Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. A. Kuznetsov, M. M. Yakupov, Фазовое пространство задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости,
Vestnik Chelyabinsk. Gos. Univ., 2002, Issue 6, 92–103

https://www.mathnet.ru/eng/vchgu162

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
December 7, 2025, 09:04:30

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г.А. Кузнецов, М.М. Якупов *
Челябинский государственный университет

Рассмотрена задача Коши — Дирихле для системы уравнений, моделирующей термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости. Показано, что фазовое пространство задачи является простым банаховым C^∞–многообразием.

Ключевые слова: *уравнение соболевского типа, фазовое пространство, относительный спектр, относительная p–секториальность.*

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x)\ ,\ T(x,0) = T_0(x)\ ,\ x \in \Omega\ , \tag{0.1}$$

$$\vec{v}(x,t) = 0\ ,\ T(x,t) = 0\ ,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{0.2}$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} &(1-\kappa\nabla^2)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\nabla^2\vec{v} - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \nabla p + g\gamma\alpha T\ , \\ &0 = \nabla\cdot\vec{v}\ , \\ &\frac{\partial T}{\partial t} = \delta\nabla^2 T - (\vec{v}\cdot\nabla T) + (\vec{v}\cdot\gamma)\ , \end{aligned} \tag{0.3}$$

которая моделирует эволюцию скорости $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$, давления $p = p(x,t)$ и температуры $T = T(x,t)$ простейшей несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта.

Система уравнений (0.3) получена как гибрид системы уравнений Осколкова [1] и уравнения теплопроводности в приближении Обербека — Буссинеска. Здесь параметры $\nu, \alpha, \delta \in \mathbb{R}_+$ соответствуют вязкости, тепловому расширению и температуропроводности жидкости, g — ускорение свободного падения, а вектор $\gamma = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Параметр $\kappa \in \mathbb{R}$

* Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования РФ по направлению "Математика" № 27

характеризует упругие свойства жидкости. (Обсуждение отрицательных значений параметра κ см. в [2]).

Впервые задача (0.1)–(0.3) была рассмотрена в [3] с использованием классической техники проектирования на подпространство соленоидальных функций [4; 5]. Полученные результаты дают информацию о локальном устройстве фазового пространства. Между тем в последнее время появились работы [6; 7], позволяющие надеяться на получение более полной информации. Настоящая статья содержит вывод о том, что фазовым пространством задачи (0.2), (0.3) является простое банахово C^∞-многообразие. В основе метода исследования лежат идеи, впервые изложенные в [8], а затем развитые в [9; 10].

1. Постановка задачи

Прежде чем приступить к исследованию задачи (0.1) – (0.3), заменим уравнение несжимаемости $0 = \nabla \cdot \vec{v}$ уравнениями $0 = \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$. Отметим, что мы получим систему уравнений, эквивалентную исходной. Кроме того, положим $\nabla p = \vec{p}$ и в дальнейшем будем искать вектор $\vec{p}$. Основанием этой замены служит замечание [11], что во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления.

Итак, рассмотрим задачу (0.1), (0.2) для системы Осколкова в приближении Обербека — Буссинеска, представленную в виде

$$\begin{aligned} &(1-\kappa\nabla^2)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\nabla^2\vec{v} - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \vec{p} + g\gamma\alpha T\,, \\ &0 = \nabla(\nabla\cdot\vec{v})\,, \\ &\frac{\partial T}{\partial t} = \delta\nabla^2 T - (\vec{v}\cdot\nabla T) + (\vec{v}\cdot\gamma)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Прежде всего редуцируем задачу (0.1), (0.2), (1.1) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.2}$$

для операторного дифференциального уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u)\,. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_N$, $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (L,p)-секториален, а оператор $N \in C^\infty(\mathcal{U}_N;\mathcal{F})$, причем $\mathcal{U}_N \in [\mathcal{U}, \operatorname{dom} M]_\alpha$, $\alpha \in [0,1)$ — некоторое интерполяционное пространство, а линеал $\operatorname{dom} M \subset \mathcal{U}$ снабжен “нормой графика”. Относительно обозначений, терминологии и библиографии см. [12].

