслоения над банаховыми многообразиями

Пусть E — банахово пространство над полем $\mathbf{P}$. Следуя [4], банаховым пространством будем называть линейное топологическое пространство, топология которого может быть определена одной нормой, полное относительно этой нормы, т. е. полное нормируемое топологическое линейное пространство, в котором нет фиксированного нормирования. В общем случае будем считать $\mathbf{P}$ полем действительных чисел $\mathbf{R}$ или полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Рассмотрим многообразие X класса C^r, определенное C^r-атласом K [4], $r \in \{4, 5, \ldots, \infty, \omega\}$, если $\mathbf{P}=\mathbf{R}$, и $r=\omega$, если $\mathbf{P}=\mathbf{C}$. Карта на многообразии X есть упорядоченная тройка $c=(U, \varkappa, E)$, где U — множество в X, $\varkappa$ — частичное инъективное отображение из X в E такое, что первая проекция его совпадает с множеством U, т. е. $pr_1\varkappa=U$, а вторая проекция $pr_2\varkappa$ есть открытое множество в банаховом пространстве E. Известно, что задание C^r-атласа определяет на X единственную топологию, обладающую свойством: для любой карты $c=(U, \varkappa, E) \in K$ множество U открыто и отображение $\varkappa: pr_1\varkappa \to pr_2\varkappa$ есть гомеоморфизм. Дополнительным условием является требование хаусдорфовости этой топологии.

Структура векторного расслоения класса C^r на множестве M с сюръективным отображением p на базисное многообразие X определяется классом C^r-эквивалентных векторных атласов, индуцируемым отношением C^r-согласованности векторных карт на M. Каждая векторная карта $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ на M задается биективным отображением $\bar{\varkappa}$ множества $\overset{-1}{p}(U)$ на декартово произведение $U \times F$ открытого множества U на базе X на банахово пространство F, причем выполняется условие $\overset{-1}{p}(\bar{\varkappa}(x, v))=x$, $x \in U$, $v \in F$. Если задана векторная карта $\bar{c}$, то для каждой точки $x \in U$ определяется биективное отображение $\bar{c}_x$ из F на слой $M_x=\overset{-1}{p}(x)$ формулой $\bar{c}_x(v)=\overset{-1}{\bar{\varkappa}}(x, v)$. Две векторные карты $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ и $\bar{c}'=(U', \bar{\varkappa}', F')$ на M называются C^r-согласованными, если существует C^r-морфизм λ из открытого подмногообразия $U \cap U'$ в банахово пространство $L(F; F')$ всех непрерывных линейных отображений из F в F' такой, что для любой точки $x \in U \cap U'$ имеет место равенство $\bar{c}_x=\bar{c}_x' \circ \lambda(x)$. Морфизм λ называется функцией перехода для векторных карт $\bar{c}$ и $\bar{c}'$. Векторный C^r-атлас $\bar{K}$ на M определяется условиями: $\bigcup\limits_{\bar{c} \in \bar{K}} U_{\bar{c}}=X$ и любые его две векторные карты вляются C^r-согласованными. Поэтому, в частности, имеем, что значения функций перехода $\lambda(x)$ будут топлинейными изоморфизмами. Множество M с заданной на нем структурой векторного расслоения называют (тотальным) пространством векторного расслоения, а сюръективное отображение p — проекцией расслоения.

Если x — произвольная точка базы X, то на слое $M_x = \overset{-1}{p}(x)$ существует одна и только одна структура банахова пространства такая, что для всякой векторной карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F) \in \bar{K}$ отображение $\bar{c}_x : F \to M_x$ есть изоморфизм. Задание C^r-атласов K и $\bar{K}$ определяет C^r-атлас $\tilde{K}$ сверхкарт, определяющий на тотальном пространстве M структуру многообразия класса C^r. Каждая сверхкарта $\tilde{c} = (\overset{-1}{p}(U), \tilde{\varkappa}, E \times F)$ строится по карте $c = (U, \varkappa, E)$ на базе и векторной карте $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F)$ расслоения с помощью отображения $\tilde{\varkappa} : \overset{-1}{p}(U) \to E \times F$ со значениями $\tilde{\varkappa}(a) = (\varkappa(p(a)), \overset{-1}{\bar{c}}_{p(a)}(a))$, $a \in \overset{-1}{p}(U)$. Проекция $p : M \to X$ является морфизмом многообразий. Когда слои M_x векторного расслоения (M, X, p) конечномерны и изоморфны векторному пространству F размерности n, сверхкарта $\tilde{c} = (\overset{-1}{p}(U), \tilde{\varkappa}, E \times \mathbf{R}^n)$ на M определяется заданием карты $c = (U, \varkappa, E)$ на X, векторной карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F)$ и базиса (e_α), $\alpha, \ldots, \omega = 1, \ldots, n$ векторного пространства F следующим построением. Так как биекция $\bar{\varkappa} : \overset{-1}{p}(U) \to U \times F$ определяет изоморфизм $\bar{c}_x : F \to M_x$, то векторы $e_\alpha(x) = \bar{c}_x(e_\alpha)$ образуют базис в M_x. Поэтому, введя отображение $\theta_{cx} : \mathbf{R}^n \to M_x$ формулой $\theta_{cx}(\xi^\alpha) = \xi^\alpha e_\alpha(x) = \xi$, $(\xi^\alpha) \in \mathbf{R}^n$, мы можем положить $\tilde{\varkappa}(\xi) = (\varkappa(p(\xi)), \overset{-1}{\theta}_{cp(\xi)}(\xi))$.

При обращении к римановой метрике в векторном расслоении слои его необходимо должны допускать гильбертову структуру (см. [25], [27]).

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbf{P}$. X — многообразие банахова типа, определенное атласом K. Рассмотрим атлас векторных карт $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, H)$ на множестве M с сюръективным отображением p его на X. Известно (см., например, [27]), что множество топлинейных изоморфизмов $Lis(E; E')$ открыто в $L(E; E')$. Две векторные карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, H)$ и $\bar{c}' = (U', \bar{\varkappa}', H')$ на M называются C^r-гильбертсогласованными, если существует C^r-морфизм $\lambda : U \cap U' \to Lis(H; H')$ такой, что для любой точки $x \in U \cap U'$ значение функции перехода $\lambda(x)$ есть гильбертов изоморфизм H на H' и имеет место равенство $\bar{c}_x = \bar{c}_x' \circ \lambda(x)$. Атлас $\bar{K}$ векторных карт $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, H)$ на M

называется гильбертовым C^r-атласом, если он состоит из попарно C^r-гильбертсогласованных карт. Структурой векторного расслоения гильбертова типа (гильбертова векторного расслоения) класса C^r на множестве M с базисным многообразием X класса C^r называется класс C^r-гильбертэквивалентных векторных атласов на M. Если (M, X, p) — гильбертово векторное расслоение, то для каждой точки $x \in X$ существует на слое $M_x = \overset{-1}{p}(x)$ одна и только одна структура гильбертова пространства такая, что для всякой векторной карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, H)$ отображение $\bar{c}_x : H \to M_x$ есть гильбертов изоморфизм.

Векторный C^{r-1}-атлас, определяющий структуру касательного расслоения многообразия X, возникает естественным образом при задании C^r-атласа K на X. Пусть x — произвольная точка многообразия X. Рассмотрим множество упорядоченных пар (c, v), где $c = (U, \varkappa, E)$ — карта из K в окрестности точки x и v — вектор из E. Касательным вектором к X в точке x называется класс $\varepsilon_x \langle (c, v) \rangle$ эквивалентных пар (c, v) по отношению эквивалентности ε_x, определяемому следующим условием: если $c' = (U', \varkappa', E')$ — другая карта в окрестности точки x, то $((c, v), (c', v')) \in \varepsilon_x \Leftrightarrow D(\varkappa' \circ \overset{-1}{\varkappa})_{\varkappa(x)} v = v'$, где $D(\varkappa' \circ \overset{-1}{\varkappa})_{\varkappa(x)}$ — значение производной отображения $\varkappa' \circ \overset{-1}{\varkappa}$ в точке $\varkappa(x)$. Каждая карта $c = (U, \varkappa, E)$, определенная в окрестности точки x, задает биективное отображение θ_{cx} из E в множество $T_x(X)$ всех касательных векторов в точке x формулой $\theta_{cx}(v) = \varepsilon_x \langle (c, v) \rangle$, которое определяет на $T_x(X)$ структуру банахова пространства, не зависящую от выбора карты c. Банахово пространство $T_x(X)$ называется касательным пространством к многообразию X в точке x. При переходе от карты $c = (U, \varkappa, E)$ к карте $c' = (U', \varkappa', E')$ соответствующие отображения θ_{cx} и $\theta_{c'x}$, где $x \in U \cap U'$, связаны соотношением

$$\theta_{c'x} \circ D(\varkappa' \circ \overset{-1}{\varkappa})_{\varkappa(x)} = \theta_{cx}. \tag{1.1}$$

Векторные карты $\bar{c} = (U, \varkappa_c, E)$ на тотальном пространстве $T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$ касательного расслоения $(T(X), X, \pi)$, где π — естественная проекция $T(X)$ на X, определяются соответствующими картами $c = (U, \varkappa, E)$ из C^r-атласа K на X заданием отображения $\varkappa_c : \overset{-1}{\pi}(U) \to U \times E$ по формуле $\varkappa_c(\tau) = (\pi(\tau), \overset{-1}{\theta}_{c\pi(\tau)}(\tau))$, $\tau \in \overset{-1}{\pi}(U)$.

Пусть X — чистое [4] гильбертово многообразие с модельным гильбертовым пространством H. Тогда каждая карта $c = (U, \varkappa, H)$ на X определяет векторную карту $\bar{c} = (U, \varkappa_c, H)$. Совокупность троек $\bar{c} = (U, \varkappa_c, H)$ составляют гильбертов векторный C^{r-1}-атлас касательного расслоения многообразия X.

Применение функторов, определенных на категории банаховых пространств, дает удобную формализацию процедуры построения по заданным векторным расслоениям новых векторных расслоений.

Рассмотрим для определенности функтор N класса C^r от трех аргументов, ковариантный по первому и контравариантный по двум другим, переводящий банаховы пространства в банаховы пространства. Если (M_1, X, p_1), (M_2, X, p_2), (M_3, X, p_3) — три векторных расслоения класса C^r банахова типа с одной базой X, то на множестве $\mathrm{N}(M_1, M_2, M_3) = \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{N}(M_{1x}, M_{2x}, M_{3x})$, где через M_{ex}, $e=1, 2, 3$, обозначен слой над точкой $x \in X$ соответствующего векторного расслоения, естественным образом вводится структура векторного расслоения класса C^r. Векторный C^r-атлас $\overline{K}^*$ этой структуры строится следующим образом. Введем проекцию $p^*: \mathrm{N}(M_1, M_2, M_3) \to X$, положив $p^*(\sigma) = x$ для любого $\sigma \in \mathrm{N}(M_{1x}, M_{2x}, M_{3x})$. Пусть $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ — векторные C^r-атласы на M_1, M_2, M_3 соответственно и $\overline{c}_e = (U, \overline{\varkappa}_e, F_e) \in \overline{K}_e$. Образуем тройку $\overline{c}^* = (U, \overline{\varkappa}^*, \mathrm{N}(F_1, F_2, F_3))$, задав отображение $\overline{\varkappa}^*: \overset{-1}{p^*}(U) \to U \times \mathrm{N}(F_1, F_2, F_3)$ формулой $\overline{\varkappa}^*(\sigma) = (p^*(\sigma), \mathrm{N}(\overset{-1}{\overline{c}_{1p^*(\sigma)}}, \overline{c}_{2p^*(\sigma)}, \overline{c}_{3p^*(\sigma)})(\sigma))$. Нетрудно проверить, что $\overline{c}^*$ является векторной картой на множестве $\mathrm{N}(M_1, M_2, M_3)$. Обозначим через $\overline{K}^*$ совокупность векторных карт $\overline{c}^*$, соответствующих всевозможным векторным картам $\overline{c}_e \in \overline{K}_e$. Для отображения $\overline{c}_x^*: \mathrm{N}(F_e) \to \mathrm{N}(M_{ex})$ имеем $\overline{c}_x^* = \mathrm{N}(\overline{c}_{1x}, \overset{-1}{\overline{c}_{2x}}, \overset{-1}{\overline{c}_{3x}})$, $\overset{-1}{\overline{c}_x^*} = \mathrm{N}(\overset{-1}{\overline{c}_{1x}}, \overline{c}_{2x}, \overline{c}_{3x})$. Любые две векторные карты $\overline{c}^* = (U, \overline{\varkappa}^*, \mathrm{N}(F_e))$ и $'\overline{c}^* = (U', '\overline{\varkappa}^*, \mathrm{N}(F_e'))$ из $\overline{K}^*$, очевидно, C^r-согласованы, причем морфизм $\lambda^*: U \cap U' \to L(\mathrm{N}(F_e); \mathrm{N}(F_e'))$ определяется формулой $\lambda^*(x) = \mathrm{N}(\lambda_1(x), \lambda_2'(x), \lambda_3'(x))$, где $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ — значения в точке $x \in U \cap U'$ функций перехода исходных векторных расслоений, а $\lambda_2'(x)$ и $\lambda_3'(x)$ — обратные изоморфизмы для $\lambda_2(x)$ и $\lambda_3(x)$ соответственно.

Пусть X и X' — два многообразия класса C^r и $\varphi: X \to X'$ — морфизм. Рассмотрим векторные расслоения (M, X, p) и (M', X', p'). Отображение $\psi: M \to M'$ называется φ-морфизмом векторных расслоений, если выполняется следующее условие. Для любой точки $x_0 \in X$ существуют векторная карта $\overline{c} = (U, \overline{\varkappa}, F)$ на M в окрестности точки x_0, векторная карта $\overline{c}' = (U', \overline{\varkappa}', F')$ на M' в окрестности точки $\varphi(x_0)$ и отображение $\mu: U \to L(F; F')$ класса C^r такие, что $\varphi(U) \subset U$ и $\psi_x \circ \overline{c}_x = \overline{c}'_{\varphi(x)} \circ \mu(x)$ для любого $x \in U$, где ψ_x — ограничение отображения ψ на M_x. Известно [4], что всякий φ-морфизм ψ векторных расслоений (M, X, p) и (M', X', p') является морфизмом многообразий M и M', и для всякого $x \in X$ он индуцирует непрерывное линейное отображение из M_x в $M'_{\varphi(x)}$. Морфизмом двух векторных расслоений с одной базой X называют всякий id_X-морфизм этих расслоений. Биективный морфизм ψ называется изоморфизмом векторных расслоений (M, X, p) и (M', X, p'). В этом случае ψ является диффеоморфизмом многообразий M и M', обратное отображение $\overset{-1}{\psi}$ является морфизмом векторного расслоения M' в векторное расслоение M и $(\overset{-1}{\psi})_x = \psi_x^{-1}$ для всякого $x \in X$.

