В.А.Лифшиц

О КОНСТРУКТИВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ*)

В настоящей заметке формулируются определение понятия конструктивной аналитической функции одной вещественной переменной и некоторые теоремы об этих объектах. Предлагаемое понятие можно рассматривать как один из многих возможных конструктивных аналогов понятия аналитической функции вещественной переменной. В заметке используются обозначения и терминология работы [I] .

I. Термины "слово" и "алгорифм" применяются ниже для обозначения соответственно слов в алфавите

$$0\,1\,-\,/\,\diamond\,\Delta\,\nabla\,*\,,\,(\,)$$

и нормальных алгорифмов в стандартном расширении этого алфавита.

2. Введем несколько терминов, связанных с последовательностями дуплексов.

Если $\mathfrak{a}$ — последовательность дуплексов, то можно построить такую последовательность дуплексов $\mathfrak{b}$, что

$$\forall n\,(\mathfrak{b}(n)=\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{a}(i)).$$

---

*)Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 22 и 29 февраля 1968 года.

Такую последовательность $\mathfrak{b}$ будем называть последовательностью частичных сумм последовательности $\mathfrak{a}$. Если последовательность $\mathfrak{b}$ сходится, то будем говорить, что последовательность $\mathfrak{a}$ суммируема, причем предел последовательности $\mathfrak{b}$ будем называть суммой последовательности $\mathfrak{a}$.

Пусть m — положительное натуральное число. Будем говорить, что последовательность дуплексов $\mathfrak{a}$ m-суммируема, если

$$\forall i\,(|\mathfrak{a}(i)| \leq 2^{-m}(1-2^{-m})^{i}).$$

Если последовательность m-суммируема для некоторого m, то она суммируема; существует алгорифм, который по m-суммируемой последовательности и числу m строит дуплекс, равный ее сумме.

3. Вещественным аналитическим элементом будем называть слово вида

$$(z, \{\mathfrak{L}\}),$$

где z — дуплекс, $\mathfrak{L}$ — последовательность дуплексов. О вещественном аналитическом элементе $(z, \{\mathfrak{L}\})$ будем говорить, что он m-сходится в точке x (m — положительное натуральное число, x — дуплекс), если последовательность $\mathfrak{a}$, удовлетворяющая условию

$$\forall i\,(\mathfrak{a}(i) = \mathfrak{L}(i)(x-z)^{i}),$$

m-суммируема; будем говорить, что этот элемент сходится в точке x, если существует такое m, что он m-сходится в точке x. Сумму последовательности $\mathfrak{a}$ будем называть

значением этого элемента в точке x.

Можно построить алгорифм ω, удовлетворяющий следующему условию: каковы бы ни были вещественный аналитический элемент $Э$, положительное натуральное число m и дуплекс x, если $Э$ m-сходится в точке x, то алгорифм ω применим к слову

$$Э \square x \square m$$

и результатом его применения является дуплекс, равный значению $Э$ в точке x. Зафиксируем алгорифм ω, удовлетворяющий этому условию.

О вещественных аналитических элементах $Э_1$ и $Э_2$ и множестве $\mathcal{M}$ дуплексов будем говорить, что $Э_1$ и $Э_2$ согласованы на $\mathcal{M}$, если каков бы ни был дуплекс x из $\mathcal{M}$, такой что оба элемента $Э_1$ и $Э_2$ сходятся в точке x, то их значения в точке x совпадают.

4. Аналитическим покрытием сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$ будем называть произвольное слово вида

$$(x_0 * x_1 * \ldots * x_{n-1} * x_n, Э_1, \ldots, Э_n, m),$$

где $m, n > 0$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ — дуплексы, $Э_1, \ldots, Э_n$ — вещественные аналитические элементы, для которых

1) $x_0 < \underline{x} < x_1 < \cdots < x_{n-1} < \overline{x} < x_n$;

2) каково бы ни было i $(1 \leq i \leq n)$, элемент $Э_i$ m-сходится во всех точках сегмента $x_{i-1} \Delta x_i$;

3) элементы $Э_i$ $(1 \leq i \leq n)$ попарно согласованы на сегменте $\underline{x} \Delta \overline{x}$.

Заметим, что в этом определении не исключается случай вырожденного сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$; очевидно, в этом случае $n = 1$.

Два аналитических покрытия (возможно, разных сегментов) будем называть *согласованными*, если входящие в них аналитические элементы попарно согласованы на объединении этих сегментов.

5. Определение. *Конструктивной аналитической функцией одной вещественной переменной* будем называть слово вида

$$*\{\vartheta\},$$

где ϑ – алгорифм, удовлетворяющий следующим условиям:

1) ϑ применим к сегменту тогда и только тогда, когда он применим к каждому его вырожденному подсегменту;

2) если ϑ применим к сегменту, то результатом применения является аналитическое покрытие этого сегмента;

3) каждым двум сегментам, к которым алгорифм ϑ применим, он ставит в соответствие согласованные покрытия.

