V. A. Kovalev, Yu. N. Radaev, On wavenumbers of plane harmonic type III thermoelastic waves, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2010, Volume 10, Issue 3, 46–53

DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-3-46-53

УДК 539.374

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКИХ GNIII-ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН И НЕРАВЕНСТВА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ИХ НОРМАЛЬНОСТЬ

В.А. Ковалев[1], **Ю.Н. Радаев**[2]

[1]Московский городской университет управления Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики
E-mail: vlad_koval@mail.ru

[2]Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: radayev@ssu.samara.ru

В представляемой работе в рамках линейной теории обобщенной термоупругости (GNIII) с помощью связанной системы уравнений движения и теплопроводности приводится анализ плоских гармонических термоупругих волн. Найдены их волновые числа и произведено отделение многозначных ветвей квадратных корней на комплексной плоскости, определяющих четыре возможных значения волновых чисел плоской гармонической GNIII-термоупругой волны. Получены определяющие ограничения и ограничения на частоту, которые обеспечивают нормальный характер затухания прямых волн. Отмечены предельные случаи, в контексте GNIII включающие вариант GNI/CTE (классическая термоупругость) и вариант GNII (гиперболическая термоупругость).

Ключевые слова: теплопроводность, GN-термоупругость, плоская волна, волновое число, фазовая скорость, коэффициент затухания, определяющее ограничение.

On Wavenumbers of Plane Harmonic Type III Thermoelastic Waves

V.A. Kovalev[1], **Yu.N. Radayev**[2]

[1]Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: vlad_koval@mail.ru

[2] Samara State University,
Chair of Continuum Mechanics
E-mail: radayev@ssu.samara.ru

The present study is devoted to propagation of plane harmonic GNIII-thermoelastic waves by the coupled system of linear equations of motion and heat transport based on the Green & Naghdi theory of thermoelasticity. Analytical findings and exact solutions are primarily related to complex wavenumbers, phase velocities and attenuation coefficients of the plane GNIII-thermoelastic waves. Complete analysis of all analytical branches of the wavenumbers is given. Constitutive inequlities and frequency restrictions which provide a normal behaviour of the plane GNIII-thermoelastic waves are obtained. Limiting cases, including those corresponding to GNI/CTE (the classical theory) and GNII (hyperbolic, thermal energy conserving theory) thermoelasticity, are noted. The paper presents an in-depth analysis of plane thermoelastic waves in the context of GNI,II,III.

Key words: heat transport, GN-thermoelasticity, plane wave, wavenumber, phase velocity, attenuation coefficient, constitutive restriction.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

После выхода в свет работ [1, 2], быстрыми темпами развиваются математические модели термоупругого поведения твердых тел (GN-термоупругость), основанные на различных модификациях закона теплопроводности Фурье, ставивших своей целью получение связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы конечную скорость распространения теплового сигнала.

Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Имеется ряд экспериментальных доказательств существования «второго звука», хотя его экспериментальное обнаружение всегда сопряжено с большими трудностями, поскольку в твердых телах он возможен лишь в области весьма низких температур (например, в твердом гелии).

Неклассическая теория GN-термоупругости включает три различных варианта: термоупругость, основанную на законе теплопроводности Фурье, с бесконечно большой скоростью распространения экспоненциально затухающего теплового сигнала (GNI/CTE); термоупругость с сохраняющейся энергией и конечной скоростью распространения термических волн «второго звука» (GNII, гиперболическая термоупругость); третий вариант (GNIII) смешанный и включает первые два в качестве предельных случаев. Ясно, что GNIII-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, по сравнению с классической теорией теплопроводности Фурье. Заметим, что GNII — единственная известная в настоящее время термодинамически корректная теория, которая позволяет описать теплопроводность в твердом теле как волновой процесс, не сопровождающийся рассеянием энергии, и сформулировать математическую модель процесса теплопроводности в твердых телах с помощью системы гиперболических уравнений в частных производных, обеспечивающих (в силу своей аналитической классификации) конечную скорость распространения тепла. Поэтому GNII-термоупругость — это как раз такая теория, которую с достаточным основанием можно назвать гиперболической термоупругостью. Она допускает вариационную формулировку [3]: все основные соотношения GNII-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным Лагранжианом. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать термоупругость типа GNII как физическую теорию поля [4].