Предположим, что векторные расслоения (M, X, p) и (M', X, p') имеют один типовой слой F и модельным пространством базы X является банахово пространство E. Тогда, если ψ — изоморфизм векторных расслоений, то для соответствующих точек $z \in M$ и $z' = \psi(z) \in M'$ нетрудно подобрать так векторные карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F)$ и $\bar{c}' = (U, \bar{\varkappa}', F)$, чтобы имело место равенство $\overset{-1}{\bar{c}}_x(z) = \overset{-1}{\bar{c}'}_x(z')$. Фиксируя на базе X карту $c = (U, \varkappa, E)$, получим сверхкарты в M и M', в которых соответствующие при изоморфизме ψ точки z и z' будут иметь одинаковые координаты. Векторные карты, а также сверхкарты изоморфных векторных расслоений, построенные указанным способом, будем называть общими.

Действие функторов может быть продолжено до изоморфизмов векторных расслоений. Рассмотрим для простоты контравариантный функтор ν класса C^r от одного переменного, переводящий банаховы пространства в банаховы пространства, и изоморфизм ψ векторных расслоений (M, X, p) и (M', X, p').

Теорема. Существует один и только один такой изоморфизм $\nu(\psi)$ из $\nu(M')$ на $\nu(M)$, что $\nu(\psi)_x = \nu(\psi_x)$.

Доказательство. Если ψ_x — изоморфизм (топлинейный) из M_x на M_x', то $\nu(\psi_x)$ — изоморфизм из $\nu(M_x')$ на $\nu(M_x)$. Определим отображение $\nu(\psi)$ из $\nu(M')$ в $\nu(M)$, положив $\nu(\psi)_x = \nu(\psi_x)$. Ясно, что $\nu(\psi)$ — биективное отображение. Остается показать, что $\nu(\psi)$ — морфизм векторных расслоений. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка на базе, тогда существуют в окрестности точки x_0 векторные карты $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F)$ на M и $\bar{c}' = (U', \bar{\varkappa}', F')$ на M' и отображение $\mu: U \to L(F; F')$ класса C^r такие, что $\psi_x \circ \bar{c}_x = \bar{c}_x' \circ \mu(x)$ для любого $x \in U$. Векторные карты $\bar{c}$ и $\bar{c}'$ определяют векторные карты ${}^*\bar{c} = (U, {}^*\bar{\varkappa}, \nu(F))$ на $\nu(M)$ и ${}^*\bar{c}' = (U', {}^*\bar{\varkappa}', \nu(F'))$ на $\nu(M')$. Покажем, что существует отображение ${}^*\mu: U \to L(\nu(F'); \nu(F))$ класса C^r такое, что $\nu(\psi)_x \circ {}^*\bar{c}_x' = {}^*\bar{c}_x \circ {}^*\mu(x)$. Действительно, имеем: $\nu(\psi_x \circ \bar{c}_x) = \nu(\bar{c}_x' \circ \mu(x))$, или $\nu(\bar{c}_x) \circ \nu(\psi_x) =$

$=\nu(\mu(x))\circ\nu(\bar{c}_x')$. С другой стороны, получаем $\nu(\bar{c}_x)\circ\nu(\psi_x)=$ $={}^*\mu(x)\circ\nu(\bar{c}_x')$. Отсюда ${}^*\mu(x)=\nu(\mu(x))$. Таким образом, отображение ${}^*\mu$ определяется равенством ${}^*\mu=\nu\circ\mu$.

Легко видеть, что если $\bar{c}$ и $\bar{c}'$ — общие векторные карты для изоморфизма ψ, то действие функторов также приводит к общим векторным картам ${}^*\bar{c}$ и ${}^*\bar{c}'$.

§ 2. Сечения векторных расслоений

Сечением класса C^s (C^s-сечением) векторного расслоения (M, X, p) класса C^r $(r\geqslant s)$ называется сечение $A: X\to M$, являющееся морфизмом многообразий класса C^s. Векторным полем класса C^s на многообразии X класса C^r $(r>s)$ называется C^s-сечение $T: X\to T(X)$ касательного расслоения $(T(X), X, \pi)$.

Легко показать, что произвольное сечение $A: X\to M$ векторного расслоения (M, X, p) является C^s-сечением тогда и только тогда, когда для любой векторной карты $\bar{c}=(U, \varkappa, F)$ отображение $h_A: U\to F$, задаваемое формулой $h_A(x)=\overset{-1}{c_x}(A_x)$, где $A_x=A(x)$, $x\in U$, является морфизмом класса C^s.

Отображение $h_A: U\to F$ мы называем, следуя терминологии, принятой в работах [25], [27], [37], главной частью сечения A векторного расслоения (M, X, p) в векторной карте $\bar{c}=(U, \varkappa, F)$. Если $\bar{c}'=(U', \varkappa', F')$ — любая другая векторная карта и $x\in U\cap U'$, то, вычисляя значение $h'_A(x)$ главной части сечения A в векторной карте $\bar{c}'$, получим следующую формулу преобразования главных частей C^s-сечения при замене векторных карт

$$h'_A(x)=\lambda(x)(h_A(x)), \tag{1.2}$$

где $\lambda(x)$ — значение функции перехода.

Важную роль в исчислении сечений играет следующая теорема, описывающая сечение в картах векторного C^r-атласа, с помощью главных частей.

Теорема. Пусть в каждой векторной карте $\bar{c}=(U, \varkappa, F)$ векторного C^r-атласа $\bar{K}$ на M задан C^s-морфизм $h: U\to F$, причем в любых двух векторных картах $\bar{c}=(U, \varkappa, F)$, $\bar{c}'=$ $=(U', \varkappa', F')\in\bar{K}$ соответствующие морфизмы h и h' связаны на общей части $u=U\cap U'$ их определения формулой (1.2). Тогда существует и притом единственное сечение $A: X\to M$ класса C^s, главные части которого в векторных картах атласа $\bar{K}$ совпадают с заданными морфизмами.

Доказательство очевидно: C^s-сечение $A: X\to M$ однозначно определяется заданием в каждой векторной карте $\bar{c}=(U, \varkappa, F)$ из $\bar{K}$ значений $A_x=c_x(h(x))$.

Пусть $(N(M_e), X, p^*)$, $e=1, 2, 3$, — векторное расслоение, выведенное из расслоений (M_e, X, p_e) с помощью функтора N, тогда главная часть сечения $A^*: X \to \mathrm{N}(M_e)$ в векторной карте $\overline{c^*}$ есть морфизм $h_{A^*}: U \to \mathrm{N}(F_e)$, определяемый формулой $h_{A^*}(x) = \mathrm{N}(\overset{-1}{\bar{c}_{1x}}, \bar{c}_{2x}, \bar{c}_{3x})(A_x^*)$. При преобразовании векторных карт главная часть сечения A^* преобразуется по формуле $h'_{A^*}(x) = \mathrm{N}(\lambda_1(x), \lambda_2'(x), \lambda_3'(x))(h_{A^*}(x))$.

Если взять вместо произвольного векторного расслоения касательное расслоение $(T(X), X, \pi)$, базой которого является многообразие X класса C^r, то легко видеть, что сечение $T: X \to T(X)$ будет векторным полем класса C^s на многообразии X тогда и только тогда, когда для любой карты $c = (U, \varkappa, E)$ отображение $\eta_T: U \to E$, задаваемое формулой $\eta_T(x) = \overset{-1}{\theta_{cx}}(T_x)$, $T_x = T(x)$, является морфизмом класса C^s. Отображение $\eta_T: U \to E$ будем называть главной частью векторного поля T в карте $c = (U, \varkappa, E)$. В силу соотношений (1.1) и (1.2) получим следующую формулу преобразования главных частей векторного поля T при переходе от карты $c = (U, \varkappa, E)$ к карте $c' = (U', \varkappa', E')$ на многообразии X:

$$\eta_T'(x) = D(\varkappa' \circ \overset{-1}{\varkappa})_{\varkappa(x)}(\eta_T(x)), \tag{1.3}$$

где $x \in U \cap U'$. Теперь по аналогии с C^s-сечением произвольного векторного расслоения может быть доказана теорема об определении векторного поля класса C^s на многообразии X заданием морфизмов $\eta_T: U \to E$ в некотором C^r-атласе K на X, преобразующихся по формуле (1.3).

Обозначим через $\mathfrak{X}_s M(X)$ модуль всех сечений класса C^s векторного расслоения (M, X, p) класса C^r над кольцом $\mathbf{F}(X)$ морфических функций многообразия X, а через $\mathfrak{X}_s(X)$ — $\mathbf{F}(X)$-модуль векторных полей класса C^s на многообразии X класса C^r. Будем считать, что $\mathfrak{X}M(X) = \mathfrak{X}_r M(X)$ и $\mathfrak{X}(X) = \mathfrak{X}_{r-1}(X)$. Если $A \in \mathfrak{X}_s M(X)$ — произвольное C^s-сечение и $\tilde{c}$ — сверхкарта, определяемая векторной картой $\bar{c} = (U, \bar{\varkappa}, F)$ и картой $c = (U, \varkappa, E)$, а $h_A: U \to F$ — главная часть сечения A в векторной карте $\bar{c}$, то отображение класса C^s $A_c = h_A \circ \overset{-1}{\varkappa}$ из $\varkappa(U)$ в F будем называть представлением главной части h_A сечения A в карте c. Обозначая через A_{cx} значение отображения A_c в точке $\varkappa(x)$, где $x \in U$, получим $A_{cx} = h_A(x)$. Производная DA_c является отображением класса C^{s-1} из $\varkappa(U)$ в $L(E; F)$. Значение его в точке $\varkappa(x)$ будем обозначать DA_{cx}. Аналогично, если $T \in \mathfrak{X}_s(X)$ — произвольное векторное поле класса C^s, $c = (U, \varkappa, E)$ — карта на X, $\eta_T: U \to E$ — главная часть векторного поля T в карте c, то отображение $T_c = \eta_T \circ \overset{-1}{\varkappa}$ из $\varkappa(U)$ в E класса C^s будем называть представлением главной части η_T векторного поля T в карте c. Вычисляя значение представления T_c в точке $\varkappa(x)$, получим $T_{cx}=\eta_T(x)$. Производная DT_c есть отображение класса C^{s-1} из $\varkappa(U)$ в $L(E;E)$, ее значение в точке $\varkappa(x)$ будем обозначать DT_{cx}.

Пусть $\varphi: X\to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, x — произвольная точка многообразия X, $c=(U, \varkappa, E)$ — карта на X в окрестности точки x, $d=(V, \chi, F)$ — карта на Y в окрестности точки $\varphi(x)$ и $\varphi(U)\subset V$, тогда отображение $\Phi=\chi\circ\varphi\circ\overset{-1}{\varkappa}$ из $\varkappa(U)$ в $\chi(V)$ принадлежит классу C^r и его производная в точке $\varkappa(x)$ $D\Phi(\varkappa(x))$ является непрерывным линейным отображением из E в F. Непрерывное линейное отображение $\varphi^T_x=\theta_{d\varphi(x)}\circ D\Phi(\varkappa(x))\circ\overset{-1}{\theta}_{cx}$ из $T_x(X)$ в $T_{\varphi(x)}(Y)$, как известно [4], не зависит от выбора карт c и d и называется касательным линейным отображением к φ в точке $x\in X$. Рассмотрим теперь векторное поле T на многообразии X и морфическую функцию $f: X\to \mathbf{P}$. Тогда Tf есть функция на X со значениями в $\mathbf{P}$, задаваемая равенством $(Tf)(x)=f_x{}^T(T_x)$. Таким образом, определяется действие векторных полей на морфические функции. Если T — векторное поле класса C^s на X и f — морфическая функция, то Tf есть функция класса C^s и ее значения в координатной окрестности любой карты $c=(U, \varkappa, E)$ определяются равенством $(Tf)(x)=Df_c(\varkappa(x))(\eta_T(x))$.

Скобка Ли векторных полей T_1, $T_2\in\mathfrak{X}(X)$ многообразия X класса C^r может быть определена следующим построением. В каждой карте $c=(U,\varkappa,E)$ C^r-атласа K на X зададим морфизм $\eta_{[T_1,T_2]}: U\to E$ класса C^{r-2} формулой $\eta_{[T_1,T_2]}(x)=$ $=DT_{2cx}(T_{1cx})-DT_{1cx}(T_{2cx})$. Нетрудно показать [19], что если $\eta_{[T_1,T_2]}$ и $\eta'_{[T_1,T_2]}$ — два таких морфизма, определенных в картах $c=(U,\varkappa,E)$ и $c'=(U',\varkappa',E')$ соответственно, то на общей части $U\cap U'$ областей задания эти морфизмы связаны формулой (1.3). Таким образом, существует и притом единственное векторное поле $[T_1,T_2]$ класса C^{r-2}, называемое коммутатором или скобкой Ли векторных полей T_1 и T_2, значение которого в точке $x\in X$ определяется по формуле $[T_1, T_2]_x=\theta_{cx}(DT_{2cx}(T_{1cx})-$ $-DT_{1cx}(T_{2cx}))$. Ясно, что скобка Ли $\mathbf{P}$-линейна по каждому аргументу, антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби.

§ 3. Послойные и связующие тензорные поля векторных расслоений и условия их локализации

Начало систематического изложения теории послойных и связующих тензорных полей в расслоениях было дано в работах [6], [7], [29] в связи с развитием общей теории геометрических объектов и различных ее приложений в дифференциальной геометрии, механике, вариационном исчислении. Обобщение понятий послойных и связующих тензорных полей на случай векторных расслоений банахова типа и развитие аппарата ковариантного дифференцирования их для построения системы дифференциальных комитантов структурных тензорных полей рассматривалось в [20]—[22].

Определение тензорного поля как сечения некоторого векторного расслоения соответствует первоначальному представлению о тензорном поле как о гладком соответствии, соотносящем каждой точке базисного многообразия тензор соответствующего вида, и позволяет активно использовать в исчислении тензорных полей теорию сечений векторных расслоений. Вместе с тем, при действиях с тензорными полями часто удобно представлять их как отображения, действующие на модуле сечений и полилинейные над кольцом морфических функций на базе. Известное свойство локализации тензорного поля [9], заданного как отображения, действующего на модуле гладких векторных полей дифференцируемого многообразия и полилинейного над кольцом дифференцируемых функций, дает возможность перейти к заданию этого объекта в виде сечения расслоения тензоров соответствующего типа. Это свойство локализации нетрудно распространить [23] на послойные тензорные поля векторных расслоений с конечномерными слоями, базой которых служит произвольное банахово многообразие, допускающее разбиение единицы. Однако переход от одной формы задания к другой бывает необходимым и при изучении пространств более общего вида. Поэтому естественно возникает задача о нахождении условий, позволяющих совершать этот переход для более широкого класса пространств.

