М. М. Арсланов, О структуре степеней ниже $0'$, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, номер 7, 27–33

Поскольку, имея ответы на все вопросы „$f_i \in U(R_j)$?“, можно распознать, полна ли система, используя не более $O(m)$ операций, где m — число функций, и $m = O(N)$, то теорема доказана.

В заключение отметим, что теорема 1 о ступенчатых билинейных алгоритмах допускает обобщение на так называемые приближенные алгоритмы [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Б., Емельянов Н. Р. Метод построения быстрых алгоритмов в k-значной логике // Матем. заметки.— 1985.— Т. 38.— № 1.— С. 148—156.

2. Schönhage A., Strassen V. Schnelle Multiplikation grosser Zahlen // Computing.— 1971.— V. 7.— № 3—4.— P. 281—292.

3. Rosenberg I. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci.— Paris, 1965.— V. 260.— S. 3817—3819.

4. Емельянов Н. Р. Об одном подходе к построению эффективных алгоритмов распознавания полноты в многозначных логиках // Матем. заметки.— 1986.— Т. 39.— № 5.— С. 766—775.

5. Schönhage A. Partial and total matrix multiplication // SIAM J. Comput.— 1981.— V. 10.— № 3.— P. 434—455.

г. Москва

Поступила
16.02.1988

М. М. Арсланов

УДК 510.5

О СТРУКТУРЕ СТЕПЕНЕЙ НИЖЕ 0′

Множество $A \subseteq \omega$, $\omega = \{0, 1, \dots\}$, называется n-рекурсивно перечислимым (n-р. п.), если $A = \lim_s A_s$ для некоторой рекурсивной последовательности общерекурсивных функций $\{A_s\}_{s \in \omega}$ такой, что для всех x $A_0(x) = 0$ и $|\{s : A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| \leqslant n$. Множество A называется ω-р. п., если для некоторой общерекурсивной функции f и для всех x $|\{s : A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| \leqslant f(x)$ (множество A f-р. п.). Ясно, что единственным 0-р. п. множеством является пустое множество $\varnothing$, 1-р. п. множества — это обычные р. п. множества, а 2-р. п. множествами являются разности р. п. множеств (d-р. п. множества).

Для $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$ тьюринговая степень называется α-р. п., если она содержит какое-нибудь α-р. п. множество; она называется собственно α-р. п. степенью, если является α-р. п., но не β-р. п. степенью ни для какого $\beta < \alpha$. В [1] мы доказали, что если f, g — общерекурсивные функции, rang(g) бесконечен, то A f-р. п. $\Rightarrow A$ g-р. п.

С. Б. Купер [2] установил, что собственно d-р. п. степени существуют. Этот результат легко обобщается на случай n-р. п. степеней для произвольного $n > 2$. А. Лахлан доказал, что для любой d-р. п. степени $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ найдется такая р. п. степень $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}$. Результат Лахлана также легко обобщается: для произвольных m, n, $1 \leqslant m < n$, для любой n-р. п. степени $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ существует m-р. п. степень $\boldsymbol{b}$ такая, что $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}$. Комбинируя этот результат с методом разрешения (описание метода см. в доказательстве теоремы 1), Л. Хей и М. Лерман доказали (см. [3]), что для любых $m, n > 0$, для любой n-р. п. степени $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ существует m-р. п. степень $\boldsymbol{b}$ такая, что $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.

В [4] мы установили, что для произвольного $n > 1$ существуют такие n-р. п. степени $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ и ни для какой $(n-1)$-р. п. степени $\boldsymbol{c}$ справедливо $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}$ р. п. относительно $\boldsymbol{a}$, тогда $\boldsymbol{b}$ называется $\boldsymbol{a}$-REA-степенью [5]; $\boldsymbol{b}$ называется n-REA-степенью, если $n = 1$ и $\boldsymbol{b}$ р. п., либо $n > 1$ и для некоторой $(n-1)$-REA-степени $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{b}$ р. п. относительно $\boldsymbol{a}$. Лахлан доказал, что каждая n-р. п. степень для $n \geqslant 1$ является и n-REA-степенью. В [4] мы установили, что для степеней, расположенных ниже $\boldsymbol{0}'$, обратное утверждение неверно: для произвольного $n \geqslant 2$ существует n-REA-степень $\boldsymbol{a}$, которая не является n-р. п.-степенью. Позднее такое утверждение появилось также в работе К. Джокуша и Р. Шора [5].