Полный анализ плоских гармонических GNI/CTE-термоупругих волн был выполнен в статье [5] и было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно два волновых числа, вещественная и мнимая части которых положительны. В работах [6, 7] приводится исследование плоских волн в GNII-термоупругих средах. Плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны. Целью настоящего исследования являются плоские гармонические связанные термоупругие волны, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости. Ставится задача вычисления их волновых чисел и их последующий анализ в зависимости от определяющих параметров термоупругости и частоты. Поскольку волновое число k плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$, необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям $\mathrm{Re}\,k > 0$, $\mathrm{Im}\,k > 0$. Мы будем называть их нормальными волновыми числами. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в многозначном комплексном представлении волнового числа и выполнения в этой связи значительного объема вычислительной работы. Волновое число k в том виде, в котором оно обычно находится, помимо всего прочего, определяется несколькими независимо изменяющимися параметрами, что также существенно осложняет решение указанной задачи.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОСТИ

Рассмотрим систему связанных уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого (типа GNIII) тела при условии отсутствия массовых сил и источников тепла:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda\boldsymbol{\nabla}^2\theta + \Lambda_*\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \kappa\ddot{\theta} - \alpha\theta_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения среды из отсчетного состояния; ρ — плотность среды; λ, μ — упругие постоянные Ламе; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Лапласа; θ — приращение температуры над отсчетной температурой; θ_0 — отсчетная температура; Λ — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate); Λ_* — коэффициент теплопроводности; κ — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации; термомеханическая постоянная $\alpha = (1/3)(3\lambda+2\mu)\beta^*$, где β^* — коэффициент объемного теплового расширения; точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

Скалярное уравнение в системе (1) называется обобщенным уравнением теплопроводности, сопряженным с уравнением движения (первое уравнение в системе (1)).

Предельный переход $\Lambda_* \to 0$ трансформирует GNIII-модель в GNII-термоупругость (гиперболическая термоупругость), а $\Lambda \to 0$ преобразует ее к классической теории термоупругости GNI/CTE (параболическая термоупругость).

К данным выше уравнениям следует добавить определяющий закон GNIII-термоупругости (закон Дюгамеля—Неймана)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, и геометрические соотношения Коши

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

устанавливающие связь между малыми деформациями и перемещениями.

С целью упрощения записи и лучшего восприятия уравнений GNIII-термоупругости (1) введем следующие обозначения:

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\theta_0}, \quad \Lambda'_* = \frac{\Lambda_*}{\theta_0}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{\theta_0}.$$

Разделив обе части обобщенного уравнения теплопроводности на Λ, перепишем (опуская при этом штрихи в записи постоянных Λ', Λ'_*, κ') затем второе уравнение системы (1) в несколько более простой форме. Окончательно уравнения связанной динамической GNIII-термоупругости для целей настоящего исследования принимаются в форме

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta + \dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим два предельных случая уравнений GNIII-термоупругости: полагая $\Lambda \to 0$ приходим к динамическим связанным уравнениям классической теории термоупругости GNI/CTE:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta - \dfrac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda_*}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}} = 0; \end{cases} \tag{5}$$

совершая предельный переход $\Lambda_* \to 0$, получим уравнения GNII-термоупругости:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

3. ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ GNIII-ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

В этом разделе будут рассмотрены плоские гармонические связанные термоупругие волны, которые являются одним из наиболее часто исследуемых в волновых задачах термоупругости (и вообще в динамике сплошных сред [8]) предметов.

Плоская гармоническая термоупругая волна[1] имеет вид ($\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — циклическая частота, $\mathbf{A}$ — вектор поляризации волны, B — амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \theta &= Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим связанную систему уравнений GNIII-термоупругости

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta + \dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Подставив выражения (7) в уравнения системы (8), а также учитывая, что

$$\boldsymbol{\nabla} = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

получим следующую систему уравнений, связывающую волновой вектор, циклическую частоту, вектор поляризации волны и амплитуду B:

$$\begin{gathered} -\mu k^2\mathbf{A} + (\lambda+\mu)(i\mathbf{k})\,(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - \alpha(i\mathbf{k})B + \rho\omega^2\mathbf{A} = \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + k^2\left(i\frac{\Lambda_*}{\Lambda}\omega - 1\right)\right)B + \frac{\alpha}{\Lambda}i\omega^2\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

[1]В физической литературе такие волны обычно называются плоскими монохроматическими волнами.

