В. М. Глушков, Ю. И. Мерзляков, Седьмой Всесоюзный симпозиум по теории групп,
УМН, 1981, том 36, выпуск 2, 232–236

СЕДЬМОЙ ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

В. М. Глушков, Ю. И. Мерзляков

С 9 по 11 сентября 1980 г. в пос. Шушенском Красноярского края состоялся Седьмой Всесоюзный симпозиум по теории групп, организованный Институтом кибернетики АН УССР и Красноярским и Новосибирским государственными университетами. Оргкомитет симпозиума: В. М. Глушков — председатель, В. М. Бусаркин, Ю. Л. Ершов, Д. И. Зайцев, А. П. Коваленко, А. И. Кострикин, В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков — зам. председателя, А. Н. Остыловский — ученый секретарь, Н. Д. Подуфалов, С. Н. Черников, С. А. Чунихин, В. П. Шунков — зам. председателя, С. В. Яблонский.

В работе симпозиума приняли участие 97 человек из 25 городов Советского Союза, в том числе 7 докторов и 50 кандидатов наук. Распределение их по городам таково: Красноярск — 20, Москва — 12, Новосибирск и Свердловск — по 11, Гомель, Киев и Минск — по 5, Абакан — 4, Краснодар и Омск — по 3, Томск, Тула и Челябинск — по 2, Барнаул, Батуми, Витебск, Дрогобыч, Иваново, Йошкар-Ола, Кишинев, Ленинград, Нальчик, Рязань, Сумы и Ужгород — по одному.

К открытию симпозиума были изданы тезисы докладов и сообщений [8], а также программа, включавшая пленарные и получасовые секционные доклады. Пленарные заседания проводились в первой половине дня, секционные — во второй. Работали параллельно три секции —«Конечные группы», «Бесконечные группы» и «Группы с дополнительными структурами»; руководство ими по традиции возлагалось на советы секций, которые могли включать в программу секционных заседаний дополнительные доклады и краткие сообщения. В советы секций входили Ю. М. Горчаков, Д. И. Зайцев, В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, А. И. Старостин и В. П. Шунков.

Восемь докладов, прочитанных на пленарных заседаниях, дают весьма полное представление о наиболее важных результатах, полученных в Советском Союзе после предыдущего симпозиума [14].

В докладе В. М. Глушкова, Ю. В. Капитоновой и А. В. Анисимова (Киев) «Алгебраические исследования и вычислительные машины» обсуждались вопросы, связанные с взаимным проникновением и влиянием алгебры и теории вычислений. Доклад состоял из двух частей — применения алгебры в теории вычислений и применения теории вычислений в алгебре. Обзор работ первого — более традиционного — направления охватывал теорию синтаксических моноидов, теорию дискретных преобразователей над информационными средами с алгебраической структурой, формальные преобразования микропрограмм с целью получения оптимальных алгоритмов. В качестве примера было рассмотрено полученное В. М. Глушковым решение задачи оптимизации алгоритма минимизации числа состояний автомата. Во второй части доклада рассматривались задачи перечисления всех элементов группы подстановок, а также перечисления всех топологических сортировок. Было приведено простое решение этих задач с использованием алгебраической характеристики топологической сортировки. Рассматривались применения теории вычислений в комбинаторной теории групп. Был дан обзор достижений в области автоматического доказательства теорем теории групп. Подробно обсуждалась система автоматизации доказательств, разрабатываемая в Институте кибернетики АН УССР.

