Доклады Академии наук СССР
1965. Том 162, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

А. С. ПЛЕШАНОВ

ОПТИМАЛЬНЫЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

(Представлено академиком В. А. Кириллиным 27 X 1964)

Оптимальная генерация мощности по параметру нагрузки K в магнитогидродинамическом генераторе (МГДГ) с постоянной площадью поперечного сечения канала и при постоянных магнитном и электрическом полях исследовалась в ([1]). Некоторые другие частные случаи оптимизации режимов работы МГДГ (в основном нефункциональной оптимизации) рассматривались в ([2–5]). В настоящей работе дается общее решение этой задачи. Замечательно, что оно получается в конечном виде и является весьма простым.

Постановка задачи совпадает с ([6]) и определяется переменными: скоростью газа $\mathbf{v}$ $(v, 0, 0)$ электрической напряженностью $\mathbf{E}$ $(0, -E, 0)$, магнитной индукцией внешнего поля $\mathbf{B}$ $(0, 0, -B)$, плотностью тока $\mathbf{j}$ $(0, j, 0)$, плотностью газа ρ, давлением p, температурой T, энтальпией w, энтропией s. Движение проводящего газа с проводимостью σ совершается по оси x канала высоты y и ширины z, так что площадь поперечного сечения канала $S = yz$. Уравнения в одномерном приближении, пренебрежении индуцированным магнитным полем, вязкостью и теплопроводностью имеют вид

$$\rho v S = m, \quad \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = -jB, \quad \rho v T \frac{ds}{dx} = \frac{j^2}{\sigma} \tag{1}$$

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T, \quad j = \sigma (vB - E),$$

где $m = \text{const}$ — массовый поток, R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес. Используя термодинамическое соотношение $T\,ds = dw - \frac{1}{\rho} dp$, уравнению энергии можно придать форму

$$\rho v \frac{d}{dx}\left(w + \frac{v^2}{2}\right) = -jE.$$

Введя мощность $N = \int\limits_0^x jES\,dx$, получим коэффициент полезного действия МГДГ $\eta = N / m(w + v^2/2)_1$ (индекс 1 относится к начальному сечению канала). В качестве независимой переменной введем η $(0 < \eta < 1)$, что позволяет сразу проинтегрировать уравнение энергии. Перейдем к безразмерным переменным $\bar{\varphi} = \varphi / \varphi_1$, за исключением $\bar{x} = x / (\rho v / \sigma B^2)_1$ (в дальнейшем, наоборот, черточки ставятся над размерными величинами). После необходимых подстановок уравнение движения для идеального газа имеет вид

$$f \equiv \gamma \mathrm{M}_1^2 \frac{dv}{d\eta} + S \frac{d}{d\eta}\left(\frac{T}{Sv}\right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}_1^2\right) \frac{1}{1 - K_1} \frac{B}{E} = 0, \tag{2}$$

где

$$T = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}_1^2\right)(1 - \eta) - \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}_1^2 v^2 \tag{3}$$

уравнение энергии; $K_1 = 1 - (\bar{E} / \bar{v}\bar{B})_1$ $(0 < K_1 < 1)$ — начальный параметр нагрузки, дополняющий электрический коэффициент полезного действия до 1; M_1 — число Маха, $\gamma = c_p / c_v$.

Задача свелась к интегрированию 1 уравнения (2) с 4 функциями v, S B и E. Для их определения необходимо поставить вариационную задачу.

Выдвигается общее положение: оптимизация произвольного необратимого процесса достигается минимизацией интегральной скорости возникновения энтропии при допустимых функциональных связях. Принцип минимума скорости возникновения энтропии сформулирован И. Пригожиным (см., например, ([7])) и доказан им для стационарных процессов в так называемой линейной термодинамике необратимых процессов на основе соотношений Онзагера. Известный принцип минимума диссипации энергии (в частности, джоулевой диссипации) представляет собой частную (изотермическую) формулировку рассматриваемого принципа. Отметим, что для одномерных течений, ввиду уравнения неразрывности $S\frac{\partial\rho}{\partial t}+$ $+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v S)=0$, имеет место

$$\int\rho\,\frac{ds}{dt}\,dV=\rho v S\Delta s+\int\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)\,dV\qquad(\Delta s=s-s_1),$$

что для стационарного процесса приводит к

$$\int\rho\,\frac{ds}{dt}\,dV=m\Delta s,$$

так что в этом частном случае рассматриваемый принцип сводится к минимизации конечного значения энтропии.

В данной работе принцип минимума интегральной скорости возникновения энтропии привлекается для осуществления оптимизации МГДГ. В качестве обобщенного функционала берется линейная комбинация конечного значения энтропии и объема МГДГ. С точки зрения принципа взаимности это эквивалентно и минимизации объема МГДГ при заданной его мощности.