Обозначим через $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n, \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ и $\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$ пространства вектор-функций $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, определенных в области Ω. Рассмотрим линеал $\mathcal{L} = \{\vec{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot \vec{v} = 0\}$ вектор-функций, соленоидальных и финитных в области Ω. Замыкание $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}^2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Пространство $\mathbb{H}_\sigma$ — гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, унаследованным от $\mathbb{L}^2$, кроме того, существует расщепление $\mathbb{L}^2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор. Сужение проектора Π на подпространство $\mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1$ является непрерывным оператором $\Pi : \mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 \to \mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1$. Представим поэтому пространство $\mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1$ в виде прямой суммы $\mathbb{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\pi^2$ — образ $\operatorname{im} \Pi$, а $\mathbb{H}_\sigma^2$ — $\ker \Pi$. Имеют место непрерывные плотные вложения $\mathbb{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\pi$. Пространство $\mathbb{H}_\pi^2$ состоит из вектор-функций $\vec{v}$, равных нулю на $\partial\Omega$ и являющихся градиентами функций из $W_2^3(\Omega)$.

ЛЕММА 1.1. *Формулой* $A = \operatorname{diag}\{-\nabla^2, \ldots, -\nabla^2\} : \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \to \mathbb{L}^2$ *задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$, *сгущающимся лишь на* $+\infty$.

Доказательство леммы есть в [13]. Из [14] извлечем следующий результат.

ЛЕММА 1.2. *Формулой* $B : \vec{v} \to \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ *задается линейный непрерывный сюръективный оператор* $B : \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \to \mathbb{H}_\pi$ *с ядром* $\ker B = \mathbb{H}_\sigma^2$.

Положим $\Sigma = \mathbb{I} - \Pi$ и обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbb{H}_\sigma^2$. В силу леммы 1.1 оператор $A_\sigma : \mathbb{H}_\sigma^2 \to \mathbb{H}_\sigma$ линеен и непрерывен, причем его спектр $\sigma(A_\sigma)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Пусть $\{\varphi_k\}$ — семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{H}_\sigma$ собственных функций оператора A_σ, занумерованное по возрастанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности. Тогда

$$\Sigma\Big(\mu\mathbb{I} + (\mu\kappa + \nu)A\Big) = \mu\Sigma + (\mu\kappa + \nu)A_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mu + (\mu\kappa + \nu)\lambda_k\Big)\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k\,,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$. Пусть $\mu \neq -\nu\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда существует непрерывный оператор

$$\Big(\mu\Sigma + (\mu\kappa + \nu)A_\sigma\Big)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mu + (\mu\kappa + \nu)\lambda_k\Big)^{-1}\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k\,,$$

который мы для краткости обозначим через $A_{\sigma\mu}^{-1}$.

Далее заметим, что оператор $\Pi A \Sigma \equiv \mathbb{O}$. Действительно, пусть вектор $\vec{v} \in \mathcal{L}$, тогда очевидно $(\nabla \cdot A\vec{v}) = \nabla^2(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$. На пространство $\mathbb{H}^2_\sigma$ это равенство распространяется "по непрерывности". Обозначим через B сужение оператора B на $\mathbb{H}^2_\pi$. В силу леммы 2.2 и теоремы Банаха существует оператор $\widetilde{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\pi; \mathbb{H}^2_\pi)$, причем $B\tilde{B}^{-1} = \Pi$ и $\tilde{B}^{-1}B = \Pi$, хотя оба оператора заданы в различных пространствах.

Аналогично, нетрудно показать, что $\Sigma \Pi A \equiv \mathbb{O}$.

Обозначим через $A_{\pi\mu}$ сужение оператора $\Pi(\mu\mathbb{I} + (\mu\kappa + \nu)A)$ на $\mathbb{H}^2_\pi$.

Введем в рассмотрение пространства $\mathbb{H}_\Theta = L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ и $\mathbb{H}^2_\Theta = \left(W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\right)^n$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_\Theta$ и $\mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_\Theta$, $\mathbb{H}_p \equiv \mathbb{H}_\pi$. Элементы $u \in \mathcal{U}$ и $f \in \mathcal{F}$ имеют вид соответственно $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p, u_\Theta)$ и $f = (f_\sigma, f_\pi, f_p, f_\Theta)$.