В. П. Шунков, А. Н. Остыловский и А. И. Созутов (Красноярск) в докладе «Группы с условиями конечности» отметили следующие результаты, полученные в указанной области за последнее время. И. И. Павлюк и В. П. Шунков в совместной работе и независимо от них В. В. Беляев доказали почти локальную разрешимость локально конечных групп с условием минимальности для всех силовских подгрупп (решение известной проблемы С. Н. Черникова). А. Н. Остыловский доказал, что сопряженно бипримитивно конечные группы без инволюций, удовлетворяющие условию минимальности для абелевых подгрупп, являются черниковскими. Он построил также силовскую теорию F_q^*-групп (этот класс групп, введенный в 1977 г. В. П. Шунковым, содержит, в частности, периодическую группу А. Ю. Ольшанского), использованную затем А. Н. Остыловским, В. П. Шунковым и Е. И. Седовой в изучении F_q^*-групп с различными условиями конечности. Получены также следующие важные признаки непростоты групп: периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна и почти разрешима (В. П. Шунков); если группа G обладает элементом a порядка, отличного от 2, и собственной подгруппой H, такими, что для почтив сех элементов вида a_g, $g \in G \setminus H$, группа $L_g = \text{гр}\,(a, a^g)$ является фробениусовой группой вида $F_g \leftthreetimes (a)$, то либо $G = F \leftthreetimes N_G((a))$, либо индекс $|\, G\colon C_G(a)\,|$ конечен (А. И. Созутов, В. П. Шунков). На основе этих признаков непростоты найдены достаточные условия вложимости элемента в бесконечную подгруппу с нетривиальным локально конечным радикалом (В. П. Шунков, А. И. Созутов и др.), что позволило перенести известные результаты М. И. Каргаполова о существовании бесконечных абелевых подгрупп на некоторые новые классы групп.

С докладом «Характеризация группы Рудвалиса» выступил В. Д. Мазуров (Новосибирск). В 1972 г., изучая граф, связанный с группой ${}^2F_4(2)$, Рудвалис высказал предположение о существовании новой простой группы порядка $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$. В 1973 г. Конвей и Уолес [15] с помощью вычислительной машины доказали существование этой группы. Группа Рудвалиса Ru содержит два класса сопряженных инволюций. Если i — инволюция из Ru, не лежащая в центре силовской 2-подгруппы, то централизатор i изоморфен прямому произведению элементарной группы порядка 4 на группу $Sz(8)$. В 1973 г. Янко поставил вопрос о характеризации группы Ru централизатором ее нецентральной инволюции (см. [2], вопрос 4.77.а)). Ответ дает следующая теорема, полученная докладчиком: если G — конечная простая группа, у которой централизатор некоторой инволюции изоморфен прямому произведению элементарной группы V порядка 4 и $Sz(8)$, то G изоморфна Ru. При дополнительном предположении, что централизаторы всех инволюций из V совпадают, это было доказано ранее Демпвольфом [16]. Теорема докладчика получена им как частный случай следующего «индуктивного» утверждения. Пусть G — конечная группа, i — такая ее инволюция, что $C_G(i) = V \times L$, где $|\,V\,| \leqslant 4$, $L \simeq Sz(2^{2n+1})$, $n \geqslant 1$. Тогда либо $n = 1$ и $G \simeq Ru$, либо $i \notin [G, G]$ и группа $M = \text{гр}(L^G)$ удовлетворяет одному из следующих условий: а) $M = O(M)\cdot L$; б) $M = L_1 \times L_1^i$, $L_1 \simeq L$; в) $n = 1$, $M = L_1 L_1^i$, $[L_1, L_1^i] = 1$, $[L_1, L_1] = L_1$, $|\, Z(L_1)\,| = 2$, $L_1/Z(L_1) \simeq L$, $L_1 \cap L_1^i = Z(L_1)$; г) $M \simeq Sp_4\,(2^{2n+1})$.