Дальнейшие результаты о d-р. п. степенях приведены в нашей заметке [6]. В частности, установлено следующее.

1. Для любой степени $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{0}'$, если $\boldsymbol{a}$ р. п., то существует собственно d-р. п. степень $\boldsymbol{b}$ такая, что $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}'$.

2. Для каждой d-р. п. степени $d > \boldsymbol{0}$ существует d-р. п. степень $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}'$ такая, что $d \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}'$. Известно (С. Е. М. Ейтс и С. Б. Купер [7]), что это утверждение ложно для р. п. степеней. Поэтому верхние полурешетки р. п. и d-р. п. степеней не элементарно эквивалентны. Вопрос об элементарной эквивалентности этих полурешеток был поставлен в [3].

Ниже мы приводим подробные доказательства этих двух утверждений. Условимся об обозначениях. Стандартные нумерации р. п. множеств, одноместных частично-рекурсивных функций и частично-рекурсивных с оракулом A функций обозначаются соответственно через $\{W_x\}$, $\{\varphi_x\}$ и $\{\varphi_x^A\}$. Характеристическая функция множества A обозначается той же буквой: $A(x) = 1$, если $x \in A$, и $A(x) = 0$, если $x \overline{\in} A$. Тьюринговую сводимость множества A к множеству B обозначим через $A \leqslant_T B$. Если $A \leqslant_T B$ и $B \leqslant_T A$, то $A \equiv_T B$. Для множеств A и B $A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x+1 : x \in B\}$. Множество $A \cap \{0, 1, \ldots, x\}$ обозначаем через $A[x]$; $|A|$ — мощность множества A. По определению $A' = \{x : \varphi_x^A(x)\downarrow\}$, где для функции f запись $f(x)\downarrow$ означает, что $x \in \mathrm{dom}(f)$. В противном случае пишем $f(x)\uparrow$. Через $W_{e,s}$ обозначим подмножество W_e, полученное после s шагов перечисления W_e. Аналогично, $\varphi_{e,s}(x)$ означает $\varphi_e(x)$, если вычисление значения $\varphi_e(x)$ завершается за s шагов, в противном случае $\varphi_{e,s}(x)\uparrow$. Как обычно, для функции $\varphi_e^A(x)$ $\mathrm{use}(A, e, x)$ означает такое наименьшее число t, что при вычислении $\varphi_e^A(x)$ вопросы оракулу A задаются из интервала $[0, \ldots, t)$; $\mathrm{use}(A, e, x, s)$ определена и равна $\mathrm{use}(A, e, x)$, если $\varphi_e^A(x)$ вычисляется за s шагов, в противном случае $\mathrm{use}(A, e, x, s)$ не определена. Наконец, для $x > 0$ $(x)_0$ означает показатель степени числа 2 в разложении x на простые множители.

Теорема 1. *Пусть A — нерекурсивное р. п. множество. Существуют такие р. п. множества B и C, что:* 1) $B - C <_T \varnothing'$; 2) $\varnothing' \leqslant_T A \oplus (B - C)$.