а) Тензорные поля типа $(0, q)$ и $(1, q)$. Пусть L_q — контравариантный функтор «непрерывные q-линейные формы», определяемый следующими условиями. Если E, E' — произвольные банаховы пространства, то $L_q(E)=L_q(E;\ \mathbf{P})$, где $L_q(E;\ \mathbf{P})$ — банахово пространство непрерывных q-линейных форм на E, и если $h \in L(E;\ E')$ — произвольное линейное непрерывное отображение из E в E', то линейное непрерывное отображение $L_q(h)$ из $L_q(E')$ в $L_q(E)$ задается формулой

$$L_q(h)(\eta)(v_1, \ldots, v_q)=\eta(hv_1, \ldots, hv_q), \quad \eta \in L_q(E'), \quad v_1, \ldots, v_q \in E.$$

C^r-сечение

$$a: X \to L_q(M) \tag{1.4}$$

векторного расслоения $(L_q(M), X, p^*)$ непрерывных q-линейных форм, выведенного из векторного расслоения (M, X, p) класса C^r действием функтора L_q, называется (послойным) ковариантным тензорным полем валентности q в векторном расслоении (M, X, p). Если $\bar{K}^*$ — C^r-атлас векторных карт $\bar{c}^*=(U, \bar{\varkappa}^*, L_q(F))$, соответствующих векторным картам $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ из некоторого C^r-атласа $\widetilde{K}$ на M, то в этом атласе сечение a однозначно определяется своими главными частями $h_a{:}U \to L_q(F)$, связанными на общей части определения двух векторных карт соотношением $h_a'(x) = L_q(\lambda'(x))(h_a(x))$. C^r-сечение a определяет отображение

$$a: \overset{q}{\underset{1}{\times}} \mathfrak{X}M(X) \to \mathrm{F}(X) \tag{1.5}$$

q-й декартовой степени модуля $\mathfrak{X}M(X)$ C^r-сечений векторного расслоения (M, X, p) в кольцо $\mathrm{F}(X)$ морфических функций на X со значениями

$$a(A_s)(x) = a_x(A_{sx}), \quad s = 1, \ldots, q, \tag{1.6}$$

где A_s — произвольные C^r-сечения. Легко видеть, что отображение a, определяемое формулой (1.6), полилинейно над кольцом $\mathrm{F}(X)$ морфических функций на базе X, определено на сечениях, заданных на любом открытом подмножестве базы, и значение его в точке x зависит только от значений сечений A_s в этой точке. Переходя к главным частям в равенстве (1.6), получим эквивалентное соотношение в локальных картах $a(A_s)(x) = a_{cx}(A_{scx})$. Обратно, пусть дано отображение (1.5) такое, что для любой сверхкарты $\widetilde{c}^*$, определяемой картой $c = (U, \varkappa, E)$ на X и векторной картой $\bar{c}^* = (U, \bar{\varkappa}^*, L_q(F))$, задан морфизм $h_a : U \to L_q(F)$ такой, что для любой точки $x \in U$ выполняется равенство $a(A_s)(x) = h_a(x)(A_{scx})$ для любых A_{scx} из F. Тогда однозначно определяется C^r-сечение (1.4), главные части которого совпадают с заданными морфизмами. Проверка того, что морфизмы h_a преобразуются как главные части сечений, не представляет труда. Сформулированное таким образом условие перехода от (1.5) к (1.6) для векторных расслоений общего вида во многих случаях оказывается нужным при действиях с тензорными полями.

Для определения послойных тензорных полей типа $(1, q)$ вводится в рассмотрение функтор L_q^1 от двух аргументов, задаваемый следующими соотношениями. Если E, E' — произвольные банаховы пространства, а $h = (h_1, h_2) \in L(E; E') \times L(E'; E)$ — пара линейных непрерывных отображений, то $L_q^1(E, E) = L_q(E; E)$ и $L_q^1(h_1, h_2)(\eta)(v_1', \ldots, v_q') = h_1 \circ \eta(h_2 v_1', \ldots, h_2 v_q')$, $\eta \in L_q^1(E, E)$, $v_1', \ldots, v_q' \in E'$. C^r-сечение $Q{:}X \to L_q^1(M, M)$ векторного расслоения $(L_q^1(M, M), X, p^*)$ называется (послойным) тензорным полем типа $(1, q)$ в векторном расслоении (M, X, p). В картах атласа $\widetilde{K}^*$ сечение Q определяется заданием C^r-морфизмов $h_Q{:}U \to L_q^1(F, F)$ по формуле $h_Q(x) = L_q^1(\overset{-1}{\bar{c}_x}, \bar{c}_x)(Q_x)$, связанных на общей части определения двух векторных карт из C^r-атласа

$\overline{K}^*$ соотношением $h'_Q(x)=L_q^1(\lambda(x), \lambda'(x))(h_Q(x))$. Задание сечения Q определяет отображение $Q:\overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}M(X)$, $\mathbf{F}(X)$-линейное по каждому аргументу, формулой $Q(A_s)_{cx}=Q_{cx}(A_{scx})$, Обратно, если задано отображение $Q:\overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}M(X)$ такое, что для любой сверхкарты $\tilde{c}$, определяемой картой $c=(U, \varkappa, E)$ и векторной картой $\overline{c}=(U, \overline{\varkappa}, F)$, задан морфизм $h_Q:U\to\to L_q^1(F, F)$ такой, что для любой точки $x\in U$ выполняется равенство $Q(A_s)_{cx}=h_Q(x)(A_{scx})$ для всех $A_{scx}\in F$, то однозначно определяется C^r-сечение $Q:X\to L_q^1(\bar{M}, M)$, главные части которого совпадают с заданными морфизмами.

б) Связующие тензорные поля. Пусть (M_0, X, p_0), (M_1, X, p_1), (M_2, X, p_2) — три векторных расслоения класса C^r с одной базой X и $\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}$ — функтор класса C^r от трех аргументов, определяемый следующими условиями. Если $F_0, F_1, F_2, F_0', F_1', F_2'$ — произвольные банаховы пространства, а $h=(h_0, h_1, h_2)\in\in L(F_0; F_0')\times L(F_1'; F_1)\times L(F_2'; F_2)$ — упорядоченная тройка непрерывных линейных отображений, то полагаем $\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2)= =L(\underbrace{F_1, \ldots, F_1}_{q_1\text{ раз}}, \underbrace{F_2, \ldots, F_2}_{q_2\text{ раз}}; F_0)$, а значение $\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(h_0, h_1, h_2)\in\in L(\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2); \overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0', F_1', F_2'))$ задаем следующей формулой

$$\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(h_0, h_1, h_2)(\eta)(v_1', \ldots, v'_{q_1}, w_1', \ldots, w'_{q_2})=$$
$$=h_0\circ\eta(h_1v_1', \ldots, h_1v'_{q_1}, h_2w_1', \ldots, h_2w'_{q_2}),$$

где $\eta\in\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2)$, $v_1', \ldots, v'_{q_1}\in F_1'$, $w_1', \ldots, w'_{q_2}\in F_2'$. C^r-сечение $W:X\to\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(M_0, M_1, M_2)$ расслоения $(\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(M_0, M_1, M_2), X, p^*)$ называется связующим тензорным полем типа $(1; q_1, q_2)$ исходных векторных расслоений (M_e, X, p_e), $e=0, 1, 2$. Главная часть его в векторной карте $\overline{c}^*=(U, \overline{\varkappa}^*, \overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2))$ есть морфизм $h_W:U\to\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2)$, который при преобразовании векторных карт преобразуется по формуле $h'_W(x)=\overset{1}{L}_{(q_1,q_2)}(\lambda_0(x), \lambda_1'(x), \lambda_2'(x))(h_W(x))$. Сечение W определяет отображение

$$W:\overset{q_1}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_1(X)\overset{q_2}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_2(X)\to\mathfrak{X}M_0(X), \qquad (1.7)$$

где $\mathfrak{X}M_1(X)$, $\mathfrak{X}M_2(X)$, $\mathfrak{X}M_0(X)$ — модули C^r-сечений соответствующих векторных расслоений, с помощью соотношения $W(A_s, B_t)_{cx}=W_{cx}(A_{scx}, B_{tcx})$, $s=1, \ldots, q_1$, $t=1, \ldots, q_2$, $A_s\in\mathfrak{X}M_1(X)$, $B_t\in\mathfrak{X}M_2(X)$. Построенное отображение W полилинейно над кольцом $\mathbf{F}(X)$ морфических функций на X. Обратно, если дано отображение (1.7) такое, что для любой сверхкарты, определяемой картой $c=(U, \varkappa, E)$ на X и векторной картой $\bar{c}^*=(U, \bar{\varkappa}^*, L^1_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2))$, задан морфизм $h_W: U \to L^1_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2)$ такой, что для любой точки $x \in U$ выполняется равенство $W(A_s, B_t)_{cx}=h_W(x)(A_{scx}, B_{tcx})$ для всех $A_{scx} \in F_1$ и $B_{tcx} \in F_2$, то однозначно определяется C^r-сечение $W: X \to L^1_{(q_1,q_2)}(M_0, M_1, M_2)$, главные части которого совпадают с заданными морфизмами.

Аналогично могут быть определены связующие тензорные поля типа $(1; q_1, \ldots, q_m)$.

Как было уже отмечено, сформулированные условия перехода от одного способа задания тензорного поля в общем векторном расслоении к другому автоматически выполняются для некоторого класса векторных расслоений, если это отображение полилинейно над $\mathbf{F}(X)$.

Рассмотрим векторное расслоение (M, X, p) с базой X, являющейся банаховым многообразием класса C^r, допускающим разбиение единицы ($\mathbf{P}=\mathbf{R}$ и $r \neq \omega$), и типовым слоем F размерности n. Пусть сверхкарта $\tilde{c}=(\overset{-1}{p}(U), \tilde{\varkappa}, E \times \mathbf{R}^n)$ на M определяется картой $c=(U, \varkappa, E)$ на X, векторной картой $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ и базисом (e_α) пространства F. Тогда для значения главной части C^r-сечения $A: X \to M$ в сверхкарте $\tilde{c}$ получим разложение $h_A(x)=A^\alpha_x e_\alpha$, где A^α_x — функции класса C^r. Это разложение индуцирует отображение $\theta^\alpha_{cx}: M_x \to \mathbf{R}$ по формуле $\theta^\alpha_{cx}(A_x)=A^\alpha_x$. Очевидно, что произвольное сечение $A: X \to M$ является морфизмом класса C^r тогда и только тогда, когда для любой сверхкарты $\tilde{c}$ функции $A^\alpha_x=\theta^\alpha_{cx}(A_x)$ принадлежат классу C^r. Построим n сечений E_α расслоения M над U, определяемых равенствами $E_{\alpha x}=\bar{c}_x(e_\alpha)=e_\alpha(x)$. Ясно, что эти сечения класса C^r линейно независимы и что каждое сечение над U линейно выражается через них.

Теорема. Пусть (M, X, p) — векторное расслоение с базой X, являющейся банаховым многообразием класса C^r, допускающим разбиение единицы, и типовым слоем F размерности n. (M_0, X, p_0) — произвольное векторное расслоение банахова типа с той же базой. $L: \mathfrak{X}M(X) \to \mathfrak{X}M_0(X)$ — $\mathbf{F}(X)$-линейное отображение, A, $\tilde{A}$ — сечения класса C^r векторного расслоения (M, X, p), x — произвольная точка базы. Тогда, если $A_x=\tilde{A}_x$, то $L(A)(x)=L(\tilde{A})(x)$.

Доказательство. Рассмотрим сверхкарту $\tilde{c}$, соответствующую карте $c=(U, \varkappa, E)$ на X, векторной карте $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ и базису (e_α). Так как многообразие X по условию допускает разбиение единицы, то может быть построена функция $f \in \mathbf{F}(X)$ такая, что $f(x)=1$ и $\operatorname{supp} f \subset U$. Зададим сечения $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{X}M(X)$

формулой $A_{\alpha y}=f(y)e_\alpha(y)$ для $y\in U$ и $A_{\alpha y}=0$ в остальных точках. Нетрудно проверить, что построенные сечения A_α принадлежат классу C^r. Выберем теперь A, $\tilde{A}\in\mathfrak{X}M(X)$ так, чтобы $A_x=\tilde{A}_x$, и построим C^r-сечения fA и $f\tilde{A}$. Их можно представить в виде $fA=\psi^\alpha A_\alpha$ и $f\tilde{A}=\tilde{\psi}^\alpha A_\alpha$. Действительно, пусть $y\in U$, тогда имеем $(fA)_y=f(y)A_y=f(y)A_y^\alpha e_\alpha(y)=A_y^\alpha f(y)\times\times e_\alpha(y)=A_y^\alpha A_{\alpha y}$. Аналогичный результат получаем и для $f\tilde{A}$. Теперь можно построить цепочку импликаций $A_x=\tilde{A}_x\Rightarrow(fA)_x==(f\tilde{A})_x\Rightarrow(\psi^\alpha A_\alpha)_x=(\tilde{\psi}^\alpha A_\alpha)_x\Rightarrow\psi^\alpha(x)e_\alpha(x)=\tilde{\psi}^\alpha(x)e_\alpha(x)\Rightarrow\psi^\alpha(x)==\tilde{\psi}^\alpha(x)$. Вычисляя значение $L(A)(x)$, получим $L(A)(x)==f(x)L(A)(x)=(fL(A))(x)=L(fA)(x)=L(\psi^\alpha A_\alpha)(x)=\psi^\alpha(x)\times\times L(A_\alpha)(x)$. Аналогично, $L(\tilde{A})(x)=\tilde{\psi}^\alpha(x)L(A_\alpha)(x)$. Отсюда следует, что $L(A)(x)=L(\tilde{A})(x)$.

Следствие. Если отображение L: $\overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}M_0(X)$ полилинейно над $\mathbf{F}(X)$; A_s, $\tilde{A}_s\in\mathfrak{X}M(X)$, $s=1,\dots,q$; $x\in X$ — произвольная точка и $A_{sx}=\tilde{A}_{sx}$, то $L(A_s)(x)=L(\tilde{A}_s)(x)$.

Доказательство по индукции.

Рассмотрим теперь связующее тензорное поле W (для определенности типа $(1,q)$) векторных расслоений (M_0, X, p_0) и (M, X, p), заданное как C^r-сечение расслоения $(L_q^1(M_0, M), X, p^*)$. Сечение W индуцирует отображение W: $\overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}M_0(X)$, определяемое в любой сверхкарте формулой $W(A_s)_{cx}==W_{cx}(A_{scx})$, $A_s\in\mathfrak{X}M(X)$. Разлагая A_{scx} по базису (e_α) сверхкарты $\tilde{c}^*$, получим $W(A_s)_{cx}=W_{cx}(A_{1cx}^{\alpha_1}e_{\alpha_1},\dots,A_{qcx}^{\alpha_q}e_{\alpha_q})==W_{cx\alpha_1\dots\alpha_q}A_{1cx}^{\alpha_1}\dots A_{qcx}^{\alpha_q}$, где $W_{cx\alpha_1\dots\alpha_q}=W_{cx}(e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_q})$. Пусть теперь дано произвольное отображение W: $\overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}M_0(X)$, полилинейное над кольцом $\mathbf{F}(X)$. Построим для каждой точки $x\in X$ q-линейное отображение W_x: $M_x^q\to M_{0x}$ из q-й декартовой степени слоя M_x в слой M_{0x} следующим образом. Пусть $v_1,\dots$ $\dots,v_q\in M_x$, $\tilde{c}$ — сверхкарта в окрестности точки x и $f\in\mathbf{F}(X)$ — функция, для которой $f(x)=1$ и $\operatorname{supp} f\subset U$. Зададим сечения $A_1,\dots,A_q\in\mathfrak{X}M(X)$ формулой $A_{sy}=f(y)v_s^\alpha e_\alpha(y)$, $v_s^\alpha e_\alpha(y)=v_s$ для $y\in U$ и $A_{sy}=0$ в остальных точках. Ясно, что построенные сечения принадлежат классу C^r. В точке x имеем $A_{sx}==f(x)v_s^\alpha e_\alpha(x)=v_s$. Теперь полагаем $W_x(v_s)=W(A_s)(x)$. Это определение корректно, ибо в силу предыдущей теоремы получим $W(A_s)(x)=W(\tilde{A}_s)(x)$, если $A_{sx}=\tilde{A}_{sx}$. Легко видеть, что построенное таким образом сечение расслоения $(L_q^1(M_0, M), X, p^*)$ принадлежит классу C^r.