ЛЕММА 1.3. *(i) Формулой*

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma(\mathbb{I} + \kappa A) & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Pi(\mathbb{I} + \kappa A) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

задается оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. *Если* $-\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, *то* $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p \times \{0\}$, *а* $\operatorname{im} L = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\} \times \mathbb{H}_\Theta$.

(ii) Формулой

$$M = \begin{pmatrix} -\nu\Sigma A & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\nu\Pi A & -\Pi & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -B & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \delta\Delta \end{pmatrix}$$

задается линейный замкнутый плотно определенный оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$, $\operatorname{dom} M = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}^2_\Theta$.

С учетом изложенного выше доказательство леммы 1.3 очевидно.

Построим пространство $\mathcal{U}_N = \mathbb{H}^1_\sigma \times \mathbb{H}^1_\pi \times \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_\Theta$, где $\mathbb{H}^1_\sigma = \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 \cap \mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}^1_\pi = \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^1 \cap \mathbb{H}_\pi$.

ЛЕММА 1.4. *Формулой*

$$N : (u_\sigma + u_\pi) \to \begin{pmatrix} \Sigma((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \alpha g \Sigma g(\gamma \cdot u_\Theta) \\ \Pi((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \alpha g \Pi g(\gamma \cdot u_\Theta) \\ 0 \\ ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla u_\Theta) + \gamma \cdot (u_\sigma + u_\pi))) \end{pmatrix}$$

задается оператор $N \in C^\infty(\mathcal{U}_N; \mathcal{F})$.

Действительно, при любом векторе $(u_\sigma + u_\pi) \in \mathcal{U}_N$ производная Фреше $N'_{(u_\sigma+u_\pi)}$ оператора N имеет вид

$$N'_{(u_\sigma+u_\pi)}v = \begin{pmatrix} \Sigma((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)v_\sigma + \Sigma(v_\sigma\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \alpha g\Sigma\gamma(\gamma\cdot v_\Theta) \\ \Pi((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)v_\pi + \Sigma(v_\pi\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \alpha\Pi\gamma(\gamma\cdot v_\Theta) \\ 0 \\ ((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla v_\Theta) + (v\cdot\nabla u_\Theta) + (\gamma\cdot(v_\sigma + v_\pi) \end{pmatrix}.$$

Итак, редукция задачи (0.1) – (0.2) для системы (1.1) к задаче (1.2) для уравнения (1.3) закончена.

2. Относительная 1-секториальность дифференциальных операторов

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), а оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

В общем случае необратимости оператора L удается показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому множество $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Наряду с оператор-функцией $(\mu L - M)^{-1}$, называемой *L-резольвентой* оператора M, введем в рассмотрение оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, которые в дальнейшем будем называть *правой и левой L-резольвентами* оператора M. По последним построим *правую и левую (L,p)-резольвенты* оператора M: $R^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi^p_{q=0}R^L_{\mu_q}(M)$ и $L^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi^p_{q=0}L^L_{\mu_q}(M)$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Тогда при любом $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$*

(i) $\ker R^L_{(\lambda,p)}(M) = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\quad \operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$;

(ii) $\ker L^L_{(\lambda,p)}(M) = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$, $\quad \operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$

при всех $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ и $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ из $(\rho^L(M))^{p+1}$.

Обозначим через $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через L_0 (M_0) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$). Как нетрудно убедиться, оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, а оператор $M_0 \in Cl(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Оператор M называется *секториальным степени* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ относительно оператора L (короче, (L,p)-*секториальным*), если существуют константы $K > 0, a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

причем

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\right\} \leq \frac{K}{\Pi^p_{q=0}|\mu_q - a|}$$

при всех $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \left(S^L_{a,\Theta}(M)\right)^{p+1}$.

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то из *секториальности* [15] оператора $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) следует (L,p)-секториальность оператора M. При $p = 0$ справедливо и обратное утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.*

Положим $G = M_0^{-1}L_0, H = L_0M_0^{-1}$. Операторы $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0), H \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$ по построению.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *В условиях леммы 2.2 операторы G и H нильпотентны степени не выше p.*

Обозначим замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $\left(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)\right)$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$ через $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.