Ниже мы будем сокращать только что введенный термин и писать просто "аналитическая функция".

Алгорифм ϑ будем называть *основой* аналитической функции $*\{\vartheta\}$. Основу аналитической функции f будем обозначать посредством $\underline{f}$.

Теперь каждой аналитической функции f поставим в соответствие функцию $\hat{f}$ типа $(\Delta \dot{\to} \Delta)$ следующим образом: каков бы ни был дуплекс x , пусть $\hat{f}(x)$ есть

$$\omega(\exists \square x \square m),$$

где $\mathfrak{Э}$ и m - соответственно второй и третий члены аналитического покрытия $\underset{\smile}{f}(x \Delta x)$.

Описанное отображение множества аналитических функций в множество функций типа $(\Delta \dot{\to} \Delta)$ позволяет перенести на аналитические функции терминологию, введенную для функций типа $(\Delta \dot{\to} \Delta)$. В частности, под значением аналитической функции f в точке x мы будем понимать значение функции $\hat{f}$ в точке x; будем говорить, что аналитическая функция определена, (ограничена, равномерно непрерывна и т.п.) на сегменте $\underline{x} \Delta \overline{x}$, если этим свойством обладает функция $\hat{f}$. Таким же образом на аналитические функции переносится предикат " y есть значение производной от функции φ в точке x ", определенный в работе [2].

Очевидно, аналитическая функция определена на сегменте (т.е. во всех его точках) тогда и только тогда, когда к этому сегменту применим алгорифм, являющийся ее основой.

6. Теорема 1. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x} \Delta \overline{x}$ и аналитическая функция f, определенная на этом сегменте, f удовлетворяет на $\underline{x} \Delta \overline{x}$ условию Липшица, т.е. можно построить такой дуплекс K, что

$$\forall x_1 x_2 (\underline{x} \leq x_1, x_2 \leq \overline{x} \supset |\hat{f}(x_1) - \hat{f}(x_2)| < K \cdot |x_1 - x_2|).$$

Следовательно, аналитическая функция равномерно непрерывна и ограничена на каждом сегменте, на котором она определена.

7. В следующих теоремах f, g и h - переменные для аналитических функций.

Теорема 2. $\forall f g \exists h \forall x (\hat{h}(x) \simeq \hat{f}(x) \sigma \hat{g}(x))$, где σ — любой из знаков $+, -, \cdot, :$.

Теорема 3. $\forall f g \exists h \forall x (\hat{h}(x) \simeq \hat{f}(\hat{g}(x)))$.

8. Теорема 4. Какова бы ни была аналитическая функция f, можно построить аналитическую функцию g с той же областью определения, что и f, удовлетворяющую следующему условию:

(α) каков бы ни был дуплекс x, принадлежащий области определения f, $\hat{g}(x)$ есть значение производной от функции f в точке x.

Такую аналитическую функцию g назовем аналитической производной от f. В соответствии с конструктивным пониманием математических суждений, теорема 4 утверждает существование алгорифма, сопоставляющего каждой аналитической функции ее аналитическую производную.

Рассмотрим утверждение, получающееся из теоремы 4 в результате замены условия (α) на условие

(β) каков бы ни был дуплекс x, принадлежащий области определения f, $\hat{f}(x)$ есть значение производной от функции g в точке x.

Полученное таким образом утверждение неверно (и, более того, может быть опровергнуто на примере). Однако можно установить справедливость соответствующего утверждения для функций, имеющих

не слишком "экзотические" области определения. Об алгорифме $\mathfrak{E}$ и множестве $\mathcal{M}$ дуплексов будем говорить, что $\mathfrak{E}$ перечисляет компоненты связности $\mathcal{M}$, если

1) $\forall mn((!\mathfrak{E}(n) \& m<n) \supset !\mathfrak{E}(m))$;

2) $\forall n(!\mathfrak{E}(n) \supset \mathfrak{E}(n) \in \mathcal{M})$;

3) $\forall x(x \in \mathcal{M} \supset \exists n(!\mathfrak{E}(n) \&$

$\& (\mathfrak{E}(n) \leq x \supset \forall y(\mathfrak{E}(n) \leq y \leq x \supset y \in \mathcal{M})) \&$

$\& (x \leq \mathfrak{E}(n) \supset \forall y(x \leq y \leq \mathfrak{E}(n) \supset y \in \mathcal{M}))))$;

4) $\forall mn((!\mathfrak{E}(m) \& !\mathfrak{E}(n) \& m \neq n) \supset$

$\supset \neg \forall y(\mathfrak{E}(m) \leq y \leq \mathfrak{E}(n) \supset y \in \mathcal{M}))$.