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРНЫХ СТРУКТУР

§ 4. Связность в векторном расслоении банахова типа. Ковариантное дифференцирование тензорных полей

Пусть (M, X, p) — векторное расслоение класса C^r и $\tilde{c}$ — сверхкарта на M, определяемая картой $c=(U, \varkappa, E)$ на базе и векторной картой $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ на M. Рассмотрим морфизм Γ класса C^{r-1} из открытого подмногообразия U в банахово пространство $L(E, F; F)$ непрерывных билинейных отображений из $E\times F$ в F. Обозначим через $\Gamma_c=\Gamma\circ\overset{-1}{\varkappa}$ отображение из $\varkappa(U)$ в $L(E, F; F)$; его значение в точке $\varkappa(x)$, обозначаемое Γ_{cx}, является непрерывным билинейным отображением из $E\times F$ в F.

Определение. Связностью (линейной связностью) в векторном расслоении (M, X, p) называется отображение $\nabla:\mathfrak{X}(X)\times \times\mathfrak{X}M(X)\to\mathfrak{X}_{r-1}M(X)$, записываемое в виде $\nabla(T, A)=\nabla_T A$, $T\in\mathfrak{X}(X)$, $A\in\mathfrak{X}M(X)$, такое, что для любой сверхкарты $\tilde{c}$, определяемой картой $c=(U, \varkappa, E)$ и векторной картой $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$, существует морфизм $\Gamma:U\to L(E, F; F)$ класса C^{r-1} такой, что для любой точки $x\in U$ выполняется равенство

$$(\nabla_T A)_{cx}=DA_{cx}(T_{cx})+\Gamma_{cx}(T_{cx}, A_{cx}). \tag{2.1}$$

Представление связности с помощью отображения из TM в M имеется в [25]. Если векторное расслоение является касательным, то говорят о линейной связности на X.

Нетрудно показать [37], [19], что отображение ∇ $\mathbf{F}(X)$-линейно по первому аргументу, $\mathbf{R}$-линейно по второму аргументу и для любых $f\in\mathbf{F}(X)$, $T\in\mathfrak{X}(X)$, $A\in\mathfrak{X}M(X)$ справедливо равенство $\nabla_T(fA)=(Tf)A+f\nabla_T A$.

Величины Γ_{cx} называются коэффициентами линейной связности или символами Кристоффеля. При переходе от сверхкарты $\tilde{c}$ к сверхкарте $\tilde{c}'$ получаем [37], [19] следующий закон преобразования коэффициентов связности

$$\Gamma_{c'x}(T_{c'x}, A_{c'x})=\lambda(x)(\Gamma_{cx}(D(\varkappa\circ\overset{-1}{\varkappa'})_{\varkappa'(x)}T_{c'x}, \lambda'(x)(A_{c'x})))-D\lambda_{c'x}(T_{c'x})(\lambda'(x)(A_{c'x})). \tag{2.2}$$

Обычным образом может быть доказана следующая теорема об определении линейной связности в векторном расслоении (M, X, p) заданием в некотором C^r-атласе $\tilde{K}$ сверхкарт величин Γ_{cx}, удовлетворяющих условию (2.2).

Теорема. Пусть в каждой сверхкарте $\tilde{c}$ C^r-атласа $\tilde{K}$ на M, определяемой картой $c=(U, \varkappa, E)$ и векторной картой

$\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$, задан C^{r-1}-морфизм $\Gamma: U \to L(E, F; F)$, причем в любых двух сверхкартах $\tilde{c}$, $\tilde{c}' \in \tilde{K}$ соответствующие морфизмы Γ и Γ' связаны на общей части их определения формулой (2.2). Тогда существует и притом единственная линейная связность ∇ в векторном расслоении (M, X, p), коэффициенты связности Γ_{cx} которой в сверхкартах атласа $\tilde{K}$ совпадают со значениями представлений заданных морфизмов.

Легко видеть, что значение отображения ∇ в каждой сверхкарте $\tilde{c} \in \tilde{K}$ в точке x определяется формулой $(\nabla_T A)_x = \bar{c}_x (DA_{cx}(T_{cx}) + \Gamma_{cx}(T_{cx}, A_{cx}))$.

Если слои векторного расслоения (M, X, p) конечномерны и изоморфны векторному пространству F размерности n, то, фиксируя базис (e_α) в F, значение главной части сечения A в векторной карте $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ можно представить в виде $A_{cx} = A^\alpha_{cx} e_\alpha$. Тогда получим $\Gamma_{cx}(T_{cx}, A_{cx}) = A^\alpha_{cx} \Gamma^\beta_{cx\alpha}(T_{cx}) e_\beta$, где $\Gamma^\beta_{cx\alpha}$ — линейные непрерывные отображения из E в $\mathbf{P}$. Разлагая значение главной части $(\nabla_T A)_{cx}$, а также значение производной $DA_{cx}(T_{cx})$ по базису (e_α), условие (2.1) можно представить в виде

$$(\nabla_T A)^\alpha_{cx} = DA^\alpha_{cx}(T_{cx}) + \Gamma^\alpha_{cx\beta}(T_{cx}) A^\beta_{cx}. \tag{2.3}$$

Если, кроме того, базой векторного расслоения (M, X, p) является m-мерное многообразие класса C^r, то выбирая карту $c=(U, \varkappa, \mathbf{P}^m)$ в окрестности точки x с локальными координатами x^i, $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$, представим ограничение векторного поля T на U в виде $T|_U = T_c^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, где $\frac{\partial}{\partial x^i}$ — естественный базис модуля векторных полей на U. Значение T_{cx} главной части векторного поля T в карте c можно записать в виде $T_{cx} = T^i_{cx} \varepsilon_i$, где (ε_i) — естественный базис пространства $\mathbf{P}^m$. Поэтому получим $(\nabla_T A)^\alpha_{cx} = T^i_{cx} \nabla_i A^\alpha_{cx}$, $DA^\alpha_{cx}(T_{cx}) = T^i_{cx} \partial_i A^\alpha_{cx}$, $\Gamma^\alpha_{cx\beta}(T_{cx}) = T^i_{cx} \Gamma^\alpha_{cxi\beta}$, где $\nabla_i A^\alpha_{cx} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A\right)^\alpha_{cx}$, $\Gamma^\alpha_{cxi\beta} = \Gamma^\alpha_{cx\beta}(\varepsilon_i)$.

Учитывая результаты этих вычислений, равенство (2.3) может быть записано теперь в виде

$$\nabla_i A^\alpha_{cx} T^i_{cx} = \partial_i A^\alpha_{cx} T^i_{cx} + \Gamma^\alpha_{cxi\beta} T^i_{cx} A^\beta_{cx}.$$

Пусть в векторном расслоении (M, X, p) заданы две связности, определяемые морфизмами Γ и $\tilde{\Gamma}$, тогда их разность $h_Q = \Gamma - \tilde{\Gamma}: U \to L(E, F; F)$ есть также морфизм. Вычисляя значение $h'_Q(x) = \Gamma_{c'x} - \tilde{\Gamma}_{c'x}$ при переходе от сверхкарты $\tilde{c}$ к сверхкарте $\tilde{c}'$, в силу (2.2) получим $h'_Q(x) = L^1_{(1,1)}(\lambda(x), D(\varkappa \circ \overset{-1}{\varkappa'})_{\varkappa'(x)}, \lambda'(x))(h_Q(x))$, т. е. морфизм h_Q при преобразовании сверхкарт преобразуется как главная часть сечения векторного расслоения

$(L^1_{(1,1)}(M, T(X), M), X, p^*)$ и, следовательно, определяет связующее тензорное поле Q типа (1; 1,1) векторных расслоений (M, X, p), $(T(X), X, \pi)$, (M, X, p). Это тензорное поле называют полем тензора аффинной деформации линейной связности.

Поле тензора кривизны R связности ∇ векторного расслоения (M, X, p) класса C^r является связующим тензорным полем класса C^{r-2} типа (1; 2,1) векторных расслоений (M, X, p), $(T(X), X, \pi)$, (M, X, p) и определяется с помощью отображения $R: \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}M(X) \to \mathfrak{X}_{r-2}M(X)$, записываемого в виде $R(T_1, T_2)A$, $T_1, T_2 \in \mathfrak{X}(X)$, $A \in \mathfrak{X}M(X)$, формулой

$$R(T_1, T_2)A = \nabla_{T_1}\nabla_{T_2}A - \nabla_{T_2}\nabla_{T_1}A - \nabla_{[T_1, T_2]}A. \qquad (2.4)$$

Из свойств отображения ∇ и скобки Ли векторных полей непосредственно следует, что отображение (2.4) $\mathbf{F}(X)$-линейно по каждому аргументу. Покажем, что оно определяет C^{r-2}-сечение $R: X \to L^1_{(2,1)}(M, T(X), M)$, т. е. для любой сверхкарты $\tilde{c} = (\overset{-1}{p}(U), \tilde{\varkappa}, E \times F)$ формула (2.4) индуцирует морфизм $h_R: U \to L^1_{(2,1)}(F, E, F)$ такой, что для любой точки $x \in U$ выполняется равенство $(R(T_1, T_2)A)_{cx} = h_R(x)(T_{1cx}, T_{2cx}, A_{cx})$. В самом деле, вычисление главной части сечения $R(T_1, T_2)A$ дает

$$(R(T_1, T_2)A)_{cx} = \Gamma_{cx}(T_{1cx}, \Gamma_{cx}(T_{2cx}, A_{cx})) -$$
$$-\Gamma_{cx}(T_{2cx}, \Gamma_{cx}(T_{1cx}, A_{cx})) + D\Gamma_{cx}(T_{1cx})(T_{2cx}, A_{cx}) -$$
$$-D\Gamma_{cx}(T_{2cx})(T_{2cx}, A_{cx}). \qquad (2.5)$$

Обозначая теперь правую часть равенства (2.5) через R_{cx}, определим отображение $h_R: U \to L^1_{(2,1)}(F, E, F) = L(E, E, F; F)$ формулой $h_R(x) = R_{cx}$.

Связность ∇ в векторном расслоении (M, X, p) называют связностью нулевой кривизны, если поле тензора кривизны ее равно нулю. Обращение в нуль тензора кривизны связности ∇ является необходимым и достаточным условием существования в векторном расслоении (M, X, p) C^r-атласа сверхкарт, в которых коэффициенты Γ_{cx} этой связности обращаются в нуль. Действительно, приравнивая нулю правую часть равенства (2.2), мы получим дифференциальное уравнение относительно λ_c. По теореме Фробениуса [24] в силу (2.5) полученное уравнение будет вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда поле тензора кривизны R равно нулю.

Если ∇ есть линейная связность на многообразии X класса C^r, то условие (2.1) в карте $c = (U, \varkappa, E)$ в этом случае имеет вид

$$(\nabla_{T_1}T_2)_{cx} = DT_{2cx}(T_{1cx}) + \Gamma_{cx}(T_{1cx}, T_{2cx}),$$

где T_1, T_2 — произвольные векторные поля на X, а Γ_{cx} — значение в точке $\varkappa(x)$ морфизма Γ_c из $\varkappa(U)$ в $L(E, E; E)$ с законом преобразования

$$\Gamma_{c'x}(T_{1c'x}, T_{2c'x}) = D\,(\overset{-1}{\varkappa'\circ\varkappa})_{\varkappa(x)}\,(\Gamma_{cx}(D\,(\overset{-1}{\varkappa\circ\varkappa'})_{\varkappa'(x)}T_{1c'x},$$

$$D\,(\overset{-1}{\varkappa\circ\varkappa'})_{\varkappa'(x)}T_{2c'x})) - D^2\,(\overset{-1}{\varkappa'\circ\varkappa})_{\varkappa(x)}\,(D\,(\overset{-1}{\varkappa\circ\varkappa'})_{\varkappa'(x)}T_{1c'x})\times$$

$$\times(D\,(\overset{-1}{\varkappa\circ\varkappa'})_{\varkappa'(x)}\,T_{2c'x}).$$

Тензор кручения линейной связности ∇ есть C^{r-2}-сечение $S: X \to L_2^1(T(X), T(X))$, которое задается с помощью отображения $S: \mathfrak{X}(X)\times\mathfrak{X}(X)\to\mathfrak{X}_{r-2}(X)$ со значениями $S(T_1, T_2) = \nabla_{T_1}T_2 - \nabla_{T_2}T_1 - [T_1, T_2]$. Вычисляя главную часть сечения $S(T_1, T_2)$, получим $S(T_1, T_2)_{cx} = \Gamma_{cx}(T_{1cx}, T_{2cx}) - \Gamma_{cx}(T_{2cx}, T_{1cx})$. Если $S=0$, то связность ∇ называют симметричной.

Для построения аппарата ковариантного дифференцирования послойных и связующих тензорных полей векторных расслоений удобным является представление тензорного поля как отображения, действующего на модуле сечений векторного расслоения и полилинейного над кольцом морфических функций на базе.

Рассмотрим три векторных расслоения (M_0, X, p_0), (M_1, X, p_1), (M_2, X, p_2) класса C^r со связностями $\overset{0}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ соответственно и связующее тензорное поле W типа $(l;\, q_1, q_2)$, где $l=0, 1$, причем при $l=1$ оно является связующим тензорным полем указанных трех векторных расслоений, а при $l=0$ — последних двух. Определим ковариантную производную $\overset{0;12}{\nabla}_T W$ поля W по векторному полю T относительно связностей $\overset{0}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ как отображение из $\overset{q_1}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_1(X)\times\overset{q_2}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_2(X)$ в $\mathfrak{X}^l_{r-1}M_0(X)$, где $\mathfrak{X}^0_{r-1}M_0(X) = \mathbf{F}_{r-1}(X)$ и $\mathfrak{X}^1_{r-1}M_0(X) = \mathfrak{X}_{r-1}M_0(X)$, следующей формулой

$$\left(\overset{0;12}{\nabla}_T W\right)(A_s, B_t) = \overset{0}{\nabla}_T W(A_s, B_t) -$$

$$-\sum_{\rho=1}^{q_1} W\left(A_1, \ldots, A_{\rho-1}, \overset{1}{\nabla}_T A_\rho, A_{\rho+1}, \ldots, A_{q_1}, B_t\right) -$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{q_2} W\left(A_s, B_1, \ldots, B_{\sigma-1}, \overset{2}{\nabla}_T B_\sigma, B_{\sigma+1}, \ldots, B_{q_2}\right), \qquad (2.6)$$

причем считаем, что $\overset{0}{\nabla}_T f = Tf$ для $f\in\mathbf{F}(X)$.