ЛЕММА 2.3. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = u \quad \forall u \in \mathcal{U}^1; \qquad \lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}^1.$$

Из леммы 2.3 непосредственно вытекает, что $\mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}^1 = \{0\}$ и $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1 = \{0\}$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{U}}$ $(\widetilde{\mathcal{F}})$ замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.*

ТЕОРЕМА 2.2. (Yagi, Федоров). *Пусть оператор M (L,p)-секториален, а пространство $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$ рефлексивно. Тогда $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ $(\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F})$.*

Обратимся теперь к уравнению $L\dot{u} = Mu$. Пусть $\rho^L \neq \emptyset$, тогда это уравнение тривиально редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{2.1}$$
$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{2.2}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Поскольку $(\alpha L - M)^{-1}M = \alpha R^L_\alpha(M) - I$ и $M(\alpha L - M)^{-1} = \alpha L^L_\alpha(M) - I$, то операторы $(\alpha L - M)^{-1}M$ и $M(\alpha L - M)^{-1}$ можно единственным образом продолжить до непрерывных операторов, определенных на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно. Поэтому уравнения (2.1) и (2.2) можно рассматривать как конкретные интерпретации абстрактного уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.3}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — некоторое банахово пространство. Вектор-функцию $v = v(t)$ назовем *решением* уравнения (2.3), если $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$ и v удовлетворяет (2.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отображение $V^\cdot \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* уравнения (2.3), если

(i) $V^t \cdot V^s = V^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $\forall v_0 \in \mathcal{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ удовлетворяет уравнению (2.3).

Полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *аналитической*, если она аналитично продолжима в некоторый сектор, содержащий полуось $\mathbb{R}_+$, и *равномерно ограниченной*, если

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \text{const}, \quad t \in (0, T), \quad \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть оператор M (L, p)-секториален. Тогда существуют аналитические и равномерно ограниченные полугруппы разрешающих операторов уравнений* (2.1) *и* (2.2).

Пусть $\Gamma \subset S^L_{a,\Theta}(M)$ – контур такой, что $\arg\mu \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$. Тогда искомые полугруппы задаются формулами

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{2.4}$$
$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu \tag{2.5}$$

соответственно при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Как нетрудно заметить, операторы U^t и F^t имеют ядра,

$$\ker U^t \supset \ker R^L_\alpha(M) \quad \text{и} \quad \ker F^t \supset \ker L^L_\alpha(M)\,, \quad \alpha \in \rho^L(M)\,.$$

Поэтому в дальнейшем будут необходимы следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическая полугруппа разрешающих операторов уравнения (2.3). Тогда множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \exists t \in \mathbb{R}_+ \;\; V^t v = 0\}$ будем называть *ядром*, а множество $\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v\}$ — *образом* полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

$$\ker U^\bullet = \mathcal{U}^0,\ \operatorname{im} U^\bullet = \mathcal{U}^1,\ \ker F^\bullet = \mathcal{F}^0,\ \operatorname{im} F^\bullet = \mathcal{F}^1.$$

Теперь приложим абстрактные результаты к операторам L и M, построенным в п.1.

ТЕОРЕМА 2.5. *При любых $\alpha, \nu, g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$ и $\delta \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L,1)$-секториален, и существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Доказательство проводится аналогично [9] и заключается в построении правой и левой $(L,1)$-резольвент оператора M и проверке определения 2.1.

3. Квазистационарные полутраектории

Обратимся к задаче (1.2), (1.3). Пусть оператор M (L,p)-секториален, а пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ рефлексивны, тогда уравнение (1.3) редуцируется к системе уравнений

$$L_0\dot{u}^0 = M_0 u^0 + (I-Q)N(u^0+u^1)\,, \tag{3.1}$$

$$L_1\dot{u}^1 = M_1 u^1 + QN(u^0+u^1)\,, \tag{3.2}$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$, проекторы P и Q являются единицами полугрупп (2.4) и (2.5) соответственно.