В докладе Р. А. Саркисяна (Москва) «Конструктивные аспекты теории алгебраических групп» был дан обзор приложений теории линейных алгебраических групп к ряду алгоритмических задач алгебры. Пусть k — поле алгебраических чисел, $\mathfrak{o}$ — кольцо его целых элементов, G — линейная алгебраическая группа, определенная над k, $G(k)$ $G(\mathfrak{o})$ — группы ее k-точек и целых k-точек соответственно, $\rho\colon G \to GL_m$ — k-представление группы G, x и y — два произвольных вектора из k^m. Будем говорить, что выполняется гипотеза H_k, если для всякой полупростой односвязной k-группы S справедлив «принцип Хассе» для 1-когомологий Галуа $H^1(k, S)$. Имеют место следующие основные теоремы: а) можно алгоритмически проверить существование такого элемента $g \in G(k)$, что $x\rho(g) = y$; б) можно алгоритмически проверить существование такого элемента $g \in G(\mathfrak{o})$, что $x\rho(g) = y$; в) можно алгоритмически найти систему порождающих элементов и определяющих соотношений группы $G(\mathfrak{o})$. Из теоремы а) следует, в частности, что г) алгоритмически разрешима проблема изоморфизма над k для конечномерных алгебр, определенных над полем k, а из теорем б), в) следует, что д) алгоритмически разрешима проблема изоморфизма для конечнопорожденных нильпотентных групп. Пусть $G(A_k)$ — неархимедова компонента группы k-аделей k-группы G, W — открытая компактная подгруппа группы $G(A_k)$. е) Существует алгоритм для нахождения полной системы представителей множества двойных смежных классов

$$G(k)\diagdown G(A_k)/W = \{X_1, \ldots, X_n\}$$

(оно всегда конечно) и алгоритм, проверяющий для любого i и любого двойного смежного класса $Y = G(k)aW$ справедливость равенства $Y = X_i$. Эта теорема имеет ряд приложений к проблемам рода. Теоремы а), г), е) доказаны докладчиком, а теоремы б), в), д) — Грюневальдом и Сегалом и независимо от них, но в предположении гипотезы H_k — докладчиком.

Доклад Н. Д. Подуфалова (Красноярск) «3-характеризации конечных простых групп» был посвящен исследованию конечных групп типа характеристики 2 с 3-скованными 3-локальными подгруппами. Пусть G — конечная простая группа с указанными свойствами и $m_3(G) \geqslant 4$. Несложные рассуждения показывают, что либо в G существует сильно 3-вложенная подгруппа, либо G — группа типа характеристики 3. Соответствующие результаты докладчика и Мэйсона позволяют сделать вывод, что либо G — группа известного типа, либо $m_{2,3}(G) \leqslant 1$, либо в G существует сильно 3-вложенная 2-локальная подгруппа. Далее осуществляется редукция

$$m_{2,3}(G) \leqslant 1 \Rightarrow m_{3,2}(G) \leqslant 1$$

и показывается, что если X — конечная простая группа типа характеристики 2, $m_{2,3}(X) \leqslant 1$ и $m_{3,2}(X) \leqslant 1$, то X изоморфна одной из групп $Sz(q)$, $L_2(2^n)$, $U_3(2^n)$, $L_3(2^n)$. Таким образом, имеет место одно из следующих утверждений: либо G содержит сильно 3-вложенную 2-локальную подгруппу, либо G изоморфна $G_2(3)$ или $U_4(3)$. Если теперь дополнительно потребовать, чтобы собственные подгруппы группы G были K-группами, то из результата Ашбахера о группах с сильно 3-вложенной 2-локальной подгруппой следует, что G изоморфна $G_2(3)$ или $U_4(3)$. Значит, минимальная неизвестная конечная простая группа (если она окажется группой типа характеристики 2) либо обладает элементом порядка 3, централизатор которого не является 3-скованной группой, либо ее 3-ранг меньше 4. Разработанные докладчиком методы позволяют также завершить описание конечных групп, являющихся одновременно группами типа характеристики 2 и 3. В заключение докладчик поставил проблему: доказать, что если минимальная неизвестная конечная простая группа G является группой типа характеристики 2, то $m_3(G) \leqslant 3$ (при $m_{2,3}(G) \leqslant 1$ это доказано).

Ю. Н. Мухин (Свердловск) выступил с докладом «Топологические группы» по материалам одноименной обзорной статьи, подготовленной им для серии «Итоги науки» и отражающей достижения в теории топологических групп за последние 15 лет. Основное внимание было уделено следующим разделам. Топологизация групп и свойства групповых топологий. Морфизмы, автоморфизмы и группы автоморфизмов. Многообразия топологических групп, предельные тождества, свободные группы многообразий. Абелевы группы и обобщения коммутативности, локальные теоремы. Условия конечности и дискретности, группы конечного ранга, слойно компактные группы, группы со слабым условием минимальности. Замкнутые подгруппы локально компактных групп: радикалы, субнормальные подгруппы, компактно покрываемые подгруппы, факторизация групп, ограничения на подгруппы, свойства абстрактной и топологизированной решетки замкнутых подгрупп, решеточные изоморфизмы и дуализмы. Были указаны нерешенные задачи.