Доказательство. Для выполнения условия 1) построим р. п. множества B и C так, чтобы $A \overset{\text{не}}{\leqslant}_T B - C$. Последнему условию удовлетворяем с помощью стратегии, разработанной Дж. Саксом (см. [1], с. 66): для удовлетворения требованию R_e: $A \neq \varphi_e^{B-C}$, где $e \in \omega$, на каждом шаге конструкции, на котором рассматривается R_e, находим наибольшее число x такое, что $A_s[x] = \varphi_{e,s}^{B_s - C_s}[x]$, и запрещаем для множества $B - C$ интервал $[0, u)$, где $u = \max\{\mathrm{use}(B_s - C_s, e, t, s) : t \leqslant x\}$. Запрету присваиваем приоритет e. Для удовлетворения R_e этого достаточно. Действительно, если, напр., $A = \varphi_e^{B-C}$, то множество A рекурсивно: пусть s — шаг, к которому требования с большими приоритетами удовлетворены. Для вычисления $A(x)$ для произвольного x находим шаг $n \geqslant s$ такой, что $A_n[x] = \varphi_{e,n}^{B_n - C_n}[x]$. Такой шаг найдется, и должно быть $A(x) = A_n(x)$.

Для выполнения условия 2) используем „метод разрешения", разработанный Р. Фридбергом, А. А. Мучником, С. Е. М. Ейтсом и описанный, напр., в [1] (с. 31). Стратегия заключается в следующем. Пусть K — креативное множество. Для каждого $x \in N$ определяем интервал $(0, u_x)$ и ждем перечисления числа x в K. Если $x \in K_s - K_{s-1}$, то для некоторого $t \geqslant s$ добиваемся выполнения либо неравенства $A[u_x] \neq A_t[u_x]$, либо неравенства $B - C[u_x] \neq B_t - C_t[u_x]$. Если вам удастся это сделать для каждого $x \in N$, то $K \leqslant_T A \oplus (B - C)$, т. к., очевидно, $K(x) = K_s(x)$, где s — тот шаг, для которого $A_s \oplus (B_s - C_s)[u_x] = A \oplus (B - C)[u_x]$. Ясно, что выполнение первого неравенства от нашего желания не зависит, а выполнению второго неравенства могут препятствовать запреты, созданные в процессе работы по первой стратегии (для удовлетворения R_e). Поэтому мы поступаем следующим образом.

При перечислении x в K_s некоторое число $u \leqslant u_x$ включаем в B (игнорируя любые запреты) и ждем изменения $A[u_x]$. Если для некоторого $t > s$

$A_s[u_x] \neq A_t[u_x]$, то u включаем в C (удаляем из $B-C$). Из конструкции будет видно, что таким образом эти две стратегии могут быть успешно соединены.

Обозначим через P_e требование

$$e \in K_s - K_{s-1} \Rightarrow A_s[u_e] \neq A[u_e] \vee (B_s - C_s)[u_e] \neq (B-C)[u_e]$$

и примем следующее приоритетное упорядочение требований: $P_0, R_0, P_1, R_1, \ldots$

Разъяснение конструкции. Последовательно для чисел $0, 1, \ldots$, еще не перечисленных в K, устанавливаем маркеры $u_0, u_1, u_2, \ldots$ так, чтобы они располагались правее всех запретов. Как только некоторое число i перечислится в K_s, добиваемся выполнения $A_s \oplus (B_s - C_s)[u_i] \neq A \oplus (B-C)[u_i]$. Но может случиться, что $A_s[u_i] = A[u_i]$, а интервал $(0, u_i)$ входит в зону некоторого запрета с большим приоритетом. Чтобы это не произошло, как только некоторое требование R_e, $e < i$, создаст запреты, содержащие $(0, u_i)$, мы тут же этот маркер u_i передвигаем направо, располагая его правее всех запретов. При этом мы вынуждены число $u_{i,s}$ — позицию маркера u_i на шаге s — перечислить в B (иначе могло бы оказаться $A_{s'} \oplus (B_{s'} - C_{s'})[u_{i,s'}] = A \oplus (B-C)[u_{i,s'}]$ для $s' < s$, но $i \in K_s - K_{s'}$). Таким образом, мы нарушаем запрет требования R_e ради удовлетворения требования P_i, имеющего меньший приоритет. Это может привести к последующему увеличению запрета R_e, в результате чего u_i снова может оказаться в зоне запрета R_e. Тогда снова передвигаем u_i, перечислив $u_{i,s'}$ в B и т. д. Одновременно следим за поведением множества A в интервалах $(0, u_{i,s})$, $s \in N$. Для некоторого s должно случиться, что $A_s[0, u_{i,s}] \neq A[0, u_{i,s}]$, иначе A рекурсивно. Как только для некоторого s $A_s[u_{i,s}] \neq A[u_{i,s}]$, то все числа $u_{i,s'}$, $s' \leqslant s$, перечисленные в B при передвижении u_i, перечисляем в C ($u_{i,s'}$ убираем из $B-C$), добиваясь выполнения R_e.