Ввиду наличия неголономной связи (2) получаем задачу на условный экстремум функционала $J=\Delta s+\nu\int\limits_0^\eta(F+\lambda f)\,d\eta$, $\lambda=\lambda(\eta)$ и $\nu=\mathrm{const}$ — неопределенные коэффициенты Лагранжа. Для приведенного объема МГДГ имеем соотношение

$$V\,(1-K_1)\,\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2}=\int\limits_0^\eta\frac{d\eta}{\sigma e E}=\int\limits_0^\eta F\,d\eta,\tag{4}$$

где $V=\bar{V}(\sigma\bar{B}^2)\,/\,m$ — безразмерный объем МГДГ (обобщенный параметр магнитогидродинамического взаимодействия ([1])), $e=vB-(1-K_1)E$. Уравнения Эйлера для функций $\varphi(S,B,E,v)$ имеют вид

$$F_\varphi/\lambda+f_\varphi-(f_{\varphi'})'=f_{\varphi'}\lambda'/\lambda\tag{5}$$

(буквенные индексы означают дифференцирование по φ и φ', штрих — дифференцирование по η).

Полагаем далее проводимость постоянной ($\sigma=1$). Из (5) при $\varphi\equiv S$ получим $\lambda=\lambda_1 v\,/\,T$, где λ_1 — постоянная интегрирования. Из (5) при $\varphi\equiv B$ получим

$$(vBK)^2/T=K_1^2\qquad\left(\lambda_1=\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{1-K_1}{K_1^2}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\right)^{-1}\right).\tag{6}$$

Полагая далее $\varphi\equiv v$, получим из (5) уравнение

$$(\mathrm{M}^2-1)\left(\ln\frac{v}{T}\right)'-[1+(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2]\,(\ln S)'+\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2}{(1-K)\,T}=0,\tag{7}$$

которое вместе с преобразованным уравнением (2)

$$\gamma M^2 (\ln v)' - \left(\ln \frac{v}{T}\right)' - (\ln S)' + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{(1-K)T} = 0 \qquad (8)$$

и уравнением неразрывности $\rho v S = 1$ дает адиабату $T = \rho^{\gamma-1}$, т. е. условие стационарности скорости возникновения энтропии (6) в данном случае выполняется тривиально: эта скорость равна 0 (а вместе с нею и ток). Таким образом, одновременная вариация функционала по S и B невозможна. Оставляя в таком случае магнитное поле постоянным ($B = 1$), положим $\varphi \equiv E$ и получим из (5)

$$\frac{(vK)^2}{(1-2K)T} = \frac{K_1^2}{1-2K_1} \quad \left(\lambda_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{(1-K_1)(1-2K_1)}{K_1^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-1}\right). \qquad (9)$$

Полагая далее $\varphi \equiv v$, получим из (5) уравнение, аналогичное (7), которое вместе с (8) дает

$$\left(\ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right)' = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{(1-K)T} \frac{1}{M^2} \left(\frac{1}{1-2K} - 1\right).$$

Сопоставление этого уравнения с приведенной формой уравнения энергии (1)

$$\left(\ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right)' = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{(1-K)T} (\gamma-1) K$$

дает соотношение

$$\frac{\gamma-1}{2} M^2 (1-2K) = 1. \qquad (10)$$

Соотношения (9) и (10) эквивалентны следующим основным результатам: $K = K_1$, $M = M_1$, т. е. в оптимальном МГДГ преобразование в электрическую энергию совершается равномерно по каналу, само же преобразование происходит равномерно как по тепловой, так и по механической формам энергии. Учитывая необходимое постоянство магнитного поля, можно сказать, что МГДГ при проведенной генеральной оптимизации — это генератор ВКМ при наличии связи (10) между K и M (смысл этой связи разъясняется ниже). Наличие связи (10) означает, что оптимальный МГДГ может быть только сверхзвуковым $\left(M_{min} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} > 1\right)$.

Постоянство K и M позволяет сразу получить последний интеграл, а вместе с ним и остальные соотношения ($n = \gamma M^2 - 2$):

$$T = 1 - \eta, \quad v = E = \sqrt{T}, \quad \rho = v^n, \quad S = (\rho v)^{-1}, \quad p = \rho T. \qquad (11)$$

Из (4) и (11) получается явное выражение S в функции x

$$S = \left(1 - \frac{x}{X}\right)^{-1} \quad \left(X = \frac{2}{K(1-K)} \frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2}{(\gamma-1) M^2} \frac{1}{n+1}\right), \qquad (12)$$

так что профилировка площади поперечного сечения канала оптимального МГДГ производится по гиперболе и при заданном M (или K) оптимальный МГДГ имеет длину, не превышающую X. Пользуясь (12), определим объем МГДГ

$$V = \int_0^x S\,dx = X \ln S. \qquad (13)$$

Наконец, коэффициент изэнтропичности ξ в форме [6] ($\eta < \xi < 1$)

$$\xi = \eta\,[1 - e^{-\frac{\Delta s}{c_p}}(1-\eta)]^{-1} = \eta\,[1 - T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)}]^{-1}. \qquad (14)$$

Отметим, что процесс в канале совершается по политропе $p = \rho^\Gamma$, где $\Gamma = (n+2)/n$ и, ввиду (10), $\gamma > \Gamma > 1$ $(2/(\gamma-1) < n < \infty)$.