А. И. Старостин и А. Н. Фомин (Свердловск) в докладе «Некоторые вопросы теории конечных групп» рассказали о последних достижениях в этой области свердловских специалистов. Наиболее общий к настоящему времени результат по проблеме Тиммесфельда о группах, содержащих подгруппу некорневого типа (определение см. в [3]), получил А. А. Махнёв. Были приведены также теоремы А. А. Махнёва о TI-группах, существенно усиливающие некоторые результаты Ашбахера и Штельмахера. А. С. Кондратьев исследовал группы (все группы в этом докладе предполагаются конечными) с неразрешимой 2-локальной подгруппой H, в которой $O_2(H)$ имеет 2-ранг не более 3; его результаты интенсивно используются при изучении групп типа характеристики 2. Б. М. Веретенников описал группы G с централизатором инволюции z, являющимся расширением 2-группы Q с помощью $L_2(2^n)$, $n \geqslant 2$, причем $C_Q(x)$ — циклическая подгруппа из $Z(C(z))$ для элемента x порядка 3 из $C(z)$. В. И. Зенков описал класс квазипростых групп, у которых ранги пересечений силовских 2-подгрупп в централизаторах инволюций не превышают 3. А. П. Ильиных рассмотрел один из оставшихся случаев в изучении групп компонентного типа, а именно, когда стандартная подгруппа имеет центр порядка 2, фактор-группа по которому есть $\Omega_8^+(2)$. А. Н. Фомин доказал, что если G^Ω — простая неабелева группа подстановок, $|\Omega| = \alpha(G)$ и G содержит нормализаторно полную u-подгруппу U, для которой $s_1(U) = 1$ (определения см. в [10], [11]), то G изоморфна одной из групп M_{11}, M_{12}, A_n, $L_2(q)$, $Sz(q)$. Существенно продвинулся в исследовании транзитивных групп подстановок нечетной степени с разрешимым стабилизатором точки В. И. Трофимов.

11 сентября на заключительном пленарном заседании состоялся традиционный День проблем, открывшийся обзорным отчетным докладом Ю. И. Мерзлякова (Новосибирск) «О Коуровской тетради». Помимо упоминавшихся выше результатов, связанных с этим широко известным ныне сборником [2], отметим еще следующие достижения последних лет. Универсальная теория класса разрешимых групп неразрешима ([12], ответ на вопрос 1.30). Если группа G является произведением подгрупп A и B, каждая из которых нильпотентна с условием минимальности, то G разрешима и полные части подгрупп A и B поэлементно перестановочны ([13], ответ на 2.69). Построены бесконечные группы, все собственные подгруппы которых имеют простые порядки ([5], ответ на 2.73). Построена конечно-определенная группа с неразрешимой проблемой равенства, в которой выполняется нетривиальное тождество — трехступенная разрешимость ([12], ответ на 4.3). Проблема равенства для метабелевых групп алгоритмически разрешима ([4], ответ на 4.32). Бесконечная локально конечная группа, содержащая инволюцию с черниковским централизатором, почти локально разрешима, а потому не проста ([6], ответ на 4.36). Существует лишь конечное число неизоморфных полициклических групп с одним и тем же семейством конечных гомоморфных образов ([17], ответ на 4.53). Найдена зависимость ступени разрешимости конечной группы G, разлагающейся в произведение абелевой подгруппы A и нильпотентной подгруппы B, от ступени нильпотентности группы B и порядка ее коммутанта ([1], ответ на 4.58). Всякую финитно аппроксимируемую локально нормальную группу можно так вложить в декартово произведение конечных групп, что каждый элемент группы будет иметь не более конечного числа нецентральных проекций ([19], ответ на 6.8). Существуют сверхразрешимые группы нечетного порядка, все автоморфизмы которых внутренние ([18], ответ на 6.20). Множество квазитождеств, истинных в классе всех конечных групп, не допускает базиса от конечного числа переменных ([7], ответ на 6.43). Построен пример бесконечной конечно порожденной группы Фробениуса ([9], ответ на на 6.54). Всего со времени прошлого симпозиума, т. е. за два последних года, полностью решены около 40 вопросов «Коуровской тетради».