Кроме того, как только $i \in K_s$ и $u_{i,s}$ не входят в зону запрета с большим приоритетом, то число $u_{i,s}$ перечисляем в B.

Перейдем к подробному изложению конструкции. Пусть $A_0 = B_0 = A_1 = B_1 = \varnothing$. Для удобства фиксируем такое перечисление элементов К, что $\forall s > 0\, (K_{2s} - K_{2s-1} = \varnothing \,\&\, |K_{2s-1} - K_{2s-2}| \leqslant 1)$.

В процессе конструкции устанавливаем маркеры $\{u_i\}_{i \geqslant 0}$. Позицию маркера u_i к концу шага s обозначим через $u_{i,s}$. На каждом шаге будет задействовано только конечное множество маркеров. На шаге $s+1$ $u_{i,s+1} = u_{i,s}$, если маркер u_i не перемещается на новую позицию. Число называется свободным на шаге s, если оно строго больше как всех запрещенных к шагу s чисел, так и позиций всех маркеров, установленных к шагу s.

Шаг $2s$, $s > 0$. Пусть $(s)_0 = e$. Находим наибольшее число x, для которого $A_{2s}[x] = \varphi_{e,2s}^{B_{2s}-C_{2s}}[x]$, и запрещаем с приоритетом e для множества $B-C$ интервал $(0, u)$, где $u = \max\{\mathrm{use}(B_{2s} - C_{2s}, e, t, 2s) : t \leqslant x\}$. Переходим к шагу $2s+1$.

Шаг $2s+1$, $s \geqslant 0$. 1°. а) Для каждого e перемещаем все не исключенные из рассмотрения маркеры u_i, $i > e$, оказавшиеся в зоне запрета R_e и для которых $i \in K_{2s+1}$, направо на первые свободные места, сохраняя порядок их расположения. Перечисляем число $u_{i_0,2s}$, позицию левого крайнего такого маркера, в B_{2s+1} (теперь для всех таких маркеров u_i имеем $B_{2s} - C_{2s}[u_{i,2s}] \neq B - C[u_{i,2s}]$). б) Маркеры u_j, $j > i$, расположенные правее таких u_i и также не исключенные из рассмотрения, передвигаем вместе с u_i, сохраняя порядок расположения маркеров.

2° Для каждого не исключенного из рассмотрения маркера u_i, перемещенного в п. 1° а) одного из нечетных шагов $2s'+1$, $s' \leqslant s$, на новую позицию, проверяем условие $\exists t\, (t_0 \leqslant t \leqslant 2s \,\&\, A_{2s+1}[u_{i,t}] \neq A_t[u_{i,t}])$, где t_0 — шаг, для которого $i \in K_{t_0} - K_{t_0-1}$. Если это условие выполняется, то все позиции $u_{i,t}$, $t_0 \leqslant t \leqslant 2s$, перечисленные в B (но не в C), перечисляем в C_{2s+1}, и маркер u_i исключаем из дальнейшего рассмотрения,

3°. Находим (если существует) число $x \in K_{2s+1} - K_{2s}$. Если маркер u_x уже установлен и число $u_{x,2s}$ не входит в зону запрета некоторого требования с большим приоритетом, то число $u_{x,2s}$ перечисляем в B_{2s+1}, и маркер u_i исключаем из рассмотрения.

4°. Находим наименьшее число $x \in \overline{K}_{2s+1}$, для которого маркер u_x еще не установлен, устанавливаем u_x возле первого свободного числа. Переходим к шагу $2s+2$.