Пусть T — переменное векторное поле, тогда возникает отображение $\overset{0;12}{\nabla} W: \mathfrak{X}(X)\times\overset{q_1}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_1(X)\times\overset{q_2}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M_2(X)\to\mathfrak{X}^l_{r-1}M_0(X)$, определяемое равенством $\left(\overset{0;12}{\nabla} W\right)(T, A_s, B_t) = \left(\overset{0;12}{\nabla}_T W\right)(A_s, B_t)$.

Теорема. Ковариантная производная $\overset{0;12}{\nabla_T W}$ тензорного поля W класса C^r типа $(l;\ q_1, q_2)$ при фиксированном векторном поле T является связующим тензорным полем того же типа класса C^{r-1}, при переменном же векторном поле T ковариантная производная $\overset{0;12}{\nabla} W$ является связующим тензорным полем класса C^{r-1} типа $(l;\ 1,\ q_1,\ q_2)$ векторных расслоений (M_0, X, p_0), $(T(X), X, \pi)$, (M_1, X, p_1), (M_2, X, p_2), если $l=1$, и последних трех расслоений, если $l=0$.

Доказательство. Пусть $l=1$ и $\tilde{c}^*$—сверхкарта, определяемая картой $c=(U, \varkappa, E)$ и векторными картами $\bar{c}_0=(U, \bar{\varkappa}_0, F_0)$, $\bar{c}_1=(U, \bar{\varkappa}_1, F_1)$, $\bar{c}_2=(U, \bar{\varkappa}_2, F_2)$ на M_0, M_1, M_2 соответственно. Тогда тензорному полю W соответствует морфизм $h_W: U \to L^1_{(q_1,q_2)}(F_0, F_1, F_2)$ такой, что $W(A_s, B_t)_{cx} = h_W(x)(A_{scx}, B_{tcx})$ для всех $x \in U$. Построим соответствующий C^{r-1}-морфизм для отображения $\overset{0;12}{\nabla_T W}$. Вычисляя значение $(\overset{0;12}{\nabla_T W})(A_s, B_t)_{cx}$, получим следующую формулу

$$
\begin{gathered}
(\overset{0;12}{\nabla_T W})(A_s, B_t)_{cx} = \\
= DW_{cx}(T_{cx})(A_{scx}, B_{tcx}) + \overset{0}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, W_{cx}(A_{scx}, B_{tcx})) - \\
- \sum_{\rho=1}^{q_1} W_{cx}(A_{1cx}, \ldots, A_{\rho-1cx}, \overset{1}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, A_{\rho cx}), \\
A_{\rho+1cx}, \ldots, A_{q_1cx}, B_{tcx}) - \sum_{\sigma=1}^{q_2} W_{cx}(A_{scx}, B_{1cx}, \ldots, B_{\sigma-1cx}, \\
\overset{2}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, B_{\sigma cx}), B_{\sigma+1cx}, \ldots, B_{q_2cx}).
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

Обозначим через $(\overset{0;12}{\nabla_T W})_{cx}$ (q_1+q_2)-линейное непрерывное отображение из $F_1^{q_1} \times F_2^{q_2}$ в F_0, определяемое соотношением (2.7) при фиксированных $x \in U$ и $T_{cx} \in E$, и зададим отображение класса C^{r-1} из $\varkappa(U)$ в банахово пространство $L(\underbrace{F_1, \ldots, F_1}_{q_1 \text{ раз}}, \underbrace{F_2, \ldots, F_2}_{q_2 \text{ раз}}; F_0)$, положив $(\overset{0;12}{\nabla_T W})_c(\varkappa(x)) = (\overset{0;12}{\nabla_T W})_{cx}$. Тогда отображение $h_{\overset{0;12}{\nabla_T W}}: U \to L(F_1, \ldots, F_2; F_0)$ со значениями $h_{\overset{0;12}{\nabla_T W}}(x) = (\overset{0;12}{\nabla_T W})_{cx}$ будет морфизмом класса C^{r-1}, для которого справедливо соотношение $h_{\overset{0;12}{\nabla_T W}}(x)(A_{scx}, B_{tcx}) = (\overset{0;12}{\nabla_T W})(A_s, B_t)_{cx}$.

Следовательно, однозначно определяется C^{r-1}-сечение $\overset{0;12}{\nabla_T W}: X \to$

$\to L^1_{(q_1,q_2)}(M_0, M_1, M_2)$, главные части которого совпадают с морфизмами $h_{\overset{0;12}{\nabla_T W}}$. Если T — переменное векторное поле, то получим отображение $\overset{0;12}{\nabla} W: \mathfrak{X}(X) \times \overset{q_1}{\underset{1}{\times}} \mathfrak{X} M_1(X) \times \overset{q_2}{\underset{1}{\times}} \mathfrak{X} M_2(X) \to \mathfrak{X}_{r-1} M_0(X)$, определяемое соотношением $(\overset{0;12}{\nabla} W)(T, A_s, B_t) = (\overset{0;12}{\nabla_T} W)(A_s, B_t)$.

Выражая значение главной части сечения $(\overset{0;12}{\nabla_T} W)(A_s, B_t)$ в некоторой сверхкарте через значения главных частей T, A_s, B_t, W, получаем

$$\overset{0;12}{\nabla} W(T, A_s, B_t)_{cx} = (\overset{0;12}{\nabla_T} W)(A_s, B_t)_{cx} = DW_{cx}(T_{cx})(A_{scx}, B_{tcx}) +$$

$$+ \overset{0}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, W_{cx}(A_{scx}, B_{tcx})) -$$

$$- \sum_{\rho=1}^{q_1} W_{cx}(A_{1cx}, \ldots, A_{\rho-1cx}, \overset{1}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, A_{\rho cx}), \ldots, A_{q_1cx}, B_{tcx}) -$$

$$- \sum_{\sigma=1}^{q_2} W_{cx}(A_{scx}, B_{1cx}, \ldots, B_{\sigma-1cx}, \overset{2}{\Gamma}_{cx}(T_{cx}, B_{\sigma cx}), \ldots, B_{q_2cx}). \quad (2.8)$$

При фиксированном x правая часть (2.8) определяет непрерывное полилинейное отображение из $E \times F_1^{q_1} \times F_2^{q_2}$ в F_0. Обозначим его $(\overset{0;12}{\nabla} W)_{cx}$, тогда соотношение $(\overset{0;12}{\nabla} W)_c(\varkappa(x)) = (\overset{0;12}{\nabla} W)_{cx}$ при переменном x задает отображение $(\overset{0;12}{\nabla} W)_c$ класса C^{r-1} из $\varkappa(U)$ в банахово пространство $L(E, F_1, \ldots, F_2; F_0)$, которое, в свою очередь, определяет C^{r-1}-морфизм $h_{\overset{0;12}{\nabla} W}: U \to$ $\to L(E, F_1, \ldots, F_2; F_0)$ со значениями $h_{\overset{0;12}{\nabla} W}(x) = (\overset{0;12}{\nabla} W)_{cx}$, удовлетворяющий условию

$$h_{\overset{0;12}{\nabla} W}(x)\ (T_{cx}, A_{scx}, B_{tcx}) = \overset{0;12}{\nabla} W(T, A_s, B_t)_{cx}.$$

Доказательство теоремы для случая тензорного поля типа $(0; q_1, q_2)$ проводится аналогично.

Рассмотрим ковариантную производную тензора кривизны R линейной связности $\overset{1}{\nabla}$ векторного расслоения (M, X, p). Обозначая через $\overset{2}{\nabla}$ линейную связность на базе X, согласно (2.4) и (2.6) получим

$$(\overset{1;12}{\nabla_T} R)(T_1, T_2, A) = \overset{1}{\nabla_T} R(T_1, T_2) A - R(\overset{2}{\nabla_T} T_1, T_2) A -$$

$$- R(T_1, \overset{2}{\nabla_T} T_2) A - R(T_1, T_2) \overset{1}{\nabla_T} A.$$

Так как каждый раз будет ясно, относительно какой связности берется ковариантная производная, то индексы над ∇ можно опускать. Тогда в силу свойств главных частей сечений получим

$$(\nabla_{T_1}R)(T_2, T_3, A)_{cx} = (\nabla_{T_1}R(T_2, T_3)A)_{cx} - (R(\nabla_{T_1}T_2, T_3)A)_{cx} - \\ - (R(T_2, \nabla_{T_1}T_3)A)_{cx} - (R(T_2, T_3)\nabla_{T_1}A)_{cx}. \qquad (2.9)$$

Выражая каждое слагаемое правой части равенства (2.9) через значения главных частей векторных полей T_1, T_2, T_3, сечения A и коэффициенты введенных связностей в векторном расслоении и на базе, после двойного циклирования аргументов T_1, T_2, T_3 в соотношении (2.9), получим для любой симметричной линейной связности на базе и произвольной линейной связности в векторном расслоении следующее тождество Бьянки

$$(\nabla_{T_1}R)(T_2, T_3, A) + (\nabla_{T_2}R)(T_3, T_1, A) + (\nabla_{T_3}R)(T_1, T_2, A) = 0.$$

Для вывода тождества Риччи введем вторые ковариантные производные тензорного поля W. Рассматривая производную $\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W$ при фиксированном T_1, определим повторную ковариантную производную $\overset{0;12}{\nabla}_{T_2}\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W$ по векторному полю T_2 формулой

$$(\overset{0;12}{\nabla}_{T_2}\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W)(A_s, B_t) = \overset{0}{\nabla}_{T_2}(\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W)(A_s, B_t) - \\ - \sum_{\rho=1}^{q_1}(\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W)(A_1, \ldots, A_{\rho-1}, \overset{1}{\nabla}_{T_2}A_\rho, A_{\rho+1}, \ldots, A_{q_1}, B_t) - \\ - \sum_{\sigma=1}^{q_2}(\overset{0;12}{\nabla}_{T_1}W)(A_s, B_1, \ldots, B_{\sigma-1}, \overset{2}{\nabla}_{T_2}B_\sigma, B_{\sigma+1}, \ldots, B_{q_2}).$$

Вычисляя вторую ковариантную производную тензорного поля W типа $(1; q_1, q_2)$ и альтернируя результат по индексам 1, 2, получим следующее тождество Риччи

$$2(\overset{0;12}{\nabla}_{T_{[1}}\overset{0;12}{\nabla}_{T_{2]}}W)(A_s, B_t) = \overset{0}{R}(T_1, T_2)W(A_s, B_t) - \\ - \sum_{\rho=1}^{q_1}W(A_1, \ldots, A_{\rho-1}, \overset{1}{R}(T_1, T_2)A_\rho, A_{\rho+1}, \ldots, A_{q_1}, B_t) - \\ - \sum_{\sigma=1}^{q_2}W(A_s, B_1, \ldots, B_{\sigma-1}, \overset{2}{R}(T_1, T_2)B_\sigma, B_{\sigma+1}, \ldots, B_{q_2}) + \\ + (\overset{0;12}{\nabla}_{[T_1, T_2]}W)(A_s, B_t). \qquad (2.10)$$

Ковариантная производная $\overset{0;12}{\nabla}_{T_2}W$ тензорного поля W типа $(1; q_1, q_2)$ при переменном T_2 является связующим тензорным полем типа $(1; 1, q_1, q_2)$ векторных расслоений (M_0, X, p_0),

$(T(X), X, \pi)$, (M_1, X, p_1), (M_2, X, p_2). Вычисляя повторную ковариантную производную $\overset{0;31\,2}{\nabla}_{T_1}\overset{0;12}{\nabla}_{T_2}W$ по векторному полю T^1 относительно связностей: $\overset{0}{\nabla}$ в векторном расслоении (M_0, X, p_0), $\overset{3}{\nabla}$ на базе X, $\overset{1}{\nabla}$ в (M_1, X, p_1), $\overset{2}{\nabla}$ в (M_2, X, p_2) и альтернируя результат по индексам 1, 2, получим тождество Риччи во втором варианте

$$
\begin{aligned}
2(\overset{0;312}{\nabla}_{T_{[1}}\overset{0;12}{\nabla}_{T_{2]}}W)(A_s, B_t) &= \overset{0}{R}(T_1, T_2)W(A_s, B_t) - \\
&- \sum_{\rho=1}^{q_1} W(A_1, \ldots, A_{\rho-1}, \overset{1}{R}(T_1, T_2)A_\rho, A_{\rho+1}, \ldots, A_{q_1}, B_t) - \\
&- \sum_{\sigma=1}^{q_2} W(A_s, B_1, \ldots, B_{\sigma-1}, \overset{2}{R}(T_1, T_2)B_\sigma, B_{\sigma+1}, \ldots, B_{q_2}) - \\
&- (\overset{0;12}{\nabla}_{\overset{3}{S}(T_1, T_2)}W)(A_s, B_t),
\end{aligned}
\qquad (2.11)
$$

где $\overset{3}{S}(T_1, T_2)$ — значение тензора кручения связности $\overset{3}{\nabla}$ на векторных полях T_1 и T_2.

В случае тензорного поля W типа $(0; q_1, q_2)$ получаем формулы, аналогичные (2.10) и (2.11), отличающиеся от них только отсутствием слагаемого $\overset{0}{R}(T_1, T_2)W(A_s, B_t)$.

§ 5. Связности в векторных расслоениях, определяемые послойными тензорными полями

Если в векторном расслоении фиксировано послойное ковариантное тензорное поле, то при достаточно широких предположениях относительно этого поля может быть построена, по крайней мере локально, внутренняя линейная связность. Вначале были разработаны методы построения внутренних линейных связностей, определяемых структурными тензорными полями на дифференцируемых многообразиях, при естественном предположении о невырожденности этих полей: дискриминант поля всюду отличен от нуля. Изложение основных методов построения таких связностей и применения их в теории дифференциальных инвариантов тензорных структур, а также при решении других задач дифференциальной геометрии было дано в работах [36], [5], [28], [40], [41], [43], [11]—[14]. Другие подходы в исследовании таких структур рассматривались в [1], [31], [38], [39]. В работах [15]—[17] были использованы способы конструирования внутренних связностей на многообразиях, возникшие в теории изотропных многообразий, в предположении о нетривиальности другого инварианта структурного тензорного поля, отличного от его дискриминанта. Используемый в этих работах метод допускает обобщение, частично изложенное в [18], [21], на векторные расслоения с послойной тензорной структурой.