где k является волновым числом (модулем волнового вектора $\mathbf{k}$) плоской гармонической волны.

Волновое число k может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Вполне естественным представляется ограничиться лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора $\mathbf{k}$. Поэтому следует разыскивать волновые числа, подчиняющиеся условиям

$$\operatorname{Re} k > 0, \quad \operatorname{Im} k > 0.$$

Заметим, что в физической литературе собственно волновым числом называется $\operatorname{Re} k$; величина $\operatorname{Im} k$ обычно называется коэффициентом затухания. С волновым числом k связана также следующая терминология: $\dfrac{\omega}{\operatorname{Re} k}$ — фазовая скорость волны; $\dfrac{1}{\operatorname{Im} k}$ — глубина проникания волны; $4\pi \left|\dfrac{\operatorname{Im} k}{\operatorname{Re} k}\right|$ — коэффициент потерь.

С помощью первого из уравнений (9) можно заключить, что в связанной термоупругой волне $B \neq 0$ векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{k}$ не могут быть ортогональными.

4. ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Умножим обе части первого из уравнений системы (9) скалярно на волновой вектор $\mathbf{k}$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu)) - i\alpha k^2 B = 0, \\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\dfrac{\alpha}{\Lambda} i\omega^2 + \left(\dfrac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + i\frac{\Lambda_*}{\Lambda}k^2\omega - k^2\right)B = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Для нетривиальной совместности системы уравнений (10) должно выполнятся равенство

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu) & -i\alpha k^2 \\ i\dfrac{\alpha}{\Lambda}\omega^2 & \dfrac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + i\dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}k^2\omega - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Вычисляя определитель, приходим к следующему биквадратному уравнению относительно неизвестного волнового числа k:

$$\rho\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^4 - k^2\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^2(\lambda+2\mu) + \rho\omega^2k^2\left(i\frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda} - 1\right) - k^4(\lambda+2\mu)\left(i\frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda} - 1\right) - \frac{\alpha^2}{\Lambda}k^2\omega^2 = 0. \tag{12}$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения

$$c_l^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda},$$

где c_l и l имеют размерность скорости, а также безразмерные постоянные

$$h_3^2 = \frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda}, \quad s^2 = \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}.$$

Определим еще один безразмерный параметр соотношением

$$h_1^2 = 1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2$$

и обозначим квадрат волнового числа упругой продольной волны через

$$k_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}.$$

Принимая во внимание новые обозначения уравнение (12), из которого находятся значения волновых чисел, представим в следующей форме:

$$\left(ih_3^2 - 1\right)\frac{k^4}{k_\parallel^4} + \left(h_1^2 - ih_3^2\right)\frac{k^2}{k_\parallel^2} - h_2^2 = 0. \tag{13}$$

Заметим, что в силу данных выше определений a priori удовлетворяются определяющие неравенства:

$$h_1 > 1, \quad h_1^2 - h_2^2 > 1. \tag{14}$$

Первое из них является следствием второго. Поэтому имеется только одно априорное определяющее ограничение на постоянные h_1, h_2, h_3.

Ясно, что безразмерное волновое число $k/k_{\|}$ может быть найдено в зависимости от постоянных h_1, h_2, h_3, из которых две первые являются определяющими и лишь последняя зависит от частоты[2].

Квадраты волновых чисел плоской гармонической связанной термоупругой волны находятся из уравнения (13) в виде

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{\left(h_1^2 - ih_3^2\right)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}. \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем изложении квадратный корень из комплексного числа понимается как двузначный.

Отступая от основной линии изложения, заметим, что поскольку в теории GNII-термоупругих волн «второго звука» величина $h_3 = 0$, то отношение $k/k_{\|}$ не зависит от частоты. Нетрудно видеть, что уравнение (15) в этом случае упрощается

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = h_1^2 \pm \sqrt{h_1^4 - 4h_2^2}. \tag{16}$$

Выражение под знаком квадратного корня всегда положительно:

$$h_1^4 - 4h_2^2 = (1 + s^2 - h_2^2)^2 + 4s^2h_2^2 > 0.$$

Правая часть в (16), как легко проверить, также положительна при любом выборе знака. Поэтому плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны.