Лемма 1. *Каждый маркер передвигается конечное число раз.*

Доказательство. Пусть i — наименьшее число такое, что u_i передвигается бесконечно и s — шаг, после которого u_j, $j < i$, не передвигаются. После шага s передвижение u_i означает, что некоторое R_e, $e < i$, создает все новые и новые запреты, вынуждая u_i передвигаться на новые позиции. Это значит, что мы больше не имеем дело с п. 2°, т. е. для каждой новой позиции $u_{i,s}$ $A_{2s+1}[u_{i,s}] = A[u_{i,s}]$. Это означает рекурсивность A.

Лемма 2. *Каждое требование R_e удовлетворяется, т. е. $A \neq \varphi_e^{B-C}$ и R_e создает конечное множество запретов.*

Доказательство. Пусть $A = \varphi_e^{B-C}$ и $\forall i < e$ (R_i удовлетворено). По лемме 1 найдется шаг s, после которого маркеры u_i, $i \leqslant e$, больше не передвигаются, и R_i, $i < e$, новых запретов не создают. Теперь либо найдется шаг $s_1 > s$, начиная с которого запреты, наложенные из-за R_e, больше не будут нарушаться, либо некоторый u_j, $j > e$, передвигаясь бесконечно часто, эти запреты бесконечно часто нарушает. При этом условие п. 2° шага $2s+1$ не должно выполняться, иначе, перечисляя соответствующие числа в C, мы эти запреты восстанавливаем. Это снова (см. доказательство леммы 1) означает, что множество A рекурсивно.

Лемма 3. $K \leqslant_T A \oplus (B - C)$.

Доказательство. По произвольному $x \in N$ находим первый шаг s такой, что либо $x \in K_s$, либо на шаге s устанавливается маркер u_x. Если $x \in K_s$, то $x \in K$. Если $x \in \overline{K}_s$, то находим такую позицию u_{x,s_1} маркера u_x, что $A[u_x, s_1] = A_{s_1}[u_{x,s_1}]$ и $B_{s_1} - C_{s_1}[u_{x,s_1}] = B - C[u_{x,s_1}]$ (по лемме 1 такой шаг найдется). По конструкции имеем $x \in K \Leftrightarrow x \in K_{s_1}$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Для любой нерекурсивной разности $A_1 - A_2$ р. п. множеств A_1 и A_2 найдется разность $B - C$ р. п. множеств B и C такая, что $B - C <_T \varnothing'$ и $(A_1 - A_2) \oplus (B - C) \equiv_T \varnothing'$.*

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначная функция такая, что f общерекурсивна и $\operatorname{rang}(f) = A_1$. Легко проверить, что множество $A \leftrightarrows f^{-1}(A_2)$ р. п. и $\varnothing <_T A \leqslant_T A_1 - A_2$. Пусть B и C — р. п. множества, построенные в теореме 1 по множеству A. Имеем $B - C <_T \varnothing'$ и $\varnothing' \equiv_T A \oplus (B - C) \leqslant_T (A_1 - A_2) \oplus (B - C) \leqslant_T \varnothing'$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Полурешетки р. п. степеней и степеней, содержащих разности р. п. множеств, не элементарно эквивалентны.*

Доказательство. С. Б. Купер и С. Е. М. Ейтс установили (см., напр., [4], с. 187), что предложение $\exists \boldsymbol{a} (\boldsymbol{a} > 0 \,\&\, \forall \boldsymbol{b} < 0' (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} < 0'))$ в полурешетке р. п. степеней истинно. В теореме 2 доказано, что оно ложно в полурешетке степеней, содержащих разности р. п. множеств.

Следствие 2. *Существует такая собственно d-р. п. степень $\boldsymbol{a} < 0'$, что между $\boldsymbol{a}$ и $0'$ нет р. п. степеней.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}$ — такая р. п. степень, что $\boldsymbol{a} > 0$ и $\forall \boldsymbol{b} < 0' (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} < 0')$. По теореме 1 существует d-р. п. степень $\boldsymbol{b} < 0'$, для которой $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = 0'$. Между $\boldsymbol{b}$ и $0'$ нет р. п. степеней.