Пусть $\mathbf{P}=\mathbf{R}$ и $r\neq\omega$. Рассмотрим векторное расслоение (M, X, p) с базой X, являющейся банаховым многообразием класса C^r, допускающим разбиение единицы, и с конечномерным типовым слоем F размерности $n\geqslant 2$. Для главной части послойного ковариантного тензорного поля $a\colon \overset{q}{\underset{1}{\times}}\mathfrak{X}M(X)\to\mathbf{F}(X)$ валентности q имеем в сверхкарте $\tilde{c}=(\overset{-1}{p}(U), \tilde{\varkappa}, E\times\mathbf{R}^n)$, определяемой картой $c=(U,\varkappa,E)$ на X, векторной картой $\bar{c}=(U,\bar{\varkappa},F)$ и базисом (e_α) пространства F, соотношение $a(A_1,\ldots,A_q)(x)=$ $=a_{cx}(A_{1cx},\ldots,A_{qcx})$. Разлагая A_{scx}, $s=1,\ldots,q$, по базису (e_α), получим $a(A_1,\ldots,A_q)(x)=a_{cx}(A^{\alpha_1}_{1cx}e_{\alpha_1},\ldots,A^{\alpha_q}_{qcx}e_{\alpha_q})=$ $=A^{\alpha_1}_{1cx}\ldots A^{\alpha_q}_{qcx}a_{cx}(e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_q})=a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}A^{\alpha_1}_{1cx}\ldots A^{\alpha_q}_{qcx}$. Величины $a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}=a_{cx}(e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_q})$ называются компонентами тензорного поля a в сверхкарте $\tilde{c}$. При переходе к другой сверхкарте $\tilde{c}'$, определяемой картой $c'=(U',\varkappa',E')$, векторной картой $\bar{c}'=(U',\bar{\varkappa}',F)$ и базисом $(e_{\alpha'})$, компоненты поля a преобразуются по тензорному закону

$$a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}=\lambda^{\alpha_1'}_{\alpha_1}(x)\ldots\lambda^{\alpha_q'}_{\alpha_q}(x)\,a_{c'x\alpha_1'\ldots\alpha_q'},\qquad(2.12)$$

где $\lambda^{\alpha'}_{\alpha}(x)$ — функции, определяемые равенством

$$\lambda(x)\,e_\alpha=\lambda^{\alpha'}_{\alpha}(x)\,e_{\alpha'},\quad x\in U\cap U'.\qquad(2.13)$$

Понятно, что заданием в каждой сверхкарте величин $a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}$ с указанным законом преобразования тензорное поле a однозначно определяется.

Если в векторном расслоении (M, X, p) задана линейная связность, то для ковариантной производной $\nabla_T a$ относительно векторного поля T в соответствии с (2.7) получим

$$(\nabla_T a)(A_1,\ldots,A_q)(x)=Da_{cx}(T_{cx})(A_{1cx},\ldots,A_{qcx})-$$
$$-\sum_{\rho=1}^{q}a_{cx}(A_{1cx},\ldots,A_{\rho-1cx},\Gamma_{cx}(T_{cx},A_{\rho cx}),$$
$$A_{\rho+1cx},\ldots,A_{qcx}).\qquad(2.14)$$

Учитывая, что слои M_x рассматриваемого векторного расслоения конечномерны и изоморфны векторному пространству F, в силу очевидных равенств

$$Da_{cx}(T_{cx})(A_{1cx},\ldots,A_{qcx})=Da_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}(T_{cx})A^{\alpha_1}_{1cx}\ldots A^{\alpha_q}_{qcx}$$

и

$$(\nabla_T a)(A_1 \dots A_q)(x) = \nabla a(T, A_1, \dots, A_q)(x) =$$
$$= \nabla a_{cx\alpha_1 \dots \alpha_q}(T_{cx}) A^{\alpha_1}_{1cx} \dots A^{\alpha_q}_{qcx},$$

где

$$Da_{cx\alpha_1 \dots \alpha_q}(T_{cx}) = Da_{cx}(T_{cx})(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_q})$$

и

$$\nabla a_{cx\alpha_1 \dots \alpha_q}(T_{cx}) = \nabla a_{cx}(T_{cx}, e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_q}),$$

из (2.14) получаем

$$\nabla a_{cx\alpha_1 \dots \alpha_q} = Da_{cx\alpha_1 \dots \alpha_q} - \sum_{\rho=1}^{q} a_{cx\alpha_1 \dots \alpha_{\rho-1}\beta\alpha_{\rho+1} \dots \alpha_q} \Gamma^{\beta}_{cx\alpha_\rho}. \quad (2.15)$$

Из (2.2) и (2.13) следует, что при преобразовании сверхкарт коэффициенты связности $\Gamma^{\beta}_{cx\alpha}$ преобразуются по формуле

$$\Gamma^{\beta'}_{c'x\alpha'} = \lambda^{\alpha}_{\alpha'}(x) \lambda^{\beta'}_{\beta}(x) \Gamma^{\beta}_{cx\alpha} - \lambda^{\alpha}_{\alpha'}(x) D\lambda^{\beta'}_{\alpha}(x),$$
$$\lambda^{\alpha}_{\alpha'}(x) \lambda^{\alpha'}_{\beta}(x) = \delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.16)$$

Предположим, что a — симметрическое ковариантное тензорное поле четной валентности $q = 2v > 2$. Обозначим его компоненты в некоторой сверхкарте через $a_{cx\alpha_1 \dots \alpha_v \beta_1 \dots \beta_v}$ и выберем из них существенные компоненты относительно каждой системы индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ и $\beta_1, \dots, \beta_v$. Выбранные компоненты будем обозначать $a_{cx\{\alpha_1 \dots \alpha_v\}\{\beta_1 \dots \beta_v\}}$. Упорядочивая их каким-нибудь способом, построим определитель $J_{cx} = \mathrm{Det}(a_{cx\{\alpha_1 \dots \alpha_v\}\{\beta_1 \dots \beta_v\}})$ порядка $g = \binom{n+v-1}{v}$. Нетрудно показать [15], [17], что при преобразовании сверхкарт определитель J_{cx} преобразуется как относительный инвариант веса $w = 2\binom{n+v-1}{v-1}$. Будем предполагать, что тензорное поле a имеет такое строение, что построенный инвариант J его отличен от нуля. Условимся называть J основным инвариантом. При условии $J \neq 0$ может быть построена система алгебраических комитантов тензорного поля a, которая дает возможность составить систему уравнений, определяющую коэфициенты линейной связности, и получить их явное выражение через основной тензор a и его первые производные. Когда основное тензорное поле a имеет нечетную валентность, можно воспользоваться описанным ниже способом построения линейной связности, симметрированным произведением поля a на себя [15]. При этом тензорные поля типа (p, q) в векторном расслоении с конечномерными слоями естественно рассматривать как C^r-сечения векторного расслоения полилинейных форм типа (p, q).

Если $J\neq 0$, то однозначно определяется контравариантное тензорное поле b валентности q, компоненты которого в любой сверхкарте удовлетворяют условию

$$a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_v\beta_1\ldots\beta_v} b_{cx}^{\alpha_1\ldots\alpha_v\gamma_1\ldots\gamma_v} = \delta^{\gamma_1}_{(\beta_1}\ldots\delta^{\gamma_v}_{\beta_v)}. \tag{2.17}$$

С помощью тензорного поля b строятся следующие комитанты: тензорные поля D и N типа (2,2), определяемые равенствами

$$D^{\alpha\beta}_{cx\gamma\lambda} = a_{cx\gamma\gamma_2\ldots\gamma_v\lambda\lambda_2\ldots\lambda_v} b_{cx}^{\alpha\gamma_2\ldots\gamma_v\beta\lambda_2\ldots\lambda_v}$$

и

$$N^{\alpha\beta}_{cx\gamma\lambda} = \frac{(n+v)!}{v!(n+1)!}\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda} + vD^{\alpha\beta}_{cx\gamma\lambda}.$$

Определитель $\mathfrak{N}_{cx} = \operatorname{Det}(N^{\alpha\beta}_{cx\gamma\lambda})$, строчки которого нумеруются с помощью собирательного индекса (α, λ), а столбцы — с помощью (γ, β), является абсолютным инвариантом. При условии $\mathfrak{N}\neq 0$ однозначно определяется тензорное поле L типа (2,2), удовлетворяющее соотношениям

$$N^{\alpha_1\beta}_{cx\gamma\lambda_1} L^{\alpha\lambda_1}_{cx\alpha_1\lambda} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda}, \qquad N^{\alpha\beta_1}_{cx\gamma_1\lambda} L^{\gamma_1\beta}_{cx\gamma\beta_1} = \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma}, \tag{2.18}$$

а также другой важный комитант — тензорное поле P типа $(q+1,\ 1)$ — равенством

$$P^{\alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}_{cx\beta} = L^{\alpha\gamma}_{cx\lambda\beta}\left(\delta^{\omega_1}_{\gamma} b_{cx}^{\lambda\omega_2\ldots\omega_q} - \frac{v-1}{2v(n+1)}\delta^{\lambda}_{\gamma} b_{cx}^{\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}\right).$$

Из (2.17) и (2.18) следует

$$qP^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{cx\beta}\delta^{\gamma}_{(\omega_1} a_{|cx|\omega_2\ldots\omega_q)\lambda} = \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\beta}. \tag{2.19}$$

Линейная связность в векторном расслоении (M, X, p) с заданным тензорным полем a, основной инвариант J которого отличен от нуля, может быть введена требованием

$$P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{cx\beta}\nabla a_{cx\omega_1\ldots\omega_q} = 0. \tag{2.20}$$

В силу симметричности тензорного поля a ковариантную производную (2.15), участвующую в (2.20), можно представить в виде

$$\nabla a_{cx\omega_1\ldots\omega_q} = Da_{cx\omega_1\ldots\omega_q} - q\Gamma^{\omega}_{cx(\omega_1} a_{|cx|\omega_2\ldots\omega_q)\omega}. \tag{2.21}$$

Поэтому свертывая (2.21) с $P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{cx\beta}$ по индексам $\omega_1, \ldots, \omega_q$ и пользуясь соотношением (2.19), получим явное выражение для коэффициентов определяемой линейной связности

$$\Gamma^{\alpha}_{cx\beta} = P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{cx\beta} Da_{cx\omega_1\ldots\omega_q}. \tag{2.22}$$

Тождество Риччи (2.10) для послойного тензорного поля a в векторном расслоении (M, X, p) имеет вид

$$2(\nabla_{T[_1}\nabla_{T_2]}a)(A_1, \ldots, A_q) = -\sum_{\rho=1}^{q} a(A_1, \ldots, A_{\rho-1},$$

$$R(T_1, T_2)A_\rho, A_{\rho+1}, \ldots, A_q) + (\nabla_{[T_1, T_2]}a)(A_1, \ldots, A_q). \quad (2.23)$$

Для векторного расслоения с конечномерными слоями из (2.23) получаем

$$2\nabla_{T[_1}\nabla_{T_2]}a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q} = -qR^{\omega}_{cx(\alpha_1}(T_{1cx}, T_{2cx})a_{|cx|\alpha_2\ldots\alpha_q)\omega} +$$
$$+ \nabla a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}([T_1, T_2]_{cx}),$$

где

$$R^{\beta}_{cx\alpha}(T_{1cx}, T_{2cx}) = \Gamma^{\beta}_{cx\omega}(T_{1cx})\Gamma^{\omega}_{cx\alpha}(T_{2cx}) - \Gamma^{\beta}_{cx\omega}(T_{2cx})\Gamma^{\omega}_{cx\alpha}(T_{1cx}) +$$
$$+ D\Gamma^{\beta}_{cx\alpha}(T_{1cx})(T_{2cx}) - D\Gamma^{\beta}_{cx\alpha}(T_{2cx})(T_{1cx}),$$
$$D\Gamma^{\beta}_{cx\alpha}(T_{cx}) = (D\Gamma_{cx}(T_{cx}))^{\beta}_{\alpha}.$$

Отсюда в силу (2.19) получаем следующее выражение для компонент тензора кривизны построенной связности

$$R^{\alpha}_{cx\beta}(T_{1cx}, T_{2cx}) = -2P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{cx\beta}\nabla_{T[_1}\nabla_{T_2]}a_{cx\omega_1\ldots\omega_q}. \quad (2.24)$$

В случае векторного расслоения с размерностью слоев $n = 2, 3$ и заданным трехвалентным тензором a для построения алгебраических комитантов его, необходимых для введения внутренней линейной связности, удобно в качестве основного нетривиального инварианта выбрать его дискриминант $\mathfrak{A}$ [28], [40], [11].

1. Бинарное кубическое тензорное поле. Основными алгебраическими комитантами тензорного поля a в этом случае являются: дискриминант $\mathfrak{A}$, представляющий собою относительный инвариант веса 6; симметричная двухвалентная тензорная плотность h веса 2, определяемая в произвольной сверхкарте с помощью коэффициентов гессиана тензорного поля a соотношением $h_{cx\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha_1\beta_1}\varepsilon^{\alpha_2\beta_2}a_{cx\alpha\alpha_1\alpha_2}a_{cx\beta\beta_1\beta_2}$, где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — основная бивекторная плотность веса 1; аполярная тензорная плотность B веса 4, определяемая равенством $B^{\alpha\beta}_{cx} = 2\varepsilon^{\alpha\alpha_1}\varepsilon^{\beta\beta_1}h_{cx\alpha_1\beta_1}$ и удовлетворяющая системе уравнений $a_{cx\alpha\beta\gamma}B^{\alpha\beta}_{cx} = 0$, $h_{cx\alpha\beta}B^{\alpha\beta}_{cx} = \mathfrak{A}_{cx}$; симметричное тензорное поле C с компонентами $C^{\alpha\beta\gamma}_{cx} = \mathfrak{A}^{-1}_{cx}\varepsilon^{\alpha\alpha_1}\varepsilon^{\beta\beta_1}B^{\gamma\gamma_1}_{cx}a_{cx\alpha_1\beta_1\gamma_1}$, удовлетворяющими соотношениям $C^{\alpha\beta\gamma}_{cx}a_{cx\alpha\beta\lambda} = \delta^{\gamma}_{\lambda}$, $C^{\alpha\beta\gamma}_{cx}h_{cx\alpha\beta} = 0$; тензорное поле P типа (4, 1) с компонентами $P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta} = \delta^{\omega_3}_{\beta}C^{\omega_1\omega_2\alpha}_{cx} + \mathfrak{A}^{-1}_{cx}\varepsilon^{\omega_3\tau_1}\varepsilon^{\alpha\tau_2}a_{cx\tau_1\tau_2\beta}B^{\omega_1\omega_2}_{cx}$, симметричными по индексам ω_1, ω_2, ω_3 и удовлетворяющими условию

$$P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}a_{cx\gamma\omega_2\omega_3} = \delta^{\omega_1}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma}. \quad (2.25)$$

Внутренняя линейная связность в рассматриваемом векторном расслоении определяется требованием

$$P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}\nabla a_{cx\omega_1\omega_2\omega_3}=0. \qquad (2.26)$$

Раскрывая ковариантную производную в (2.26), в силу (2.25) получим

$$\Gamma^{\alpha}_{cx\beta}=\frac{1}{3}P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}Da_{cx\omega_1\omega_2\omega_3}. \qquad (2.27)$$

Разложение ковариантной производной $\nabla a_{cx\omega_1\omega_2\omega_3}$ по системе алгебраических комитантов тензорного поля a приводит к равенству $\nabla a=0$. Поэтому в силу (2.24) получаем, что $R=0$, т. е. связность, определяемая условием (2.26), имеет нулевую кривизну. Отсюда следует существование C^r-атласа сверхкарт в векторном расслоении, в которых коэффициенты связности (2.27) обращаются в нуль.