Для определения значений квадрата волнового числа k проведем ряд дополнительных вычислений и извлечение квадратного корня в соотношении (15).

Воспользуемся известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения $p = \mathrm{Re}\,p + i\mathrm{Im}\,p$. Положив $\sqrt{p} = q = \mathrm{Re}\,q + i\mathrm{Im}\,q$, имеем ровно два значения для $\sqrt{p}$, которые определяются в следующем виде:

$$\mathrm{Re}\,q = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,p + \sqrt{(\mathrm{Re}\,p)^2 + (\mathrm{Im}\,p)^2}}{2}}, \qquad \mathrm{Im}\,q = \frac{\mathrm{Im}\,p}{2\mathrm{Re}\,q}. \tag{17}$$

В рассматриваемом нами случае $p = \left(h_1^2 - ih_3^2\right)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)$, значения величин $\mathrm{Re}\,p$ и $\mathrm{Im}\,p$ следует принять равными

$$\mathrm{Re}\,p = h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2, \qquad \mathrm{Im}\,p = 2h_3^2\left(2h_2^2 - h_1^2\right).$$

Тогда на основании (17), обозначая $\mathrm{Re}\,q = a_{1,\,2}$ и $\mathrm{Im}\,q = b_{1,\,2}$, находим

$$a_{1,\,2} = \pm\sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{\left(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2\right)^2 + 4h_3^4\left(2h_2^2 - h_1^2\right)^2}}{2}}, \qquad b_{1,\,2} = \frac{h_3^2\left(2h_2^2 - h_1^2\right)}{a_{1,\,2}}. \tag{18}$$

Учитывая найденные выше значения $a_{1,\,2}$ и $b_{1,\,2}$, равенство (15) можно компактно представить в следующем виде:

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,\,2} + ib_{1,\,2}}{ih_3^2 - 1}. \tag{19}$$

[2]В теории GNII-термоупругих волн «второго звука» $h_3 = 0$.

Продолжим анализ, отделяя мнимую и вещественные части в правой части (19). Для этого умножим и разделим правую часть уравнения (19) на комплексно сопряженную знаменателю величину

$$2\frac{k^2}{k_\parallel^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,\,2} + ib_{1,\,2}}{ih_3^2 - 1} \cdot \frac{-ih_3^2 - 1}{-ih_3^2 - 1}. \tag{20}$$

Преобразуя и извлекая в (20) корень приходим к

$$\frac{k}{k_\parallel} = \sqrt{\frac{h_3^4 + b_{1,\,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,\,2} + i\left(h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,\,2} - h_3^2 - b_{1,\,2}\right)}{2\left(h_3^4 + 1\right)}}. \tag{21}$$

Для дальнейшего вычисления волновых чисел плоской гармонической термоупругой волны еще раз осуществим операцию извлечения квадратного корня в (21). Для этого воспользуемся уже применявшимся алгоритмом и соответствующими формулами, полагая

$$\operatorname{Re} p = h_3^4 + b_{1,\,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,\,2}, \qquad \operatorname{Im} p = h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,\,2} - h_3^2 - b_{1,\,2}.$$

В результате находим

$$\sqrt{2\left(h_3^4 + 1\right)}\frac{k}{k_\parallel} = a'_{1,\,2;\,3,\,4} + ib'_{1,\,2;\,3,\,4}, \tag{22}$$

где номера 1, 2 выбираются независимо от номеров 3, 4 и поэтому имеется всего четыре различных варианта;

$$\begin{aligned} a'_{1,\,2;\,3,\,4} &= \pm\sqrt{\frac{S^2 + b_{1,\,2}h_3^2 - a_{1,\,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,\,2}h_3^2 - a_{1,\,2})^2 + (T^2 - a_{1,\,2}h_3^2 - b_{1,\,2})^2}}{2}}, \\ b'_{1,\,2;\,3,\,4} &= \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,\,2;\,3,\,4}}; \end{aligned} \tag{23}$$

S^2 и T^2 определяются согласно

$$S^2 = h_3^4 + h_1^2, \qquad T^2 = h_3^2(h_1^2 - 1). \tag{24}$$

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Поскольку волновое число k плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора $\mathbf{k}$, необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. Такие волновые числа мы называем нормальными. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в (22) и выполнения значительного объема вычислительной работы, так как волновое число k в том виде, в котором оно было найдено выше, определяется тремя независимо изменяющимися параметрами h_1, h_2, h_3. Напомним, что они подчинены всего одному априорному определяющему ограничению $h_1^2 - h_2^2 > 1$.

