А. Л. Бухгейм, В. Г. Яхно, О двух обратных задачах для дифференциальных уравнений, *Докл. АН СССР*, 1976, том 229, номер 4, 785–786

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 4

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

А. Л. БУХГЕЙМ, В. Г. ЯХНО

О ДВУХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 19 III 1976)

В данном сообщении рассматривается задача об определении части или всех коэффициентов гиперболического (параболического) уравнения по некоторому набору функционалов от его решений. В несколько иных постановках задача определения нескольких коэффициентов в гиперболическом случае рассматривалась в работах ([1], [2]). В этих постановках удавалось определить только некоторые линейные комбинации искомых коэффициентов. Для обыкновенного дифференциального уравнения подобная задача (в спектральной постановке) рассматривалась в ([3]).

1. Рассмотрим в R^3 дифференциальное уравнение

$$[D_t^2-P(x, D)]u=f(x, t), \quad x\in R^3, \quad t>0, \tag{1}$$

с данными Коши

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad D_t u(x, 0)=\psi(x), \tag{2}$$

где $P(x, D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x)D^\alpha$ — равномерно эллиптический оператор в R^3, $D=(D_1, D_2, D_3)$, $D_j=\partial/\partial x_j$. Положим $A=\{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid |\alpha|\leqslant 2, \alpha_j\geqslant 0$, целое$\}$. Пусть A_1, A_2 — разбиение множества A на два непересекающихся подмножества: $A=A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_2=\phi$. Коэффициенты $a_\alpha(x)$, входящие в оператор $P(x, D)$, считаются известными в R^3, если $\alpha\in A_1$, и известными вне некоторой области $\Omega\subset R^3$, если $\alpha\in A_2$. Поэтому весь оператор $P(x, D)$ известен только в $R^3\setminus\Omega$. Будем считать, что $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные вектор-функции размерности $|A_2|$ ($|A_2|$ — мощность множества A_2).

Задача 1. Определить $P(x, D)$ в области Ω, если решение $u(x, t)$ задачи Коши (1), (2) (точнее, целого набора задач Коши, так как $u=(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $N=|A_2|$) известно на многообразии $\mathfrak{M}=S\times(0, T)$; здесь S — замкнутая поверхность в R^3 класса C^3, окружающая область Ω и звездная относительно $\overline{\Omega}$, $S\cap\overline{\Omega}=\phi$; T — некоторое достаточно большое положительное число.

Обозначим через $(D^\alpha\varphi(x))_{\alpha\in A_2}$ матрицу порядка $|A_2|\times|A_2|$, столбцами которой являются вектор-функции $D^\alpha\varphi$, $\alpha\in A_2$. Пусть $u^1(x, t)$ — вектор-функция размерности $|A_2|$ — есть решение следующей задачи Коши:

$$[D_t^2-P_1(x, D)]u^1=f(x, t),$$
$$u^1(x, 0)=\varphi(x), \quad D_t u^1(x, 0)=\psi(x),$$

$P_1(x, D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha^1(x)D^\alpha$ — равномерно эллиптический оператор в R^3. Будем считать, что $f\in C^6(R^3\times[0, T])$, $\varphi, \psi\in C^6(R^3)$; $a_\alpha, a_\alpha^1\in C^6(R^3)\cap\{a \mid \|a\|_{C^6(R^3)}\leqslant M\}$.

1.1. В этом пункте рассматривается задача определения коэффициентов $a_\alpha(x)$ при $|\alpha|\leqslant 1$, т. е. $A_2\cap\{\alpha\in A \mid |\alpha|=2\}=\phi$. Коэффициенты $a_\alpha(x)\equiv a_\alpha^1(x)=\mathrm{const}$ для $|\alpha|=2$.

Теорема 1. *Пусть* $P(x, D)\equiv P_1(x, D)$ *в* $R^3\setminus\Omega$,

$$\det(D^\alpha\varphi(x))_{\alpha\in A_2}\neq 0 \quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

Тогда, если область Ω *достаточно мала, то*

$$\|a_\alpha-a_\alpha^1\|_{C(\Omega)}\leqslant C_M\|v-v^1\|_{C^3(\mathfrak{M})}, \quad \alpha\in A_2,$$

где $v(x, t)=u(x, t)|_{\mathfrak{M}}$, $v^1(x, t)=u^1(x, t)|_{\mathfrak{M}}$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.

