А. И. Есин, Равномерно пригодная асимптотика в окрестности звукового излома образующей тела вращения, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, номер 5, 27–30

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 *МАТЕМАТИКА* *№ 5 (156)*

УДК 533.6

А. И. Есин

РАВНОМЕРНО ПРИГОДНАЯ АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ЗВУКОВОГО ИЗЛОМА ОБРАЗУЮЩЕЙ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим установившееся потенциальное течение идеального газа в окрестности угловой точки O контура тела вращения, когда в самой точке O достигается местная скорость звука. В системе координат (x, y), центр которой помещен в точку O, а ось Ox касается дозвукового участка OO' контура, течение описывается преобразованным уравнением неразрывности

$$(a_*^2-\Phi_x^2-a_*^2\Phi_y^2)\,\Phi_{xx}-4(\gamma+1)^{-1}\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+(a_*^2-a_*^2\Phi_x^2-\Phi_y^2)\,\Phi_{yy}+$$
$$+\nu a_*^2(1-\Phi_x^2-\Phi_y^2)(\Phi_x\sin\theta_*+\Phi_y\cos\theta_*)(1+x\sin\theta_*+y\cos\theta_*)^{-1}=0, \tag{1}$$

где потенциал Φ, местная a и критическая a_* скорости звука отнесены к максимально возможной скорости $w_{\max}$, а x и y — к радиусу тела, проведенному в точку O; γ — отношение удельных теплоемкостей; θ_* — угол между осью симметрии тела и осью Ox; $\nu=0$ или 1 соответственно в плоском или осесимметричном случаях.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:

а) $\Phi_n\to 0$ при $y\to 0$, $x<0$ (условие обтекания в дозвуковой зоне);

б) $$\Phi_x/a_*\sim 1+(\gamma+1)^{-1}x^2/y^2;\quad \Phi_y/a_*\sim-\frac{2}{3}(\gamma+1)^{-1}x^3/y^3 \tag{2}$$

при $y\to 0$, $x>0$ (течение типа Прандтля — Майера в сверхзвуковой зоне).

Если контур OO' — аналитический: $y=\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots$; $\alpha_2=0$, то о д н о и з решений задачи (1), (2) есть

$$\Phi/a_*=x+\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\zeta)\,y^{(7+k)/4},\quad y\to 0,\quad \zeta \text{ фиксировано}, \tag{3}$$

где $\zeta=(\gamma+1)^{-1/3}xy^{-5/4}$ — автомодельная переменная;

$$f_0=C^3(t-1)^{-7/8}(7t^2-140t+160)/21;\quad f_1=-(\nu/2)\sin\theta_*;$$
$$f_2=(C^5/30)(\gamma+1)^{-1/3}(t-1)^{-9/8}(d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3);$$
$$d_0=(64/7)(6\gamma-85);\quad d_1=-(72/7)(6\gamma-85);$$
$$d_2=6(6\gamma-25);\quad d_3=6\gamma+5;$$

. . . .

$$\zeta=C(t-1)^{-5/8}(t-8/5);\quad 1<t<+\infty;$$

C — масштабная постоянная, зависящая от течения вдали от точки O и, следовательно, неопределимая из граничных условий (2). Условно можно положить $C=1{,}25\cdot 3^{-3/8}$. Тогда при $\zeta=1$ $f_0'(\zeta)=0$ (звуковая линия в автомодельном решении). Компоненты вектора скорости даются решением Вальо-Лаурина [3]:

$$U/a = 1+(\gamma+1)^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\zeta)\,y^{\frac{2+k}{4}}, \tag{4}$$

$$V/a_* = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\zeta)\,y^{\frac{3+k}{4}};\quad u_k=f_k'(\zeta),\quad v_k=\frac{7+k}{4}f_k(\zeta)-\frac{5}{4}\zeta f_k'(\zeta).$$

Предельный переход ($y\to 0$, ζ фиксировано) и разложения (3), (4) назовем внутренними. Последние справедливы в сверхзвуковой зоне при достаточно малых значениях ζ. При $\zeta\to+\infty$ u_k и v_k неограниченно возрастают по абсолютной величине, и решение теряет смысл.