Пусть существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$, тогда оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathcal{U}^1)$, $\operatorname{dom} S = \mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M$ секториален. Пусть $S_1 = S - b\mathbb{I}$, где $b > a$, a — константа из определения 2.1. Очевидно, оператор $S_1 \in Cl(\mathcal{U}^1)$ секториален, $\operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} S$. Пусть $\alpha > 0$, определим оператор

$$S_1^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{S_1 t} dt\,,$$

где $\{e^{S_1 t} : t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором S_1. Оператор $S_1^{-\alpha} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$, причем образ $\operatorname{im} S_1^{-\alpha}$ плотен в $\mathcal{U}^1$. Если $\alpha = 1$, то S_1^{-1} — обратный оператор к оператору S_1.

Далее, определим оператор S_1^{α} как обратный к оператору $S_1^{-\alpha}$, $\operatorname{dom} S_1^{\alpha} = \operatorname{im} S_1^{-\alpha}$. Оператор $S_1^{\alpha} : \operatorname{dom} S_1^{\alpha} \to \mathcal{U}^1$ замкнут и плотно определен. При $\alpha = 1$ оператор $S_1^1 = S_1$. Положим $S_1^0 = \mathbb{I}$. Заметим, что линеал $\operatorname{dom} S_1^{\alpha}$, снабженный нормой графика $\|\cdot\|_{\mathcal{U},\alpha} = \|S_1^{\alpha}\cdot\|_{\mathcal{U}}$, будет банаховым пространством, плотным в $\mathcal{U}^1$. Обозначим это пространство через $\mathcal{U}_{\alpha}^1$. Отметим, что вложение $\mathcal{U}_{\beta}^1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{\alpha}^1$ будет непрерывным, если $\beta \geq \alpha$.

Аналогично оператору $S_1^{-\alpha}$ построим оператор $T_1^{-\alpha}$, где оператор $T_1 = a\mathbb{I} - T$, а оператор $T = M_1 L_1^{-1} \in Cl(\mathcal{F}^1)$ секториален. Пользуясь оператором $T_1^{-\alpha}$, построим пространства $\mathcal{F}_{\alpha}^1$, $\alpha \geq 0$. Покажем, что при любом $\alpha \geq 0$ оператор L_1 является топлинейным изоморфизмом банаховых пространств $\mathcal{U}_{\alpha}^1$ и $\mathcal{F}_{\alpha}^1$. Действительно,

$$L_1 S_1^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} dt \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L_1 \left((\mu+\alpha)\mathbb{I} - L_1^{-1} M_1\right)^{-1} e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} dt \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left((\mu+\alpha)\mathbb{I} - M_1 L_1^{-1}\right)^{-1} e^{\mu t} d\mu = T_1^{-\alpha} L_1 \,.$$

Отсюда $T_1^{\alpha} L_1 = L_1 S_1^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$. И если вектор $u \in \mathcal{U}^{\alpha}$, то для вектора $f = L_1 u$ имеем

$$\|f\|_{\mathcal{F},\alpha} = \|T_1^{\alpha} L_1 u\|_{\mathcal{F}} \leq \|L_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)} \|u\|_{\mathcal{U},\alpha} \,.$$

Если вектор $f \in \mathcal{F}_{\alpha}^1$, то включение $L_1^{-1} f \in \mathcal{U}_{\alpha}^1$ доказывается аналогично.

Теперь обозначим через $\mathcal{U}_1^0$ линеал $\operatorname{dom} M_0$, снабженный нормой графика $|||\cdot||| = \|\cdot\|_{\mathcal{U}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{F}}$, и построим пространства $\mathcal{U}_{\alpha} = \mathcal{U}_1^0 \oplus \mathcal{U}_{\alpha}^1$. Очевидны плотные и непрерывные вложения $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_{\alpha} \subset \mathcal{U}_0$ при $\alpha \in [0,1]$, где $\mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}$, а $\mathcal{U}_1$ — линеал $\operatorname{dom} M$, снабженный нормой $|||\cdot|||$. Вектор-функцию $u \in C([0,t_0);\mathcal{U}_{\alpha})$ назовем *решением задачи* (1.2), (1.3), если она удовлетворяет уравнению (1.3) на $(0,t_0)$ и условию (1.2). Решение $u = u(t)$ задачи (1.2), (1.3) называется *квазистационарной полутраекторией*, если $L_0 \dot{u}^0(t) = 0$ при всех $t \in [0,t_0)$. Рассмотрение квазистационарных полутраекторий связано с тем, что даже в частных случаях [16] решение задачи (1.2), (1.3) может быть не единственным.