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{a} > 0$ есть n-р. п. степень, $1 < n < \omega$. Существует d-р. п. степень $\boldsymbol{b} < 0'$ такая, что $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = 0'$.*

Доказательство. Известно (см. [1], теорема 7-III), что существует такая р. п. степень $\boldsymbol{a}_1$, что $0 < \boldsymbol{a}_1 \leqslant \boldsymbol{a}$. По теореме 1 существует d-р. п. степень $\boldsymbol{b}$ такая, что $\boldsymbol{a}_1 \cup \boldsymbol{b} = 0'$; $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = 0'$.

Следствие 3. *Полурешетки р. п. степеней и степеней, содержащих n-р. п. множества для произвольных фиксированных n, $1 < n < \omega$, не элементарно эквивалентны.*

Для доказательства см. доказательство следствия 1 теоремы 2.

В теореме 4 доказывается, что над каждой р. п. степенью $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}'$ находится собственно d-р. п. степень.

Теорема 4. *Пусть A — не T-полное р. п. множество. Существуют р. п. множества B и C, для которых*

$$A <_T B - C <_T \varnothing' \text{ и } \forall x (W_x \not\equiv_T B - C).$$

Доказательство. Искомые р. п. множества строим по шагам, удовлетворяя для каждого $x = \langle e, i, j \rangle$, где $\langle e, i, j \rangle$ — канторовская нумерация троек натуральных чисел, требованию

$$R_x : A \oplus (B - C) \neq \varphi_i^{W_e} \vee W_e \neq \varphi_j^{A \oplus (B-C)}. \qquad (1)$$

При доказательстве мы используем описанную нами в [1] (теорема 2-1) конструкцию р. п. множеств B и C, $C \subset B$, T-степень разности которых $B - C$ не содержит р. п. множества. Искомые множества строятся методом приоритета с конечными нарушениями. Напомним эту конструкцию.

Для удовлетворения требованию $R'_x : B - C \neq \varphi_i^{W_e} \vee W_e \neq \varphi_j^{B-C}$:

а) берем некоторое число a, еще не положенное в B и не задержанное какими-либо запретами, и ждем такого шага s, на котором

$$0 = B_s - C_s(a) = \varphi_{i,s}^{W_{e,s}}(a) \,\&\, W_{e,s}[u'] = \varphi_{j,s}^{B_s - C_s}[u'], \qquad (2)$$

где $u' = \operatorname{use}(W_{e,s}, i, a, s)$ (если такой шаг s не встретится, то требование R'_x удовлетворено);

б) включаем число a в B_{s+1} (нарушаем левый конъюнкт соотношения (2)) и запрещаем с приоритетом x интервал $(0, u)$, где $u = \max\{\operatorname{use}(B_{s+1} - C_{s+1}, j, t, s+1) : t \leqslant u'\}$;

в) ждем появления шага $s_1 > s$ такого, что

$$1 = B_{s_1} - C_{s_1}(a) = \varphi_{i,s_1}^{W_{e,s_1}}(a) \,\&\, W_{e,s_1}[u'_1] = \varphi_{j,s_1}^{B_{s_1} - C_{s_1}}[u'_1], \qquad (3)$$

где $u'_1 = \operatorname{use}(W_{e,s_1}, i, a, s_1)$ (если такой шаг s не встретится, то требование R'_x снова удовлетворено);

г) включаем число a в C_{s_1+1} и запрещаем с приоритетом x интервал $u_1 = \max\{\operatorname{use}(B_{s_1+1} - C_{s_1+1}, j, t, s_1) : t \leqslant u'_1\}$.

Теперь требование R'_x окончательно удовлетворено, т. к. левый конъюнкт соотношения (2) на шаге s_1 стал, как на шаге s, $B_{s_1} - C_{s_1}[u] = B_s - C_s[u]$, а $W_{e,s} \subset W_{e,s_1}[u]$, т. к. правый конъюнкт соотношения (3) мог выполниться только из-за перечисления в W_e между шагами s и s_1 новых элементов.