<u>Теорема 5</u>. Какова бы ни была аналитическая функция f, если существует алгорифм, перечисляющий компоненты связности области определения функции f, то можно построить аналитическую функцию g ("аналитическую первообразную от f") с той же областью определения, что и f, удовлетворяющую условию (β).

Если $\mathcal{M}$ – область определения некоторой аналитической функции, то свойство "алгорифм $\mathfrak{E}$ перечисляет компоненты связности $\mathcal{M}$" эквивалентно нормальной формуле; поэтому, в соответ-

ствии с конструктивным пониманием математических суждений, из теоремы вытекает существование алгорифма, строящего первообразную от f по самой функции f и алгорифму, перечисляющему компонентны связности ее области определения*).

Теорему 5 можно усилить, потребовав дополнительно от функции g, чтобы она в точках $\mathcal{E}(n)$ принимала произвольно заданные значения; таким образом, для аналитических функций рассматриваемого типа положение вещей совершенно аналогично тому, с которым мы встречаемся в классическом анализе.

Заметим также, что существует алгорифм вычисления определенного интеграла от аналитической функции на сегменте (имеется в виду определение понятия интеграла, основанное на понятии первообразной).

9. Теорема 6. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x}\Delta\overline{x}$ и аналитическая функция f, определенная на этом сегменте, если множество нулей функции f на $\underline{x}\Delta\overline{x}$ инфинитно**), то функция f тождественно равна нулю на $\underline{x}\Delta\overline{x}$.

---

*) Второе из этих двух исходных данных необходимо: невозможен алгорифм, применимый к каждой аналитической функции, определенной на интервале $-1\nabla 1$ или на объединении интервалов $-1\nabla 0, 0\nabla 1$ и строящий ее аналитическую первообразную.

**) Множество $\mathcal{M}$ дуплексов называется финитным, если существует такой список $x_1,\ldots,x_n$ дуплексов, что $\forall x(x\in\mathcal{M}\equiv\bigvee_{i=1}^{n}(x=x_i))$ и инфинитным в противном случае.

Из последнего утверждения и теоремы 4.9 работы [3] вытекает

Теорема 7. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x}\Delta\overline{x}$ и аналитическая функция f, определенная на этом сегменте,

$$\forall y(f(\underline{x})<y<f(\overline{x})\supset\exists x(\underline{x}<x<\overline{x}\ \&\ f(x)=y)).$$

10. И.Д.Заславский в работе [4] построил пример конструктивной функции, равномерно непрерывной на сегменте и не принимающей значения, равного ее точной верхней границе. Следующая теорема показывает, что аналитическая функция, обладающая этим свойством, невозможна.

Теорема 8. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x}\Delta\overline{x}$ и аналитическая функция f, определенная на этом сегменте,

$$\neg\neg\exists x^*(\underline{x}\leq x^*\leq\overline{x}\ \&\ \forall x(\underline{x}\leq x\leq\overline{x}\supset f(x)\leq f(x^*))).$$

В классическом анализе доказывается, что непрерывная функция вещественной переменной переводит сегмент в сегмент. Следующую теорему можно рассматривать как конструктивный аналог этого утверждения для аналитических функций.

Теорема 9. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x}\Delta\overline{x}$ и аналитическая функция f, определенная на этом сегменте, можно построить сегмент $\underline{y}\Delta\overline{y}$, такой что

$$\forall y(\underline{y} \leq y \leq \overline{y} \equiv \neg\neg\exists x(\underline{x} \leq x \leq \overline{x} \,\&\, y = f(x))).$$

11. Остановимся еще на вопросе о корнях аналитических функций. Из теоремы 8 нетрудно вывести, что если аналитическая функция, определенная на некотором сегменте, не имеет на нем корней, то ее значения можно оценить снизу по модулю положительной константой; поэтому аналитическая функция, принимающая на сегменте сколь угодно малые значения, не может не иметь на нем корня.

Теорема 10. Можно построить алгорифм, применимый к паре $\underline{x} \Delta \overline{x} \square f$ (где f – аналитическая функция, определенная на сегменте $\underline{x} \Delta \overline{x}$), тогда и только тогда, когда f не имеет корней на $\underline{x} \Delta \overline{x}$.

Теорема 11. Можно построить алгорифм, применимый к каждой паре $\underline{x} \Delta \overline{x} \square f$ (где f – аналитическая функция, определенная на сегменте $\underline{x} \Delta \overline{x}$ и имеющая на нем точно один корень), результатом применения которого к такой паре является корень аналитической функции f, принадлежащий сегменту $\underline{x} \Delta \overline{x}$.

В заключение выражаю глубокую благодарность Н.А.Шанину, а также участникам Ленинградского семинара по конструктивной математике, за обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 15-294.
2. Цейтин Г.С. Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 362-384.
3. Оревков В.П. Некоторые вопросы теории полиномов с конструктивными вещественными коэффициентами. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", 1964, 72, 462-487.
4. Заславский И.Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 385-457.