Начнем поиск квазистационарных траекторий уравнения (1.3). Пусть пространство $\mathcal{U}^0$ распадается в прямую сумму $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}^{00} \oplus \mathcal{U}^{01}$, где $\mathcal{U}^{00} = \ker L$, а $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ — некоторое алгебраическое и топологическое дополнение. Пусть существует вектор $u_0^{01} \in \mathcal{U}^{00}$ такой, что уравнение (3.1) имеет вид

$$0 = M_0(u^{00} + u_0^{01}) + (I - Q)N(u^{00} + u_0^{01} + u^1) \tag{3.3}$$

при всех $u^{00} \in \mathcal{U}^{00}$ и $u^1 \in \mathcal{U}^1_\alpha$. Обозначим через P_{00} (P_{01}) проектор на $\mathcal{U}^{00}$ ($\mathcal{U}^{01}$) вдоль $\mathcal{U}^{01} \oplus \mathcal{U}^1_\alpha$ ($\mathcal{U}^{00} \oplus \mathcal{U}^1_\alpha$). Тогда уравнение (3.3) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$0 = u^{00} + P_{00} M_0^{-1}(I - Q) N(u^{00} + u^{01} + u^1)\,, \tag{3.4}$$

$$0 = u^{01} + P_{01} M_0^{-1}(I - Q) N(u^{00} + u^{01} + u^1) \tag{3.5}$$

в силу леммы 2.2.

Пусть, далее, уравнение (3.5) удовлетворяется при всех $u^{00} \in \mathcal{U}^{00}$ и $u^1 \in \mathcal{U}^1_\alpha$ тождественно. Положим

$$F(u^{00} + u^1) \equiv P_{00} M_0^{-1}(I - Q) N(u^{00} + u^{01} + u^1)\,.$$

Предположим, что существует вектор $u_0^{00} \in \mathcal{U}^{00}$ такой, что

$$\|F_0'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} < 1\,, \tag{3.6}$$

где F_0' — "частная" производная Фреше оператора $F \in C^\infty(\mathcal{U}^{00} \oplus \mathcal{U}^1_\alpha; \mathcal{U}^{00})$ в точке u_0^{00}. Тогда в силу теоремы о неявной функции существует оператор $\Phi \in C^\infty(O_0^1, O_0^0)$ такой, что уравнение $u^{00} = \Phi(u^1)$ эквивалентно уравнению (3.4). Здесь $u^{00} \in O_0^0$, $u^1 \in O_0^1$, $O_0^0 \subset \mathcal{U}^{00}$ — некоторая окрестность точки u_0^{00}, а $O_0^1 \subset \mathcal{U}^1_\alpha$ — некоторая окрестность точки u_0^{01}.

Благодаря оператору Φ уравнение (3.2) в окрестности O_0^1 будет эквивалентно уравнению

$$\dot{u}^1 = S_1 u^1 + G(u^1)\,, \tag{3.7}$$

где оператор $G(u^1) = L_1^{-1} Q N(u_0^{01} + u^1 + \Phi(u^1))$, $G \in C^\infty(O_0^1, \mathcal{U}^1)$. Разрешимость задачи Коши для уравнения (3.7) — классический результат [15]. Нетрудно видеть, что вектор-функция $u(t) = u^{00}(t) + u_0^{01} + u^1(t)$ является решением задачи (1.2), (1.3) и, кроме того, квазистационарной полутраекторией. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ рефлексивны. Пусть оператор M (L,p)-секториален и существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$. Пусть пространство $\mathcal{U}^0$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}^{00} \oplus \mathcal{U}^{01}$, где $\mathcal{U}^{00} = \ker L$. Тогда для любого*

$$u_0 \in \mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U} : (I - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$$

такого, что в некоторой окрестности $O_0^0 \oplus O_0^1$ уравнение (3.5) выполняется тождественно и имеет место неравенство (3.6), существует единственное решение задачи (1.2), (1.3), являющееся квазистационарной полутраекторией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.3), если

(i) любое решение уравнения (1.3) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $u(t) \in \mathcal{P}$ при всех $t \in [0, \tau)$ и некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (1.2), (1.3).