2. Тернарное кубическое тензорное поле. Способ построения алгебраических комитантов бинарного q-валентного тензорного поля при условии, что основной инвариант $\mathfrak{A}$ отличен от нуля [28], оказалось возможным распространить на кубическое тензорное поле в тернарной области. Дискриминант $\mathfrak{A}$ поля a в этом случае является относительным инвариантом веса 12, а его гессиан h — тензорной плотностью веса 2 с компонентами, определяемыми равенством

$$h_{cx\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\varepsilon^{\beta_1\beta_2\beta_3}a_{cx\alpha_1\beta_1\alpha}a_{cx\alpha_2\beta_2\beta}a_{cx\alpha_3\beta_3\gamma},$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — основная тривекторная плотность веса 1. Симметричное тензорное поле C имеет компоненты

$$C^{\alpha\beta\gamma}_{cx}=\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{-1}_{cx}\varepsilon^{\alpha\alpha_1\alpha_2}\varepsilon^{\gamma\gamma_1\gamma_2}B^{\beta\beta_1\beta_2}_{cx}a_{cx\alpha_1\beta_1\gamma_1}a_{cx\alpha_2\beta_2\gamma_2},$$

где $B^{\beta\beta_1\beta_2}_{cx}$ — компоненты тензорной плотности B веса 10, определяемые системой уравнений $a_{cx\alpha\beta\gamma}B^{\alpha\beta\lambda}_{cx}=0$, $h_{cx\alpha\beta\gamma}B^{\alpha\beta\gamma}_{cx}=\mathfrak{A}$. Тензорные поля a, h, B и C связаны также соотношениями $C^{\alpha\beta\gamma}_{cx}a_{cx\alpha\beta\lambda}=\delta^{\gamma}_{\lambda}$, $B^{\alpha\beta\gamma}_{cx}h_{cx\alpha\beta\lambda}=\frac{1}{3}\mathfrak{A}_{cx}\delta^{\gamma}_{\lambda}$. Тензорное поле P типа (4, 1) с компонентами $P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}$, симметричными по индексам ω_1, ω_2, ω_3, задается равенством $P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}=\delta^{\omega_3}_{\beta}C^{\omega_1\omega_2\alpha}_{cx}+\mathfrak{A}^{-1}_{cx}\varepsilon^{\omega_3\tau_1\nu_1}\varepsilon^{\alpha\tau_2\nu_2}\times$ $\times a_{cx\tau_1\tau_2\beta}a_{cx\nu_1\nu_2\omega}B^{\omega_1\omega_2\omega}_{cx}$ и удовлетворяет соотношению (2.25). Для разложения ковариантной производной тензорного поля a по его комитантам важную роль играет тензорная плотность L веса 2 с компонентами $L_{cx\alpha\beta\gamma}$, симметричными по индексам α, β, определяемыми системой уравнений $C^{\alpha\beta\gamma}_{cx}L_{cx\alpha\beta\lambda}=0$, $B^{\alpha\beta\gamma}_{cx}L_{cx\alpha\beta\lambda}=$ $=\mathfrak{A}_{cx}\delta^{\gamma}_{\lambda}$. Свертка L с P дает соотношение $P^{\alpha\omega_1\omega_2\omega_3}_{cx\beta}L_{\omega_1\omega_2\omega_3}=0$.

Линейная связность в векторном расслоении с таким тензорным полем однозначно определяется системой уравнений (2.26) относительно коэффициентов связности $\Gamma^{\alpha}_{cx\beta}$. Решая эту систему, получим, что коэффициенты связности выражаются через компоненты тензорного поля a и его комитанты по формулам (2.27). Разложение ковариантной производной тензорного поля a относительно построенной связности имеет вид $\nabla a_{cx\alpha\beta\gamma} = \chi_{cx} L_{cx(\alpha\beta\gamma)}$, где

$$\chi_{cx} = \frac{1}{3\mathfrak{A}_{cx}} B^{\alpha\beta\gamma}_{cx} D a_{cx\alpha\beta\gamma}. \tag{2.28}$$

Применяя тождество (2.24) для этого случая, получим, что построенная связность имеет нулевую кривизну. Поэтому существует C^r-атлас сверхкарт в расслоении, в которых коэффициенты построенной связности обращаются в нуль.

§ 6. Локально плоские и локально конформно-плоские тензорные структуры

Тензорная структура на многообразии задается совокупностью тензорных полей, которые называются основными или структурными тензорными полями. Наиболее изученными являются римановы структуры, аффинорные структуры и ряд других структур. Обзору дифференциально-геометрических структур на многообразиях было посвящено в последние годы несколько обширных работ, смотри, например, [2], [10], [30], [33]—[35]. Проблема эквивалентности G-структур на многообразиях подробно обсуждается в [32].

Важное значение для решения ряда задач дифференциальной геометрии и ее приложений играют тензорные структуры, определяемые полями ковариантных или контравариантных тензоров произвольной валентности. Для определенности мы будем рассматривать тензорные структуры, задаваемые ковариантными тензорными полями валентности q (a_q-структуры). Естественным обобщением тензорных структур на многообразиях являются структуры в векторных расслоениях, определяемые послойными тензорными полями, к которым приходится обращаться при некоторых дифференциально-геометрических исследованиях. Основное внимание в этой работе будет уделено тензорным структурам в векторных расслоениях с конечномерными слоями, базой которых является в общем случае бесконечномерное банахово многообразие.

Рассмотрим векторное расслоение со связной базой X, являющейся банаховым многообразием класса C^r, допускающим разбиение единицы, и с конечномерным типовым слоем F размерности $n \geqslant 2$.

Будем говорить, что в векторном расслоении (M, X, p) задана тензорная a_q-структура, если фиксировано послойное поле ковариантного симметрического тензора a валентности $q > 2$ с отличным от нуля основным инвариантом.

Построенная внутренняя связность дает простое условие локальной эквивалентности a_q-структуры стандартной плоской структуре.

Прежде всего заметим, что всякая a_q-связность, т. е. связность, относительно которой ковариантная производная тензора a равна нулю, необходимо должна совпадать со связностью, определяемой условием (2.20). Действительно, пусть $\overline{\nabla}$ — связность с коэффициентами $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{cx\beta}$ такая, что $\overline{\nabla}a=0$, тогда имеем $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{cx\beta}=\Gamma^{\alpha}_{cx\beta}+Q^{\alpha}_{cx\beta}$, где $Q^{\alpha}_{cx\beta}$ — компоненты тензора аффинной деформации. Отсюда в силу (2.19) и (2.20) получим $Q^{\alpha}_{cx\beta}=0$.

Тензорную структуру в векторном расслоении, задаваемую тензорным полем a, будем называть локально плоской, если существует векторный C^r-атлас $\overline{K}$ такой, что в каждой векторной карте $\overline{c}=(U,\overline{\varkappa},F)$ главная часть a постоянна. Если слои векторного расслоения конечномерны, то главные части сечения a могут быть охарактеризованы в сверхкартах, соответствующих картам атласа $\overline{K}$, компонентами тензорного поля a. Поэтому тензорная a_q-структура будет локально плоской тогда и только тогда, когда в векторном расслоении существует C^r-атлас $\widetilde{K}$ сверхкарт, в которых компоненты тензорного поля a постоянны. В таком случае говорят также, что a_q-структура интегрируема [26], [21].

Легко видеть, что a_q-структура в векторном расслоении (M,X,p) является локально плоской тогда и только тогда, когда связность (2.22) есть a_q-связность.

В случае касательного расслоения $(T(X),X,\pi)$ с n-мерной базой X удобнее вводить симметричную связность. Условимся, как обычно, в этом случае опускать индексы cx у компонент объектов. Тогда линейная симметричная связность на X с заданной a_q-структурой может быть определена системой $P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{(\beta}\nabla_{\gamma)}a_{\omega_1\ldots\omega_q}=0$, $S^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, где $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — компоненты тензора кручения. Отсюда находим, что коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=P^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{(\beta}\partial_{\gamma)}a_{\omega_1\ldots\omega_q}. \tag{2.29}$$

Необходимым и достаточным условием того, что a_q-структура на X будет локально плоской, является обращение в нуль ковариантной производной структурного тензорного поля a относительно связности (2.29).

Используя известные теоремы приведения [8], получаем полную систему тензорных дифференциальных комитантов a_q-структуры:

Теорема. Всякий тензорный дифференциальный комитант порядка k a_q-структуры на многообразии является комитантом структурного тензора a и его ковариантных производных до порядка k относительно объекта (2.29).

Ряд результатов, относящихся к проблеме эквивалентности для a_q-структуры на многообразии и построению полной системы ее тензорных комитантов, приводится в работах [28], [41], [11], [12], [15], [17], [26].

Пусть ψ — изоморфизм векторных расслоений (M, X, p) и (M', X, p') с заданными в них послойными тензорными полями a и a' соответственно типа $(0, q)$. Если $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ и $\bar{c}'=(U, \bar{\varkappa}', F)$ — общие векторные карты этих расслоений, то $^*\bar{c}=(U, {}^*\bar{\varkappa}, L_q(F))$ и $^*\bar{c}'=(U, {}^*\bar{\varkappa}', L_q(F))$ — общие векторные карты расслоений $(L_q(M), X, p^*)$ и $(L_q(M'), X, {}^*p')$. Изоморфизм ψ называется конформным изоморфизмом векторных расслоений с заданными послойными тензорными структурами, если в общих векторных картах главные части сечений a и a' отличаются числовым множителем, т. е.

$$h_{a'}=\sigma h_a, \qquad (2.30)$$

где $\sigma=\sigma(x)$ — морфическая функция на базе. Если векторные расслоения (M, X, p) и (M', X, p') совпадают, то соотношение (2.30) определяет конформное преобразование (конформную перенормировку) структурного тензорного поля.

Будем говорить, что тензорная a_q-структура в векторном расслоении (M, X, p) локально конформно-плоская, если существует векторный C^r-атлас на M такой, что в каждой карте $\bar{c}=(U, \bar{\varkappa}, F)$ этого атласа главная часть тензорного поля a', полученного после некоторой конформной перенормировки структурного тензорного поля a, постоянна на U. Другими словами, тензорная a_q-структура локально конформно-плоская, если заменой векторных карт и умножением на некоторый скалярный множитель главную часть структурного тензорного поля можно сделать постоянной. В этом случае можно говорить также об интегрируемости конформной a_q-структуры.

В случае a_q-структуры в векторном расслоении с конечномерными слоями главная часть структурного тензорного поля полностью характеризуется его компонентами в любой сверхкарте. Поэтому тензорная a_q-структура в таком векторном расслоении будет локально конформно-плоской, если после замены сверхкарт и умножения на некоторый скалярный множитель компоненты структурного тензора a приводятся к постоянным.

Установим, как преобразуются основные комитанты структурного тензорного поля a при конформном преобразовании (2.30). Вычисляя компоненты a и a' в некоторой сверхкарте $\tilde{c}$, в силу (2.30) получим $a'_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}=\sigma_{cx}a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}=\sigma(x)\,a_{cx\alpha_1\ldots\alpha_q}$. Отсюда следует, что построенные комитанты структурного тензора a при конформном преобразовании преобразуются следующим образом: $J'=\sigma^g J$, $b'=\frac{1}{\sigma}b$, $D'=D$, $N'=N$, $L'=L$,

$P' = \frac{1}{\sigma} P$. Поэтому для коэффициентов связностей, определяемых тензорными полями a и a' по формуле (2.21), справедливо соотношение

$$'\Gamma^{\alpha}_{cx\beta} = \Gamma^{\alpha}_{cx\beta} + \frac{1}{q} \sigma'(x) \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{2.31}$$

где $\sigma'(x) = \frac{D\sigma(x)}{\sigma(x)}$. Для свернутых объектов связностей получим

$$'\Gamma^{\omega}_{cx\omega} = \Gamma^{\omega}_{cx\omega} + \frac{n}{q} \sigma'(x). \tag{2.32}$$

Пусть $\tilde{c}$ — произвольная сверхкарта, обозначим

$$Z_{cx} = \frac{1}{J_{cx}} (DJ_{cx} - w\Gamma^{\omega}_{cx\omega} J_{cx}). \tag{2.33}$$

Покажем, что Z_{cx} есть значение представления главной части ковекторного поля на X. При преобразовании сверхкарты в силу (2.21) имеем $J_{c'x} = (\Delta(x))^{-w} J_{cx}$, где $\Delta(x) = \mathrm{Det}(\lambda^{\alpha'}_{\alpha}(x))$. Пользуясь (2.16), после несложных вычислений приходим к ковекторному закону преобразования для Z_{cx} при переходе от $\tilde{c}$ к $\tilde{c}'$, т. е. имеем $Z_{c'x} = Z_{cx} \circ D(\varkappa \circ \overset{-1}{\varkappa'})_{\varkappa'(x)}$. В силу (2.32) получаем, что тензорное поле (2.33) является конформным дифференциальным комитантом тензорной a_q-структуры.

Как мы увидим ниже, в случае касательной a_q-структуры ковектор Z сам не является конформным инвариантом, но его закон преобразования при конформной перенормировке структурного тензора может быть использован при построении полной системы конформных тензорных комитантов этой структуры. Дифференциальный комитант Z играет также важную роль при выводе необходимых и достаточных условий обращения касательной a_q-структуры в локально конформно-плоскую.

Для a_q-структуры в векторном расслоении (M, X, p), не являющемся касательным, получаем, что локально конформно-плоскими будут локально плоские a_q-структуры и только они. Действительно, то, что локально плоские структуры являются локально конформно-плоскими, — очевидно. Обратно, если a_q-структура локально конформно-плоская, то существует атлас сверхкарт такой, что в каждой карте этого атласа имеем $Da_{cx\alpha_1 \ldots \alpha_q} = -\sigma'(x) a_{cx\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ для некоторого множителя σ. Поэтому в силу (2.22) и (2.31) имеем $\nabla' a'_{cx\alpha_1 \ldots \alpha_q} = 0$ в любой сверхкарте. Отсюда следует, что $\nabla a_{cx\alpha_1 \ldots \alpha_q} = 0$.

Перейдем теперь к построению конформных комитантов a_q-структуры в касательном расслоении $(T(X), X, \pi)$ с n-мерной базой X. При конформной перенормировке (2.30) структурного тензорного поля коэффициенты внутренней связности (2.29) преобразуются по формуле $'\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{1}{q}\sigma_{(\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma)}$, где $\sigma_{\beta}=\frac{\partial_{\beta}\sigma}{\sigma}$. Ковектор

$$Z_{\alpha}=\frac{2n}{qg(n-1)}\frac{\nabla_{\alpha}J}{J}, \tag{2.34}$$

при этом имеет следующий закон преобразования $Z'_{\alpha}=Z_{\alpha}+$ $+\frac{1}{q}\sigma_{\alpha}$, поэтому он может быть использован для построения линейной связности $\tilde{\nabla}$, инвариантной относительно конформного преобразования структурного тензорного поля. Коэффициенты этой связности определяются формулой

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-Z_{(\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma)}. \tag{2.35}$$

Тензорная a_q-структура в касательном расслоении будет локально конформно-плоской тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия [17]: ковектор (2.34) является градиентом, а ковариантная производная структурного тензорного поля a относительно связности (2.29) имеет вид $\nabla_{\nu}a_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}=$ $=qZ_{[\nu}a_{\omega_1]\omega_2\ldots\omega_q}$.