Для отыскания решения при $\zeta\to+\infty$ введем новую переменную $z=x/y=(\gamma+1)^{1/3}\zeta y^{1/4}$. Предельный переход ($y\to 0$, z фиксировано) назовем внешним. Будем искать внешнее разложение потенциала в виде

$$\Phi/a_* = g_0(z)\,y+g_1(z)\,y^{5/3}+g_2(z)\,y^2+\ldots,\ y\to 0,\ z \text{ фиксировано}. \tag{5}$$

Функция g_0 удовлетворяет уравнению

$$g_0''\,[(1+z^2)^2(g_0')^2-2z(1+z^2)\,g_0g_0'+(a_*^2+z^2)\,g_0^2-z^2-1]=0,$$

которое распадается на два. Первое уравнение $g_0''=0$ определяет однородный поток, не удовлетворяющий условиям (2б). Второе уравнение

$$(1+z^2)^2(g_0')^2-2z(1+z^2)\,g_0g_0'+(a_*^2+z^2)\,g_0^2-z^2-1=0$$

имеет решение

$$g_0=(1/a_*)\sqrt{1+z^2}\,\sin(a_*\operatorname{arctg}z+A_0),$$

определяющее течение Прандтля — Майера. Последующие члены ряда (5) — возмущения течения Прандтля — Майера. Функции g_1 и g_2 удовлетворяют уравнениям

$$F_k(z,\ g_0,\ g_0',\ g_0'',\ g_k,\ g_k')=0,\quad k=1,\ 2,$$

которые не приводятся в явном виде из-за громоздкости. Первое уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными и интегрируется непосредственно:

$$g_1=A_1(\sin\omega)^{1/3}(\cos\omega)^{(2/3)(2\gamma-1)(\gamma-1)^{-1}}(1+z^2)^{5/6},\quad \omega=a_*\operatorname{arctg}z+A_0,$$

второе — к линейному уравнению первого порядка с общим решением:

$$g_2=(\sin\omega)^{1/2}(\cos\omega)^{(3\gamma+1)/2(\gamma-1)}\{A_2+H(\omega)\}(1+z^2),$$

$$H(\omega) = \frac{\nu}{8a_*}\int_0^{\omega}(\sin t)^{-3/2}(\cos t)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)}\,G(t)\,dt,$$

$$G(t) = (1 + a_*)\sin[(1 - 1/a_*)t + \theta_* + A_0/a_*] + \\ + (1 - a_*)\sin[(1 + 1/a_*)t - \theta_* - A_0/a_*],$$

где A_0, A_1, A_2 — произвольные постоянные. Решение (5) по построению удовлетворяет условиям (2б) и не может удовлетворять условию (2а). Последнее должно быть заменено условием сращивания внутреннего (3) и внешнего (5) разложений. В результате сращивания четырех членов разложения (3) и трех членов разложения (5) находим

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -(27/5)\,C^{8/3}(\gamma + 1)^{1/18}(\gamma - 1)^{-1/6}, \quad A_2 = 0.$$

Внешние разложения компонент вектора скорости получаются из (5):

$$\begin{gathered} U/a_* = \tilde{u}_0(z) + \tilde{u}_1(z)\,y^{2/3} + \tilde{u}_2(z)\,y + \ldots, \\ V/a_* = \tilde{v}_0(z) + \tilde{v}_1(z)\,y^{2/3} + \tilde{v}_2(z)\,y + \ldots, \\ \tilde{u}_k = g_k'(z), \; k = 0,\,1,\,2; \quad \tilde{v}_0 = g_0(z) - z g_0'(z), \\ \tilde{v}_k = (4 + k)\,g_k(z)/3 - z g_k'(z), \quad k = 1,\,2, \end{gathered} \tag{6}$$

что согласуется с [4]. В частности, на оси $+Ox$ имеем

$$U/a_* = (1/a_*)\sin(\pi a_*/2) + a_1 x^{2/3} + a_2 x + \ldots,$$
$$V/a_* = -\cos(\pi a_*/2) + b_1 x^{2/3} + b_2 x + \ldots$$

Решения (4), (6) полностью определяют течение в окрестности точки O при $y \to 0$, $y > 0$. Равномерно пригодное разложение потенциала для $0 < \zeta < +\infty$ можно построить, напр., по правилу аддитивного составления

$$\Phi/a_* = g_0 y + g_1 y^{5/3} + \left\{f_0 - \frac{\zeta^3}{3} + \frac{27}{5}C^{8/3}\zeta^{1/3}\right\}y^{7/4} + g_2 y^2 + \\ + \left\{f_2 + (\gamma + 1)^{-1/3}\left[\frac{1}{30}(6\gamma + 5)\zeta^5 + 6C^{8/3}\zeta^{7/3}\right]\right\}y^{9/4} + \ldots$$