Тогда решение задачи 1 *единственно* $(a_\alpha(x)\in C^6(R^3))$.

1.2. В этом пункте $A_2\supset\{\alpha|\ |\alpha|=2\}, P_1(x, D)$ — заданный оператор в R^3, причем $a_\alpha^1(x)\equiv\text{const}$ для $|\alpha|=2$. Имеет место следующая теорема амбарцумяновского типа.

Теорема 2. *Пусть* $P(x, D)\equiv P_1(x, D)$ *в* $R^3\setminus\Omega$,

$$\det(D^\alpha\varphi(x))_{\alpha\in A_2}\neq 0 \qquad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

Тогда, если область Ω *достаточно мала и* $u|_{\mathfrak{M}}=u^1|_{\mathfrak{M}}$, *то* $P(x, D)\equiv\equiv P_1(x, D)$ *в* R^3.

При доказательстве теорем 1 и 2 используются результаты работ ([4-6]).

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы и в R^n.

При $n=1$ от условия малости области Ω можно избавиться.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$[D_t-P(x, D)]u=f(x, t), \qquad x\in R^n, \qquad t>0, \tag{3}$$

с данными Коши

$$u(x, 0)=\varphi(x); \tag{4}$$

здесь

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq 2}a_\alpha(x)D^\alpha, \qquad \sum_{|\alpha|\leq 2}a_\alpha(x)\xi^\alpha\geq\lambda|\xi|^2, \qquad \xi\in R^n$$

$\lambda=\text{const}$. Положим $A=\{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mid |\alpha|\leq 2\}$. Как и в п. 1 A_1, A_2 — разбиение множества A на два непересекающихся подмножества, $A=A_1\cup A_2$. Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора $P(x, D)$ известны в R^n при $\alpha\in A_1$ и известны в $R^n\setminus\Omega$ при $\alpha\in A_2$; f, φ — заданные вектор-функции размерности $|A_2|$.

Задача 2. Определить $P(x, D)$ в области Ω, если решение $u(x, t)$ задачи Коши (3), (4) ($u(x, t)$ — вектор-функция размерности $|A_2|$) известно на многообразии $\mathfrak{M}_1=\{x, t|x\in\Omega, t=T\}$ (T — любое фиксированное положительное число). Обозначим $w(x)=u|_{\mathfrak{M}_1}$, a $(D^\alpha w(x))_{\alpha\in A_2}$ — матрица порядка $|A_2|\times|A_2|$, столбцами которой являются вектор-функции $D^\alpha w(x)$, $\alpha\in A_2$. Будем считать, что

$$f\in C_{x,t}^{2,1}(R^n\times[0, T_1]), \qquad T_1>T, \qquad \varphi\in C^2(R^n),$$
$$a_\alpha\in C^3(R^n)\cap\{a|\ \|a\|_{C^3(R^n)}\leq M\},$$
$$|D^\alpha\varphi(x)|\leq\text{const}\cdot\exp(h|x|^2),$$
$$|D^\alpha D_t f(x, t)|\leq\text{const}\cdot\exp(h|x|^2),$$
$$|\alpha|\leq 2,$$

h — постоянная, зависящая от λ, T_1.

Теорема 3. *Пусть* $\det(D^\alpha w(x))_{\alpha\in A_2}\neq 0$ *для* $x\in\overline{\Omega}$.

Тогда решение задачи 2 *единственно* (*область* Ω *считается достаточно малой*).

Доказательство теоремы 3 приводится (аналогично работе ([7])) сведением рассматриваемой задачи к уравнению Фредгольма второго рода.

В заключение выражаем благодарность В. Г. Романову за внимание к работе.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
10 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Г. Романов*, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, «Наука», 1972. [2] *А. С. Благовещенский*, Сб. Математические вопросы теории распространения волн, Ленинград, т. 2, 1969, стр. 85. [3] *З. Л. Лейбензон*, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 15, 70 (1966). [4] *В. Г. Романов*, ДАН, т. 204, № 5, 1075 (1972). [5] *М. М. Лаврентьев, А. Л. Бухгейм*, Функциональный анализ и его приложения, т. 7, в. 4, 44 (1973). [6] *А. Л. Бухгейм*, ДАН, т. 215, № 1, 15 (1974). [7] *Н. Я. Безнощенко*, Сибирск. матем. журн., т. 16, № 3, 473 (1975).