Вычисление конформных тензорных дифференциальных комитантов a_q-структуры может быть сведено к вычислению ковариантных производных относительно объекта (2.35) тензорной плотности $\mathfrak{T}$ с компонентами

$$\mathfrak{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}=|J|^{-\frac{1}{g}}a_{\alpha_1\ldots\alpha_q}. \tag{2.36}$$

При проведении этих исследований удобно исходить из задания на многообразии псевдотензорной структуры.

Пусть на многообразии X задано поле q-валентного симметрического ковариантного псевдотензора с компонентами $A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$. Для построения внутренней линейной связности этой структуры перейдем к полю структурной W-тензорной плотности [6] той же валентности. Для этого рассмотрим инвариант $\hat{J}=\mathrm{Det}\,(A_{\{\alpha_1\ldots\alpha_v\}\{\beta_1\ldots\beta_v\}})$. Очевидно, что при перенормировке псевдотензора $A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ определитель $\hat{J}$, имеющий порядок g приобретает отличный от нуля скалярный множитель, так что равенство нулю его имеет инвариантный смысл. Пусть $\hat{J}\neq 0$, тогда возможно построить W-тензорную плотность веса $-\frac{q}{n}$ с компонентами

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}=|\hat{J}|^{-\frac{1}{g}}A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}, \tag{2.37}$$

определенную с точностью до знака. Так как определитель $\mathfrak{J}=\mathrm{Det}\,(\mathfrak{A}_{\{\alpha_1\ldots\alpha_v\}\{\beta_1\ldots\beta_v\}})$ равен ± 1, то можно определить контравариантную W-тензорную плотность $\mathfrak{B}$ с компонентами $\mathfrak{B}^{\alpha_1\ldots\alpha_v\beta_1\ldots\beta_v}$, симметричными по индексам $\alpha_1, \ldots, \alpha_v$ и $\beta_1, \ldots, \beta_v$, а также относительно указанных систем индексов, удовлетворяющую следующему соотношению

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_v\beta_1\ldots\beta_v}\mathfrak{B}^{\alpha_1\ldots\alpha_v\gamma_1\ldots\gamma_v}=\delta^{\gamma_1}_{(\beta_1}\ldots\delta^{\gamma_v}_{\beta_v)}.$$

Теперь, как и в случае тензорной a_q-структуры, могут быть построены комитанты $\hat{D}$, $\hat{N}$, $\hat{L}$, $\hat{P}$ с компонентами $\hat{D}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}=$ $=\mathfrak{A}_{\gamma\gamma_2\ldots\gamma_v\lambda\lambda_2\ldots\lambda_v}\mathfrak{B}^{\alpha\gamma_2\ldots\gamma_v\beta\lambda_2\ldots\lambda_v}$, $\hat{N}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}=\frac{(n+v)!}{v!(n+1)!}\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda}+v\hat{D}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}$, $\hat{L}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}$, $\hat{P}_{\beta}^{\alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}=\hat{L}^{\alpha\gamma}_{\lambda\beta}\left(\delta^{\omega_1}_{\gamma}\mathfrak{B}^{\lambda\omega_2\ldots\omega_q}-\frac{v-1}{2v(n+1)}\delta^{\lambda}_{\gamma}\mathfrak{B}^{\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}\right)$, удовлетворяющие равенствам

$$\hat{N}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}\hat{L}^{\mu\lambda}_{\alpha\nu}=\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\nu},\quad \hat{N}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}\hat{L}^{\gamma\nu}_{\mu\beta}=\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\nu}_{\lambda}$$
$$q\hat{P}_{\beta}^{\alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_q}\delta^{\gamma}_{(\omega_1}\mathfrak{A}_{\omega_2\ldots\omega_q)\lambda}=\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\beta}. \tag{2.38}$$

Для построения внутренней симметричной линейной связности $\hat{\nabla}$ рассматриваемой псевдотензорной структуры потребуем выполнения следующих условий:

$$\text{а) } \hat{P}_{(\beta}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}\hat{\nabla}_{\gamma)}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}=0,\quad \text{б) } \hat{S}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0, \tag{2.39}$$

где $\hat{S}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — компоненты тензора кручения связности $\hat{\nabla}$.

Раскрывая в (2.39) а) ковариантную производную $\hat{\nabla}_{\gamma}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}$, в силу (2.38) получим

$$\hat{P}_{(\beta}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}\partial_{\gamma)}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}-\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{1}{n}\hat{\Gamma}_{(\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma)}=0, \tag{2.40}$$

где $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — коэффициенты определяемой связности, а $\hat{\Gamma}_{\beta}=\hat{\Gamma}^{\omega}_{\beta\omega}$. Выражая с помощью (2.40) свернутый объект связности $\hat{\Gamma}_{\beta}$ через компоненты структурной тензорной плотности и ее комитанта $\hat{P}$, получим явное выражение для коэффициентов искомой линейной связности $\hat{\nabla}$:

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\hat{P}_{(\beta}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}\partial_{\gamma)}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}+\frac{2}{n-1}\hat{P}_{(\omega}^{\omega\omega_1\ldots\omega_q}\partial_{(\beta)}\mathfrak{A}_{|\omega_1\ldots\omega_q|}\delta^{\alpha}_{\gamma)}. \tag{2.41}$$

Чтобы выразить тензор кривизны связности $\hat{\nabla}$ через ковариантные производные структурной тензорной плотности (2.37) и ее алгебраические комитанты, применим к этой плотности тождество Риччи

$$2\hat{\nabla}_{[\nu}\hat{\nabla}_{\mu]}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}=-q\hat{R}^{\sigma}_{\nu\mu(\omega_1}\mathfrak{A}_{\omega_2\ldots\omega_q)\sigma}+\frac{q}{n}\hat{V}_{\nu\mu}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}, \tag{2.42}$$

где $\hat{V}_{\nu\mu}=\hat{R}^{\omega}_{\nu\mu\omega}$. После умножения (2.42) на $\hat{P}_{\beta}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}$ и свертывания результата по индексам $\omega_1,\ldots,\omega_q$ в силу (2.38) получим

$$\hat{R}^{\alpha}_{\nu\mu\beta}=-2\hat{P}_{\beta}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}\hat{\nabla}_{[\nu}\hat{\nabla}_{\mu]}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}+\frac{1}{n}\hat{V}_{\nu\mu}\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{2.43}$$

Так как тензор кривизны удовлетворяет тождеству $\hat{\mathring{R}}^{\alpha}_{[\nu\mu\beta]}=0$, то альтернируя обе части равенства (2.43) по индексам ν, μ, β и свертывая результат альтернирования по a, β, приходим в случае $n>2$ к соотношению

$$\hat{V}_{\nu\mu}=\frac{6n}{n-2}\hat{P}^{\omega\omega_1\ldots\omega_q}_{[\omega}\hat{\nabla}_{\nu}\hat{\nabla}_{\mu]}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}.$$

Поэтому компоненты тензора кривизны связности (2.41) при $n>2$ можно представить в виде

$$\hat{\mathring{R}}^{\alpha}_{\nu\mu\beta}=2\hat{P}^{\alpha\omega_1\ldots\omega_q}_{\beta}\hat{\nabla}_{[\mu}\hat{\nabla}_{\nu]}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}+$$

$$+\frac{6}{n-2}\hat{P}^{\omega\omega_1\ldots\omega_q}_{[\omega}\hat{\nabla}_{\nu}\hat{\nabla}_{\mu]}\mathfrak{A}_{\omega_1\ldots\omega_q}\delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.44)$$

Предполагая, что $n>2$ и пользуясь полученным соотношением (2.44) и известными теоремами приведения [8], получаем, прежде всего, следующие теоремы об обращении структуры на многообразии, определяемой полем тензорной плотности (2.37), в локально плоскую и о вычислении полной системы тензорных дифференциальных комитантов:

Теорема. Для того, чтобы структура на многообразии X, определяемая полем (2.37), была локально плоской, необходимо и достаточно обращения в нуль ковариантной производной структурного поля относительно связности (2.41).

Теорема. Всякий тензорный дифференциальный комитант k тензорной плотности (2.37) является комитантом этой плотности и ее ковариантных производных до порядка k включительно, вычисленных относительно объекта (2.41).

Непосредственными подсчетами нетрудно убедиться, что если в каждой точке $x\in X$ имеет место равенство $\sigma a_{\alpha_1\ldots\alpha_q}=A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$, то тензорные плотности (2.36) и (2.37), а также объекты (2.35) и (2.41) совпадают. Отсюда получается

Теорема. Всякий конформный тензорный дифференциальный комитант порядка k a_q-структуры является комитантом тензорной плотности (2.36) и ее ковариантных производных до порядка k включительно, вычисленных относительно объекта (2.35).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асанов Г. С.*, Финслерово пространство с алгебраической метрикой, определяемой полем реперов. В сб. «Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, *8*, 67—87 (РЖМат, 1978, 1А643)
2. *Беклемишев Д. В.*, Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб. «Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 165—212 (РЖМат, 1966, 11А390)
3. *Близникас В. И.*, О геометрии систем дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР», 1969, *2*, 33—53 (РЖМат, 1970, 4А652)

4. *Бурбаки Н.*, Дифференцириуемые и аналитические многобразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975, 220 с. (РЖМат, 1975, 9А444К)
5. *Вагнер В. В.*, Двухмерное пространство с кубической метрикой. Уч. зап. Саратов. ун-т., сер. физ.-мат., 1938, *1*, № 1, 29—40
6. —, Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. Приложение к книге: *Веблен О., Уайтхед Дж.,* Основания дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1949, 229 с.
7. —, Теория составного многообразия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, *8,* 11—72
8. *Веблен О.*, Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: ИЛ, 1948, 140 с.
9. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.*, Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971, 343 с. (РЖМат, 1971, 7А734К)
10. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, *9*, 246 с. (РЖМат, 1980, 1А800)
11. *Ермаков Ю. И.*, Трехмерное пространство с кубической полуметрикой. Докл. АН СССР, 1958, *118,* № 6, 1070—1073 (РЖМат, 1959, 3181)
12. —, Пространства X_n с алгебраической метрикой и полуметрикой. Докл. АН СССР, 1959, *128,* № 3, 460—463 (РЖМат, 1960, 9487)
13. —, Об инвариантном оснащении некоторых поверхностей специального вида в проективном пространстве. Докл. АН СССР, 1965, *162,* № 6, 1234—1237 (РЖМат, 1965, 11А410)
14. —, О поверхностях специального вида в аффинных и проективных пространствах. Изв. вузов. Мат., 1966, № 3, 60—67 (РЖМат, 1966, 10А403)
15. —, О геометрии дифференцируемого многообразия с заданным полем трехвалентного тензора или псевдотензора. Изв. вузов. Мат., 1972, № 1, 12—24 (РЖМат, 1972, 5А656)
16. —, Гиперповерхности пространства с кубической метрикой. В сб. «Дифференц. геометрия». Вып. 1. Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 20—35 (РЖМат, 1975, 5А710)
17. —, Дифференцируемые многообразия с биквадратичной метрикой. В сб. «Дифференц. геометрия». Вып. 2. Саратов, Саратов. ун-т, 1975, 21—40 (РЖМат, 1976, 11А808)
18. —, Линейные связности в гладких векторных расслоениях. Дифференц. геометрия (Саратов), 1979, № 4, 140—150 (РЖМат, 1980, 6А728)
19. —, О кривизне линейной связности векторного расслоения. Дифференц. геометрия (Саратов), 1980, № 5, 9—31 (РЖМат, 1981, 9А516)
20. —, Тождество Риччи в векторном расслоении банахова типа. Дифференц. геометрия: геометрия обобщен. пространств и ее прил. Саратов, 1981, 18—30 (РЖМат, 1983, 1А682)
21. —, К теории интегрируемости тензорных структур. Изв. вузов. Мат., 1983, № 1, 36—45 (РЖМат, 1983, 8А724)
22. —, Ковариантное дифференцирование связующих тензорных полей векторных расслоений. Дифференц. геометрия (Саратов), 1983, № 7, 17—26 (РЖМат, 1984, 7А616)
23. —, О локализации тензорных полей. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 33—41 (РЖМат, 1985, 5А615)
24. *Картан А.*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971, 392 с. (РЖМат, 1971, 12Б30К)
25. *Клингенберг В.*, Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982, 414 с. (РЖМат, 1983, 1А628К)
26. *Кручкович Г. И.*, Гиперкомплексные структуры на многообразиях. I. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1972, вып. 16, 174—201 (РЖМат, 1973, 3А684)
27. *Ленг С.*, Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967, 203 с. (РЖМат, 1967, 8А355К)

28. *Либер А. Е.*, О двумерных пространствах с алгебраической метрикой. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1952, *9*, 319—350
29. —, О геометрических объектах и ковариантном дифференцировании связующих аффиноров в составных многообразиях. Уч. зап. Саратовск. ун-т, 1961, *70*, 73—105 (РЖМат, 1963, 4А293)
30. *Остиану Н. М.*, Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, *8*, 89—111 (РЖМат, 1978, 1А632)
31. *Слободян Ю. С.*, Об аффинной связности финслеровых пространств с алгебраической метрикой. VI Всес. геометр. конф. по соврем. пробл. геометрии. Тезисы докл. Вильнюс, 1975, 219—220 (РЖМат, 1975, 12А583К)
32. *Стернберг С.*, Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970, 412 с. (РЖМат, 1971, 7А754К)
33. *Шапуков Б. Н.*, Связности на дифференцируемых расслоениях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *15*, 61—93 (РЖМат, 1984, 5А725)
34. *Широков А. П.*, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 127—188 (РЖМат, 1970, 2А629)
35. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, *11*, 153—207 (РЖМат, 1974, 11А795)
36. *Cramlet M.*, The invariants of an N-ary Q-ic differential form. Ann. Math., 1930, *31*, 134—150
37. *Flaschel P.*, *Klingenberg W.*, Riemannsche Hilbertmanningfaltigkeiten. Periodische Geodätische. Lect. Notes Math., 1972, 282, V, 211 S. (РЖМат, 1973, 3А617)
38. *Kočandrle M.*, Differential geometry of submanifolds in affine spaces with tensor structure. Чехосл. мат. ж., 1967, *17*, № 3, 434—446 (РЖМат, 1968, 8А543)
39. *Sasayama Hiroyoshi*, On quasi Riemanian motions. J. Spat. Math. Sasayama Res. Room, 1960, *3*, № 1, 27—40 (РЖМат, 1962, 9А328)
40. *Tonooka Keinosuke*, On a geometry of three-dimensional space with an algebraic metric. Tensor, 1956, *6*, № 1, 60—68 (РЖМат, 1957, 8913)
41. —, On three and four dimensional Finsler spaces with the fundamental form $\sqrt[3]{a_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}x'^{\beta}x'^{\gamma}}$. Tensor, 1959, *9*, № 3, 209—216 (РЖМат, 1961, 8А444)
42. —, Subspace theory of an n-dimensional space with an algebraic metric. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1964, Ser. 1, *18*, № 1—2, 34—40 (РЖМат, 1968, 3А636)
43. —, On a geometry of three-dimensional space based on the differential form of the fourth order. Tensor, 1972, *25*, 148—154 (РЖМат, 1974, 1А630)