Для выяснения смысла связи (10) решим обычную задачу при B, K, $M = \text{const}$. Решение, естественно, получается таким же, но с другим значением $n = \frac{1}{1-K}\left[\frac{2}{\gamma-1} + (2+\gamma M^2)K\right]$. Если поставить теперь обычную задачу на условный экстремум (минимум) выражения $I = \nu_1 \Delta s + \nu_2 V$ в зависимости от M и K, то оказывается, что минимум I реализуется именно при выполнении соотношения (10). Таким образом, связь (10) обеспечивает минимум конечного значения энтропии при известном объеме МГДГ или, согласно принципу взаимности, минимум объема МГДГ при известном конечном значении энтропии.

Условие трансверсальности на свободном конце экстремали имеет вид

$$\delta J = \delta\Delta s + \nu\lambda(f_{v'}\delta v + f_{S'}\delta S) = 0 \qquad (15)$$

и соблюдается при надлежащем значении ν в любом сечении канала. Это означает, что любой участок канала оптимального МГДГ является оптимальным (и начало и конец участка произвольны). Интересно, что форма канала (12) может быть в связи с этим получена из общего функционального требования: отношение площадей S_2 / S_1 — функция только параметра магнитогидродинамического взаимодействия $(\bar{\sigma}\bar{B}^2\bar{S})_1\bar{x} / m \sim S_1 x$.

Действительно, справедливы функциональные уравнения: $S_2 / S_1 = f((S_1(x_2 - x_1))$, $S_3 / S_1 = f(S_1(x_3 - x_1))$, $S_3 / S_2 = f(S_2(x_3 - x_2))$, где f — неизвестная функция (очевидно, $f(0) = 1$). Эта система сводится к функциональному уравнению $f(x)f[yf(x)] = f(x+y)$, где x и y независимы. Единственным решением последнего уравнения является функция, обратная линейной, $f(x) = (1 - f'(0)x)^{-1}$, т. е. выражение (12).

При конкретной реализации оптимального МГДГ возможны частные случаи: 1) напряжение $U = 1$, 2) $z = 1$, 3) $y = 1$. При $U = 1$ имеем $y = U / E = v^{-1} < z = \rho^{-1} = v^{-n}$; при $z = 1$ $y = S$ и $U = Ey = v^{-n}$ — напряжение возрастает по каналу; при $y = 1$ $z = S$ и $U = Ey = v$ — напряжение падает по каналу. При $U = 1$, очевидно, $K = (1 + \bar{R} / \bar{r})^{-1}$, где $\bar{R}$ и $\bar{r}$ — соответственно внешнее и внутреннее сопротивление МГДГ, при этом $\bar{r}^{-1} = (m / (\bar{y}\bar{B})^2)_1 \frac{n+1}{2} X\eta$.

Для минимизации объема, как это видно из (4), проводимость газа должна быть, естественно возможно большей. Размерная длина МГДГ, определяемая масштабом $(\bar{\rho}\bar{v} / \bar{\sigma}\bar{B}^2)_1$, будет тем меньше, чем меньше удельный массовый поток и больше проводимость газа и магнитная индукция внешнего поля.

Для справедливости принятого здесь квазиодномерного приближения необходима малость $\theta_1 = \frac{d\sqrt{\bar{S}}}{d\bar{x}} = \left(\frac{\sqrt{\bar{S}}}{\bar{\rho}\bar{v}/\bar{\sigma}\bar{B}^2}\right)_1 \frac{S^{3/2}}{2X}$ или малость $\theta_2 = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{\rho}\bar{v}/\bar{\sigma}\bar{B}^2}\right)_1 \frac{S^2}{X}$.

При рассмотрении возможных частных вариационных задач следует иметь в виду, что, помимо невозможности одновременной вариации S и B, как нетрудно показать, невозможно одновременно варьировать E и B. Таким образом, существуют только следующие частные задачи: 1) $B = E = 1$, 2) $B = v = 1$, 3) $B = S = 1$, 4) $E = S = 1$.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило
26 X 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Neuringer, J. Fluid Mech., 7, 2, 287 (1960). [2] Ю. Ф. Соколов, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 5, 45 (1962). [3] А. Е. Шейндлин, А. В. Губарев, В. И. Ковбасюк, В. А. Прокудин, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 6, 34 (1962). [4] D. T. Swift-Hook, J. K. Wright, J. Fluid Mech., 15, 1, 97 (1963). [5] Г. В. Гордеев, ЖТФ, 33, 9, 1031 (1963). [6] W. B. Coe, C. L. Eisen, Electr. Eng., 79, 12 (1960). [7] И. Пригожин, Введение в термодинамику необратимых процессов, М., 1960.