Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Плотников, Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами,
Докл. АН СССР, 1967, том 175, номер 6, 1238–1241

https://www.mathnet.ru/dan33290

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 15:34:31

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 175, № 6

УДК 519.3 : 51 : 62-50 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

В. И. ПЛОТНИКОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 24 X 1966)

1. В заметке ([1]) были сформулированы некоторые необходимые критерии оптимальности и теорема единственности для класса задач (класс А) на оптимизацию функционала

$$I(\mu) = \int_{\Omega} F(p, u_{\mu}(T, p))\, d\Omega \tag{1}$$

(где $\mu(t)$ — управления) при условии, что правый конец траектории системы свободен.

В настоящей заметке, являющейся продолжением ([1]), будет рассмотрен класс оптимальных задач (класс B), когда минимизируется функционал

$$I(\mu) = \int_{\Omega}\int_{0}^{T} F(t, p, u_{\mu}, Du_{\mu}, \mu(t))\, dQ, \tag{2}$$

где, как и в ([1]), $u_{\mu}(t, p)$ — обобщенное решение параболического уравнения при краевом условии третьего рода и при нулевых начальных данных. (Более подробно о символике и постановке задачи см. ([1], [2]).) Предполагается, что управления $\mu(t)$ — измеримые вектор-функции со значениями из некоторого ограниченного множества векторного пространства R^s. Кроме того, считаем, что правый конец траектории $u_{\mu}(t, p)$ стеснен некоторыми ограничениями.

2. Сделаем замечание. В отличие от конечномерного случая, в бесконечномерных пространствах задача (типа B) на оптимальный вывод траектории $u_{\mu}(t, p)$ в фиксированную достижимую точку этого пространства может потерять смысл как вариационная задача; именно, нетрудно доказать, что для класса B (при размерности $n \geqslant 2$) справедливо следующее утверждение: между множеством всех допустимых управлений $\mu(t) \in L_2(0, T)$ и множеством всех достижимых точек $u_{\mu}(T, p) \in L_2(\Omega)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

3. Переходя к основной задаче B, мы в связи с замечанием предположим, что множество $\overline{G}$ возможных значений концов траекторий $u_{\mu}(t, p)$ определяется как обобщенная окрестность с помощью функционала

$$K(t, u(p)) \equiv \int_{\Omega} \Phi(t, p, u(p))\, d\Omega$$

$$G(t) = \{u(p) \in L_2(\Omega),\ K(t, u(p) < 0)\},$$

где функция $\Phi(t, p, u)$ вместе с производной Φ_u' предполагается измеримой и p и непрерывной по $t \times u$. Считается также, что граница области G — гладкая, т. е. что если $K = 0$, то $\Phi_u'(t, p, u(p)) \not\equiv 0$.

Необходимые критерии оптимальности будут сформулированы для функционала (2) при условии, что функция F явно не зависит от Du_{μ}. Общий случай рассматривается аналогично. Предполагается, конечно, что функционал (2) имеет непрерывную производную Фреше.

Пусть теперь $\mu_0(t)$, $0 < t < T_0$, $T_0 > 0$, — оптимальные элементы нашей задачи и $\{v_m(p)\}$ — полная ортонормальная в $L_2(\Omega)$ система обобщенных собственных функций оператора, ассоциированного со стационарным уравнением задачи; $\{\lambda_m\}$ — соответствующее множество собственных чисел. Пусть, далее, $\mu_{\varepsilon,\tau}(t)$, $0 < t < T_0$ — управление, определенное равенствами (см. ([3]))

$$\mu_{\varepsilon,\tau}(t) = \begin{cases} \mu_0(t), & \text{если } t \in (\tau - \varepsilon, \tau), \\ \mu, & \text{если } t \notin (\tau - \varepsilon, \tau). \end{cases}$$

Тогда имеют место следующие формулы:

а) $\Delta I = I(\mu_{\varepsilon,\tau}) - I(\mu_0) = \varepsilon\delta I + o(\varepsilon)$,

б) $\Delta u = u_{\mu_{\varepsilon,\tau}}(T_0, p) - u_{\mu_0}(T_0, p) = \varepsilon\delta u + o(\varepsilon)$,

где δI и δu — соответствующие первые вариации.

4. Необходимые критерии оптимальности. Рассмотрим несколько возможных случаев в нашей задаче B.

I. Конец траектории лежит внутри области G. Нетрудно видеть, что в этом случае необходимым условием оптимальности управления $\mu_0(t)$ является неотрицательность первой вариации δI: $\delta I(\tau, \mu) \geqslant 0$ для почти всех $\tau \in (0, T_0)$ и всех μ *. Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть $u_{\mu_0}(T_0, p) \in G$. Если $\mu_0(t)$ оптимально, то (для почти всех τ)*

$$\inf_{\mu \in \Pi^s} \left\{ \int_\Omega F(\mu)\, d\Omega + \sum_m \int_\Sigma \int_\tau^T v_m F_m(t)\, g(\mu)\, e^{-\lambda_m(t-\tau)}\, dt\, d\Sigma \right\} =$$

$$= \int_\Omega F(\mu_0(\tau))\, d\Omega + \sum_m \int_\Sigma \int_\tau^T v_m F_m(t)\, g(\mu_0(\tau))\, e^{-\lambda_m(t-\tau)}\, dt\, d\Sigma,$$

где Π^s — область управления; $g(\mu)$ — правая часть в краевых условиях третьего рода;

$$F_m(t) = \int_\Omega F'_u v_m(p)\, d\Omega.$$

Рассмотрим простейший пример. Пусть функционал имеет вид

$$I(\mu) = \int_0^1 [u_\mu - u(x)]^2\, dx + \gamma \int_0^T \mu^2(t)\, dt, \quad \gamma > 0, \quad |\mu| \leqslant 1,$$

и решается третья краевая задача (как в ([4])) для уравнения $u_t = u_{xx}''$. В силу теоремы 1 получаем для всех $\tau \in (0, T)$:

$$\mu_0^2(T) + \frac{1}{\gamma} \sum_m \mu_0(\tau)\, F_m a_m e^{-\lambda_m(T_0-\tau)} = \min_{|\mu| \leqslant 1} \left\{ \mu^2 + \frac{1}{\gamma} \sum_m \mu F_m a_m e^{-\lambda_m(T_0-\tau)} \right\},$$

т. е. в этом случае оптимальное управление всегда инерционно (непрерывно).