Для завершения доказательства для всех x производим приоритетное упорядочение всех требований R'_x и проводим обычную приоритетную конструкцию, при каждом нарушении запретов требования R'_x выбирая новое число a.

Единственная трудность, которая встречается при использовании этой конструкции для удовлетворения соотношения (1), — появление множества A в оракулах равенств $W_{e,s}[u'] = \varphi_{j,s}^{A_s \oplus (B_s - C_s)}[u']$ и $W_{e,s}[u'] = W_{e,s_1}[u'_1] = \varphi_{j,s_1}^{A_{s_1} \oplus (B_{s_1} - C_{s_1})}[u'_1]$ в соотношениях (2) и (3) соответственно: после достижения равенств (2) или (3) (если они не будут достигнуты, то требование R_x удовлетворено) может измениться множество A в соответствующем отрезке, что в свою очередь может привести к нарушению (2) и (3). Для преодоления этой трудности используем, как и при доказательстве теоремы 1, метод разрешения, пытаясь эти изменения множества A использовать для T-сведения креативного множества K к A. Мы снова с каждым числом i связываем маркер u_i и пытаемся добиться соотношения $i \in K_s - K_{s-1} \Rightarrow \exists t \geqslant s \{A_t[u_{i,t}] \neq A[u_{i,t}]\}$, где $u_{i,t}$ — текущая позиция маркера u_i.

Опишем конструкцию более подробно.

Для удовлетворения R_x берём некоторое число a, ещё не положенное в B и не задержанное запретами, и:

а) ждем такого шага s, на котором

$$0 = A_s \oplus (B_s - C_s)(a) = \varphi_{i,s}^{W_{e,s}}(a) \,\&\, W_{e,s}[u'] = \varphi_{j,s}^{A_s(B_s - C_s)}[u'], \tag{4}$$

где $u' = \mathrm{use}(W_{e,s}, i, a, s)$ (если такой шаг не встретится, то требование R_x удовлетворено);

б) число a пока в B_{s+1} не включаем, а:

б1) устанавливаем маркер u_0, выбирая его позицию

$$u_{0,s} = 1 + \max\{\mathrm{use}(A_s \oplus (B_s - C_s), j, t, s) : t \leqslant u'\};$$

б2) ждем перечисления числа 0 в K;

б3) одновременно берем новое число a_1, еще не положенное в B и не задержанное требованиями $\{R_x\}_{x\in N}$, для него снова ждем выполнения соотношения (4); при его выполнении устанавливаем маркер u_1, выбирая его позицию как для маркера u_0 с заменой a на a_1; ждем перечисления 1 в K; берем новое число a_2 и т. д.

Как только в этом процессе на некотором шаге s' мы дождемся перечисления какого-нибудь числа, напр., числа 0 в $K_{s'}$, то:

в) число a включаем в $B_{s'+1}$ (нарушаем левый конъюнкт (4)) и запрещаем с приоритетом x интервал $(0, u_0')$, $u_0' = \max\{\mathrm{use}(B_{s'+1} - C_{s'+1}, j, t, s'+1) : t \leqslant u'\}$;

г) ждем появления шага $s_1 > s$ такого, что

$$1 = A_{s_1} \oplus (B_{s_1} - C_{s_1})(a) = \varphi_{i,s_1}^{W_{e,s_1}}(a) \,\&\, W_{e,s_1}[u_0''] = \varphi_{j,s_1}^{A_{s_1} \oplus (B_{s_1} - C_{s_1})}[u_0''], \tag{5}$$

где $u_0'' = \mathrm{use}(W_{e,s_1}, i, a, s_1)$;

д) включаем число a в C_{s_1+1} и запрещаем с приоритетом x интервал $(0, u_0)$, $u_0 = \max\limits_{t \leqslant u_0''}\{\mathrm{use}(A_{s_1+1} \oplus (B_{s_1+1} - C_{s_1+1}), j, t, s_1)\}$.