В условиях теоремы 3.1 множество $\mathcal{M}$ с очевидностью является кандидатом на роль фазового пространства уравнения (1.3). Далее мы изучим морфологию (т.е. форму, структуру, строение) множества $\mathcal{M}$ для задачи (0.1), (0.2), (1.1).

4. Морфология фазового пространства

Начнем с проверки условий теоремы 3.1 для конкретных операторов L, M и N, определенных в п.1. Отметим сразу, что требование рефлексивности ввиду гильбертовости построенных там пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ с очевидностью выполняется. Далее, требование $(L, 1)$-секториальности оператора M и существование оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ установлено в теореме 2.5. Поскольку $\mathcal{U}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p \times \{0\}$, а $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p \times \{0\}$, то естественно положить $\mathcal{U}^{01} = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\} \times \{0\}$.

Теперь выпишем множество

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U} : (I - Q)(Mu + N(u)) = 0\} =$$

$$= \{u \in \mathcal{U} : -\nu \Pi A u_\pi - u_p + \alpha g \Pi \gamma (\gamma \cdot u_\Theta) + \Pi((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) = 0,\ B u_\pi = 0\}\,.$$

Отсюда с очевидностью вытекает, что уравнение (3.5) (в нашем случае это уравнение $Bu_\pi = 0$) тождественно выполняется только при условии $u_\pi = 0$. Поэтому множество $\mathcal{M}$ приобретает вид

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U} : u_p = \Pi(u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \alpha g \Pi \gamma (\gamma \cdot u_\Theta),\ u_\pi = 0\}\,.$$

Далее обратимся к уравнению (3.4), которое в нашем случае имеет вид

$$u_p = \Pi(u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \alpha g \Pi g (\gamma \cdot u_\Theta)\,. \tag{4.1}$$

Поскольку в правой части отсутствует член u_p, то условие (3.6) с очевидностью выполняется (в данном случае $F_0' \equiv \mathbb{O}$). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4.1. *В условиях теоремы 3.1 при любом $u_0 \in \mathcal{M}$ существует единственное решение задачи (1.2), (1.3), являющееся квазистационарной полутраекторией.*

Из (4.1) вытекает также

ТЕОРЕМА 4.2. *В условиях теоремы 3.1 множество $\mathcal{M}$ является простым банаховым C^∞-многообразием, моделируемым подпространством* $\mathbb{H}^1_\sigma \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_\Theta$.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Г.А.Свиридюку за неустанный интерес к работе.

Список литературы

1. **Осколков А.П.** *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. Мат. ин–та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126 – 164.
2. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** *Заметки о линейных моделях вязкоупругих сред* // Вестн. Челяб. ун–та. Сер. 3. Математика. Механика. 1996. № 1. С. 135 – 147.
3. **Свиридюк Г.А.** *Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости* // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 65–70.
4. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
5. **Темам Р.** Уравнение Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
6. **Свиридюк Г.А., Якупов М.М.** *Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1538 – 1543.
7. **Якупов М.М.** *Исследование фазовых пространств некоторых задач гидродинамики*: Дис. ...канд. физ.–мат. наук. Челябинск, 1998.
8. **Свиридюк Г.А.** *Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62 – 70.
9. **Свиридюк Г.А., Кузнецов Г.А.** *Об относительной p-секториальности дифференциальных операторов* // Третий Сиб. конгресс по индустр. и прикл. математике. Новосибирск, 1998. С. 49 – 57.
10. **Кузнецов Г.А.** *Исследование относительно спектральных свойств линейных операторов*: Дис. ...канд. физ.–мат. наук. Челябинск, 1999.
11. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
12. **Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.** *О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами* // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 604 – 616.
13. **Солонников В.А.** Линейные эллиптические системы: Конспект лекций. Л.: Изд-во Ленингр. ун–та, 1979.
14. **Капитанский Л.В., Пилецкас К.И.** *О некоторых задачах векторного анализа* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 138. С. 65 – 85.
15. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
16. **Свиридюк Г.А.** *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 3. С. 192 – 207.

SUMMARY

The Cauchy — Dirichlet problem for the system of equations modelling the thermoconvection of visco-elastic incompressible fluid is considered. It is shown that the phase space of the problem is a simple Banach C^∞-manifold.