Отсюда получаем равномерно пригодные разложения U и V:

$$U/a_* = \tilde{u}_0 + (\gamma + 1)^{-1/3}\left\{u_0 - \zeta^2 + \frac{9}{5}C^{8/3}\zeta^{-2/3}\right\}y^{1/2} + \tilde{u}_1 y^{2/3} + \\ + \left\{(\gamma + 1)^{-1/3}\left[u_2 + (\gamma + 1)^{-1/3}\left(\frac{6\gamma + 5}{6}\zeta^4 + 14C^{8/3}\zeta^{4/3}\right)\right] + \tilde{u}_2\right\}y + \ldots, \tag{7}$$

$$V/a_* = \tilde{v}_0 + \tilde{v}_1 y^{2/3} + \left\{v_0 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{36}{5}C^{8/3}\zeta^{1/3}\right\}y^{3/4} + \\ + \tilde{v}_2 y + \left\{v_2 - (\gamma + 1)^{-1/3}\left[\frac{2}{15}(6\gamma + 5)\zeta^5 + 4C^{8/3}\zeta^{7/3}\right]\right\}y^{5/4} + \ldots$$

Разложения (7) при $\zeta = 0$ совпадают с (4), а при $\zeta \to +\infty$ — с (6). Поэтому для $-\infty < \zeta \leqslant 0$ расчет течения следует вести на основе решения (4), для $0 \leqslant \zeta < +\infty$ применять разложения (7).

Метод асимптотического сращивания разложений (3), (5) обеспечивает более гладкое соединение этих решений по сравнению с численной склейкой. Внешние разложения можно продолжить в область $y < 0$. Однако пределы их применимости в сверхзвуковой зоне существенно зависят от степени излома образующей и формы стенки за изломом. Не исключено, что согласование решений (6) с условием обтекания сверхзвукового участка стенки окажется невозможным без скачка уплотнения.

В заключение выражаю искреннюю признательность С. В. Фальковичу и И. А. Чернову за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner. J. fl. mech., v. 9, № 1, 1960, p. 81—103.

2. Friedman M. P. Two-dimensional and axisymmetric rotational flows past a transonic corner. J. aero/space, v. 29, № 4, 1962, p. 503—504.

3. Белоцерковский О. М., Седова Е. С., Шугаев Ф. В. Сверхзвуковое обтекание тел вращения с изломом поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 6, № 5, 1966, с. 930—934.

4. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследования. Тр. ВЦ АН СССР. М., 1967. Авт.: Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М., и др.

5. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа. ПММ, т. 28, № 2, 1964, с. 280—284.

6. Шмыглевский Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Сб. теоретических работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957, с. 89—115.

7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., „Мир", 1967.

г. Саратов

Поступила 18 VI 1974

М. Д. Бронштейн. О необходимых условиях разрешимости задачи Гурса над пространствами Жеврея

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается система уравнений с частными производными

$$D^{\alpha^i} u_i(x) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\beta^{ij} \in B_{ij}} c_{\beta ij} D^{\beta^{ij}} u_j(x) + f_i(x), \quad i = 1, \dots, M \tag{1}$$

$$(x \in R^s, \ \alpha^i \in N^s, \ B_{ij} \subset N^s, \ c_{\beta ij} \in C).$$

Для системы (1) ставится задача Коши — Гурса

$$D^m_{x_j} u_i \big|_{x_j = 0} = 0 \quad (i = 1, \dots, M; \ j = 1, \dots, s; \ m = 0, 1, \dots, \alpha^i_j - 1). \tag{2}$$

В работе изучаются соотношения, которые должны выполняться для порядков дифференцирований α^i, β^{ij} и жевреевского показателя $\delta \equiv (\delta_1, \dots, \delta_s)$ пространства Жеврея $G(\delta)$ для того, чтобы при любых $c_{\beta ij} \in C$ и любых $f_i \in G(\delta)$ задача (1) — (2) имела локальное (глобальное) p-раз дифференцируемое решение (p — достаточно большое число). Эти соотношения являются также достаточными условиями разрешимости задачи (1), (2) при любых $c_{\beta ij} \in C$, $f_i \in G(\delta)$ в случае одиночных уравнений и систем менее общего вида. (Работа поступила в журнал „Математика" 1 X 1973.)