Совсем просто решается вопрос с вещественной частью волнового числа k: неравенству $\operatorname{Re} k > 0$ при всех допустимых значениях параметров h_1, h_2, h_3 удовлетворяют лишь значения $a'_{1;\,3}$ и $a'_{2;\,3}$.

Таким образом, остается выяснить знаки величин $b'_{1;\,3}$ и $b'_{2;\,3}$ в области допустимых значений параметров h_1, h_2, h_3 с тем, чтобы указать знак мнимой части волнового числа.

Прежде всего заметим, что знак $b'_{1,\,2;\,3}$ совпадает со знаком величины

$$\tau_{1,\,2} = h_1^2h_3^2 - a_{1,\,2}h_3^2 - h_3^2 - b_{1,\,2}. \tag{25}$$

Замечая далее, что $b_{1,\,2} = \dfrac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,\,2}}$, выражение для $\tau_{1,\,2}$ можно преобразовать к виду

$$\tau_{1,\,2} = h_3^2(h_1^2 - 1) - h_3^2\frac{a_{1,\,2}^2 + 2h_2^2 - h_1^2}{a_{1,\,2}} \tag{26}$$

или

$$\tau_{1,\,2} = \frac{h_3^2}{a_{1,\,2}} \left[-a_{1,\,2}^2 + (h_1^2 - 1)a_{1,\,2} + h_1^2 - 2h_2^2\right]. \tag{27}$$

Заметим, что в силу своего определения $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ в области допустимых значений параметров h_1, h_2, h_3. Следовательно, можно заключить, что

$$\operatorname{sign}\tau_1 = \operatorname{sign}\left[-a_1^2 + (h_1^2 - 1)a_1 + h_1^2 - 2h_2^2\right], \quad \operatorname{sign}\tau_2 = -\operatorname{sign}\left[-a_2^2 + (h_1^2 - 1)a_2 + h_1^2 - 2h_2^2\right]. \tag{28}$$

Продолжая рассуждения, связанные с оценкой знаков величины $\tau_{1,\,2}$, рассмотрим вспомогательный квадратный трехчлен

$$\delta(\kappa) = -\kappa^2 + (h_1^2 - 1)\kappa + h_1^2 - 2h_2^2. \tag{29}$$

Оценим его знак для различных диапазонов изменения переменной κ. Определим сначала его корни

$$\kappa_{1,\,2} = \frac{-(h_1^2 - 1) \pm \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}. \tag{30}$$

Для дальнейшего анализа необходимо исследовать знак дискриминанта квадратного трехчлена (29). Обозначая указанный дискриминант через ς, имеем

$$\varsigma = (h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2). \tag{31}$$

Будем рассматривать дискриминант ς как квадратный трехчлен от переменной $\xi = h_1^2 - 1$. Нас будет интересовать лишь положительный диапазон изменения переменной ξ. Ясно, что

$$\varsigma = \xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2).$$

Корни ς определяются как

$$\xi_{1,\,2} = 2(-1 \pm \sqrt{2}h_2). \tag{32}$$

В области значений $\xi > 0$ может располагаться только корень ξ_1, да и то только, когда выполняется неравенство $h_2^2 > 1/2$. Учитывая все сказанное выше можно заключить, что оценка знака дискриминанта ς в зависимости от тех или иных ограничений распадается на три случая:

(i) $\varsigma < 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1/2$ и $\xi < \xi_1$;

(ii) $\varsigma > 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 < 1/2$;

(iii) $\varsigma > 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1/2$ и $\xi > \xi_1$.

Исследуем каждый из указанных выше вариантов.

В случае (i), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющими неравенствами $h_2^2 > 1/2$, $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$, дискриминант ς отрицателен и, следовательно, квадратный трехчлен δ не имеет вещественных корней. Поэтому трехчлен δ принимает только отрицателные значения, откуда заключаем, что $\tau_1 < 0$, $\tau_2 > 0$. Неравенства $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать индексы 2 и 3. Исследование неравенств $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$ показывает, что они несовместны, поэтому случай (i) следует исключить из рассмотрения.