При этом:

е) как только множество A изменится в интервале, входящем в оракул из (4) и (5) для очередного числа a_i, весь процесс начинаем сначала, с п. а) для этого a_i. Заметим, что бесконечное возвращение в п. а) из п. е) для некоторого a_i означает, что функция $\varphi_j^{A \oplus (B-C)}$ не всюду определена и поэтому требование R_x удовлетворено.

Как только для удовлетворения какого-нибудь требования R_x в B или C перечислим некоторое число, то весь описанный процесс удовлетворения требования R_y, $y > x$, начинаем сначала. Мы полагаем, что для $x < y$ требование R_x имеет больший, чем R_y, приоритет, и в процессе удовлетворения требования R_x игнорируем запреты R_y.

Если для удовлетворения какого-нибудь требования R_x в пп. в) или д) в B или C перечислим некоторое число a_i, входящее в зону запрета того же требования, созданную с числом a_j, $i \neq j$, то процесс удовлетворения требования R_x посредством a_j начинаем сначала: выбираем новое число a_j, ждем выполнения соотношения (4), устанавливаем маркер u_j на новую позицию и т. д.

Ясно, что либо для некоторого a_i этот процесс должен завершиться успешно (после п. б) п. в) не встречается, и множество A в интервале $(0, u_i)$ не меняется, либо после п. б) мы приходим в п. в), и множество A в интервале $(0, u_i)$ не меняется), либо при каждом перечислении i в K попытка удовлетворения (4) и (5) в пп. б) и в) наталкивается на изменение множества A в интервале $(0, u_i)$. Но последнее теперь означает, что $K \leqslant_T A$: для вычисления $K(i)$ для произвольного i находим шаг s и число $u_{i,s}$, позицию маркера u_i на шаге s такие, что $A_s[u_{i,s}] = A[u_{i,s}]$. По конструкции имеем $K(i) = K_s(i)$. Теорема доказана.

Заметим, что подробное доказательство третьего утверждения из [6] (для любой d-р. п. степени $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{0}'$ существуют d-р. п. степени $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ такие, что $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \mathbf{0}'$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c} < \mathbf{0}'$, $\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c} = \mathbf{0}'$) приведено в [8]. При этом на самом деле получаются следующие утверждения.

1. Для любой р. п. степени $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}'$ существуют ω-р. п. степени $\boldsymbol{b} < \mathbf{0}'$, $\boldsymbol{c} < \mathbf{0}'$ такие, что $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c} = \mathbf{0}'$.

2. Для любой d-р. п. степени $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}'$ существуют степени $\boldsymbol{b} < \mathbf{0}'$, $\boldsymbol{c} < \mathbf{0}'$ такие, что $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c} = \mathbf{0}'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсланов М. М. Рекурсивно перечислимые множества и степени неразрешимости.—Казань, 1986.— 206 с.
2. Cooper S. B. Degrees of unsolvability // Ph. D. Thesis.— Leicester University, 1971.
3. Epstein R. L., Haas R., Kramer R. Hierarchies of sets and degrees below $\mathbf{0}'$ // Lect. Notes Math.— 1981.— V. 859.— P. 32—48.
4. Арсланов М. М. Об одной иерархии степеней неразрешимости // Вероятн. методы и кибернетика.— 1982.— № 18.— С. 10—17.
5. Jockush C. G., Shore R. A. Pseudo jump operators. II. Transfinite iterations, hierarchies and minimal covers // J. Symb. Logic.— 1984.— V. 49.— P. 1205—1236.
6. Арсланов М. М. Структурные свойства степеней ниже $\mathbf{0}'$ // ДАН СССР.— 1985.— Т. 283.— № 2.— С. 270—273.
7. Cooper S. B. On a theorem of C. E. M. Jates // Handwritten notes.— 1974.
8. Арсланов М. М. Локальная теория степеней неразрешимости и Δ_2^0-множества.— Казань, 1987.— 140 с.

г. Казань

Поступила
16.02.1988