II. Более важным для приложений является случай, когда конец траекторий лежит на границе области G, т. е.

$$\int_\Omega \Phi(T_0, p, u_{\mu_0}(T_0, p))\, d\Omega = 0.$$

---

* Очевидно, этот случай можно включить в класс задач со свободным правым концом, ибо при выводе формул а) и б) использовались лишь локальные вариации $u_{\mu_0}(t, p)$.

Рассмотрим сначала особый случай, когда $\delta I \equiv 0$, но время T_0 заранее не фиксировано; именно, пусть

$$I(T) = \int_0^T \int_\Omega F(t, p)\, dQ \tag{3}$$

и функционал (3) удовлетворяет условию

$$I(T_1) > I(T_2), \quad \text{если } T_1 > T_2 \tag{4}$$

(сюда входит случай задачи на быстродействие).

Для этого случая имеет место следующий критерий:

Теорема 2. *Если функционал задачи B удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для почти всех* τ

$$\inf_{\mu \in \Pi^s} \left\{ \sum_m \Phi_m \int_\Sigma v_m(p)\, g(\mu)\, d\Sigma\, e^{-\lambda_m (T_0 - \tau)} \right\} =$$

$$= \sum_m \Phi_m \int_\Sigma v_m(p)\, g(\mu_0(\tau))\, d\Sigma\, e^{-\lambda_m (T_0 - \tau)},$$

где

$$\Phi_m = \int_\Omega v_m(p)\, \Phi'_u(T_0, p, u_\mu(T_0, p))\, d\Omega.$$

Пусть теперь при некоторых τ и μ $\delta I < 0$. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение конус достижимости K (см. ([3])), определяемый как совокупность векторов $(\delta I, \delta u)$, выходящих из точки $(I(\mu_0(t)), u_{\mu_0}(T_0, p))$ пространства $(-\infty < I < +\infty \times L_2(\Omega))$ и являющихся главными линейными частями приращений ΔI и Δu на проварьированных управлениях, заданных равенствами

$$\mu_{\tau, \varepsilon, \beta_j^k}(t) = \begin{cases} \mu_j^k, & \text{если } t \in \left(\tau_j - \varepsilon \sum\limits_{p=1}^{k} \beta_j^p,\ \tau_j - \varepsilon \sum\limits_{p=1}^{k-1} \beta_j^p\right), \\ \mu_0(t), & \text{если } t \notin \left(\tau_j - \varepsilon \sum\limits_{p=1}^{k} \beta_j^p,\ \tau_j - \varepsilon \sum\limits_{p=1}^{k-1} \beta_j^p\right). \end{cases}$$

Все τ_j считаются различными точками Лебега, $\beta_j^k \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, l_j$; $\mu_j^k \in \Pi^s$.

Отметим, что конус K — выпуклое множество в $(-\infty < I < +\infty \times \times L_2(\Omega))$. Легко установить также, что он не имеет общих точек с внутренностью угла (I, Φ), определяемого неравенствами

$$I \leqslant I[\mu_0(t)],$$

$$\int_\Omega \Phi'_u \bar{u}(p)\, d\Omega \leqslant \int_\Omega \Phi'_u u_{\mu_0}(T_0, p)\, d\Omega.$$

Так как угол (I, Φ) есть выпуклое тело в пространстве $(R^1 \times L_2(\Omega))$, то, по теореме об отделимости ([5]), существует константа $C \geqslant 0$ такая, что

$$C\, \delta I + \int_\Omega \Phi'_u(T_0, p, u_{\mu_0}(T_0, p))\, \delta u\, d\Omega \geqslant 0 \tag{5}$$

для произвольных векторов $(\delta I, \delta u)$ конуса K. Из (5) получаем необходимые условия оптимальности в случае, когда $\delta I < 0$ при некоторых τ и μ — теорему 3, аналогичную теоремам 1 и 2 с очевидными изменениями (вытекающими из (5)).

Рассуждая так же. как и при выводе (5), мы видим, что всегда (т. е. независимо от знака δI) существуют две константы $C \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$, $C + \sigma > 0$, такие, что

$$C\,\delta I + \sigma \int\limits_{\Omega} \Phi'_u \delta u\, d\Omega \geqslant 0$$

для любых векторов $(\delta I, \delta u)$ конуса K. Отсюда следует общий критерий оптимальности $\mu_0(t)$ вне зависимости от знака δI, аналогичный теореме 3.

5. Все предыдущие рассуждения (с очевидными изменениями) остаются в силе, если заменить область G, образованную с помощью функционала K, произвольной, но выпуклой областью $G^* \subset L_2(\Omega)$.

6. Аналогичные критерии можно сформулировать и для более общих оптимальных задач, когда управление сосредоточено не только на границе, но и внутри области определения параметров Ω.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
30 IX 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Плотников, ДАН, **170**, № 2 (1966). [2] В. И. Плотников, ДАН, **165**, № 1 (1965). [3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Б. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [4] Ю. В. Егоров, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **3**, № 5 (1963). [5] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы (общая теория), М., 1962.