В случае (ii), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и еще одним определяющим неравенством $h_2^2 < 1/2$, дискриминант ς положителен; квадратный трехчлен δ имеет ровно два вещественных корня κ_1, κ_2, которые удовлетворяют неравенствам $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. Ясно, что $\tau_1 > 0$, только если $a_1 < \kappa_2$; $\tau_2 > 0$, только если $a_2 < \kappa_1$. Заметим, что неравенства $a_1 < \kappa_2$ и $a_2 < \kappa_1$ не имеют смысла определяющих ограничений, поскольку они устанавливают ограничения на параметр h_3, который зависит от циклической частоты ω. Неравенства $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать:

(ii-1) номера 1 и 3 при условии $a_1 < \kappa_2$;

(ii-2) номера 2 и 3 при условии $a_2 < \kappa_1$.

В пределах исследуемого случая пока остается открытым вопрос о спектре частот, подчиняющихся неравенствам $a_1 > \kappa_2$ или $0 > a_2 > \kappa_1$: при априорном определяющем ограничении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющем ограничении $h_2^2 < 1/2$ неравенство $\operatorname{Im} k > 0$, обеспечивающее нормальный характер затухания плоской волны, никогда не удовлетворяется, если частота подчинена ограничению $a_1 > \kappa_2$ или $0 > a_2 > \kappa_1$.

В случае (iii), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющими неравенствами $h_2^2 > 1/2$, $h_1^2 - 1 > 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$, второе из которых является следствием априорного определяющего неравенства, дискриминант ς положителен; квадратный трехчлен δ имеет ровно два вещественных корня κ_1, κ_2, второй из которых положителен, а знак первого корня необходимо выяснить. Заметим, что справедливо неравенство $\kappa_1 < \kappa_2$. На основании (30) имеем

$$\kappa_1 = \frac{-(h_1^2 - 1) + \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}, \tag{33}$$

т. е. знак κ_1 (положительный или отрицательный) может быть указан в зависимости от выполнения неравенств

$$\xi > \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)}, \qquad \xi < \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)},$$

которые сводятся соответственно к следующему виду:

$$h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1, \qquad h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1.$$

В рамках рассматриваемого случая имеется априорное определяющее ограничение $h_1^2 - h_2^2 > 1$, которое не противоречит ограничению $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$, только если выполняется неравенство $h_2^2 > 1$. Суммируя все рассуждения, можно сделать следующий вывод. В рамках (iii) неравенства $\mathrm{Re}\, k > 0$, $\mathrm{Im}\, k > 0$ удовлетворяются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать:

(iii-1-1) индексы 2 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$;

(iii-1-2) индексы 2, 3, а также 1, 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $0 < \kappa_1 < a_1 < \kappa_2$;

(iii-2-1) индексы 1 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $a_1 < \kappa_2$;

(iii-2-2) индексы 2 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $a_2 < \kappa_1 < 0$.

Таким образом, нормальные волновые числа k плоских GNIII-термоупругих волн, т. е. волновые числа удовлетворяющие неравенствам $\mathrm{Re}\, k > 0$, $\mathrm{Im}\, k > 0$, определены во всем допустимом диапазоне изменения параметров h_1, h_2, h_3.

Библиографический список

1. *Green, A.E.* On undamped heat waves in an elastic solid / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Therm. Stress. – 1992. – V. 15. – P. 253–264.
2. *Green, A.E.* Thermoelasticity without energy dissipation / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Elasticity. – 1993. – V. 31. – P. 189–208.
3. *Kalpakides, V.K.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.
4. *Ковалев, В.А.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. – М.: Физматлит, 2009. – 156 с.
5. *Радаев, Ю.Н.* Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе / Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2008. – №8/1(67). – С. 411–459.
6. *Ковалев, В.А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости/ В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всерос. конф./ под ред. проф. Л.Ю. Коссовича. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – С. 25.
7. *Ковалев, В.А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости/ В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2009. – Т. 10. – Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 2. – С. 94–128.
8. *Бреховских, Л.М.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 336 с.