Выступившие затем в общей дискуссии специалисты поставили ряд новых актуальных проблем, относящихся ко всем основным разделам теории групп. Эти проблемы, а также комментарии к старым проблемам, уже получившим решение, будут опубликованы в седьмом издании «Коуровской тетради».

В связи с исполняющимся в 1980 г. 75-летием академика АН БССР С. А. Чунихина симпозиум направил ему приветственный адрес.

В свободное от заседаний время участники симпозиума посетили мемориальный комплекс и памятные места, связанные с пребыванием в Шушенском В. И. Ленина, а также совершили экскурсию на Саяно-Шушенскую ГЭС.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Зайцев. О произведениях групп.— Красноярск: 7-й Всесоюзн. симп. по теории групп, тезисы докладов, 1980, с. 38.

[2] Коуровская тетрадь.— Изд. 6-е, Новосибирск, 1978.

[3] А. А. Махнёв. О порождении конечных групп классами инволюций.— Матем. сб., 1980, **111**:2, с. 266—278.
[4] Г. А. Носков. О сопряженности в метабелевых группах.— Красноярск; 15-я Всесоюзн. алгебраич. конф., тезисы докладов, часть 1, 1979, с. 109.
[5] А. Ю. Ольшанский. Бесконечные группы с циклическими подгруппами.— ДАН, 1979, **245**:4, с. 785—787.
[6] И. И. Павлюк. О проблеме Кегеля и Верфрица.— Красноярск, 7-й Всесоюзн. симп. по теории групп, тезисы докладов, 1980, с. 83.
[7] А. К. Румянцев. О квазитождествах конечных групп.— Алгебра и логика, 1980, **19**:4, с. 67—74.
[8] 7-й Всесоюзный симпозиум по теории групп.— Красноярск: тезисы докладов, 1980.
[9] А. И. Созутов. Пример бесконечной конечно порожденной группы Фробениуса.— Красноярск: 7-й Всесоюзн. симп. по теории групп, тезисы докладов, 1980, с. 116.
[10] А. Н. Фомин. О простых подгруппах симметрических групп подстановок конечной степени.— Алгебра и логика, 1972, **11**:6, с. 724—730.
[11] А. Н. Фомин. Подстановочная характеризация некоторых групп Матье.— Алгебра и логика, 1979, **18**:2, с. 232—249.
[12] О. Г. Харлампович. Конечно определенная разрешимая группа с неразрешимой проблемой равенства.— Красноярск: 7-й Всесоюзн. симп. по теории групп, тезисы докладов, 1980, с. 131.
[13] Н. С. Черников. Бесконечные группы, факторизуемые нильпотентными подгруппами.— ДАН, 1980, **252**:1, с. 57—60.
[14] С. Н. Черников, Д. И. Зайцев. Шестой Всесоюзный симпозиум по теории групп.— УМН, 1979, **34**:4, с. 239—243.
[15] J. H. Conway, D. B. Wales. Construction of the Rudvalis group of order 145 926 144 000. Pasadena: Math. Sci. California Inst. Techn. 1972.
[16] U. Dempwolff. A characterization of the Rudvalis simple group of order $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$.— J. Algebra, 1974, **32**:1, p. 53—88.
[17] F. J. Grunewald, P. F. Pickel, D. Segal. Polycyclic groups with isomorphic finite quotients.— Ann. Math., 1980, **111**:1, p. 155—195.
[18] B. Hartley, D. J. S. Robinson. On finite complete groups.— Arch. Math. 1980, **35**:1, p. 67—74.
[19] M. J. Tomkinson. A characterization of residually finite periodic *FC*-groups.— Bull. London Math, Soc. (to appear).