

СКАЧКООБРАЗНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В. П. Маслов, А. М. Чеботарев

ВВЕДЕНИЕ

Хотя фейнмановский континуальный интеграл до сих пор не был включен в общую теорию интеграла [25], [98], его физические приложения стали обычным явлением [3—6], [10—11], [31], [39—40], [56], [67—71], [77], [86—88], [92], [95], [108], [110—113], [137]. Внедрение континуального интеграла в физику и математику объясняется тем, что континуальный интеграл позволяет представить в замкнутом виде решения многих уравнений [1—4], [9—12], [22], [25—30], [34—37], [39—40], [43], [47], [50—54], [57], [60—61], [65], [69—71], [74—77], [82—89], [92—113], [117—122], [126—141], получить априорные оценки решений, исследовать их трансформационные и асимптотические свойства [5—6], [10, 12], [36], [40], [49], [57], [71], [77], [93], [95], [96], [106], [108], [110], [113], [122], [128—129], [132—133], [137], [139—140] и вычислить собственные значения некоторых операторов [31], [105], [113]. С другой стороны, существует ряд физических величин, представимых в виде континуального интеграла, для которых нет априори известных уравнений. Такой величиной является, например, среднее значение Ψ -функции электрона, движущегося в случайном электромагнитном поле. Вывод (приближенных) уравнений исходя из интегрального представления и решение этих уравнений является методом (приближенного) вычисления континуальных интегралов, используемым в физике и математике [40], [56], [137]. Существуют конструкции, позволяющие использовать континуальный интеграл для решения некоторых нелинейных уравнений (см., например, [33]). Как отмечал Фейнман (см. [69—71]), континуальный интеграл можно также использовать для квантования сложных физических систем. В работе Л. Д. Фаддеева [67] предложено обобщение конструкции континуального интеграла Фейнмана для квантования систем со связями в инволюции. Таким образом были проквантованы гравитационное

поле и поле Янга—Миллса (см. [67—68]). Однако, изложение этих важных результатов выходит за рамки нашего обзора. Читателю, интересующемуся физическими приложениями континуального интеграла, можно рекомендовать обзорные статьи [3], [10—11], [71], [77], [95], [110]. Физическая корректность многих результатов, полученных методом функционального интегрирования, позволяет надеяться, что операции с фейнмановским функциональным интегралом, используемые в физических работах, получают то или иное математическое обоснование. Последние достижения в этой области связаны с переходом к импульсному или так называемому p -представлению континуального интеграла Фейнмана.

В появившихся недавно работах [114—115], [133—135], [65], [92—93], [52—53], [50] p -представление континуального интеграла Фейнмана включается в общую теорию интегрирования, что позволяет дать корректное определение интеграла с помощью формулы Парсевала. Этот подход позволяет установить новые связи квантовой механики, теории рассеяния, теории поля и квазиклассической теории с теорией меры, теорией интеграла и теорией вероятностей. В частности, в [127] получены формулы, выражающие p -представление континуального интеграла Фейнмана через математическое ожидание функционалов скачкообразного процесса с независимыми приращениями. Заметим, что вероятностное представление интеграла Фейнмана позволяет строго обосновать применение метода Монте—Карло для его вычисления. Используя ветвящиеся марковские процессы, можно получить интегральные формулы для решений некоторых уравнений квантовой механики, содержащих нелинейные члены. В настоящей статье мы остановимся на применениях теории скачкообразных процессов к основной задаче нерелятивистской квантовой механики — задаче Коши для уравнения Шредингера и некоторым нелинейным уравнениям типа уравнения Хартри. Метод, используемый в [127] для представления решений уравнений в виде математических ожиданий функционалов скачкообразных процессов (см. [24]), мы проиллюстрируем сначала на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Как известно, решение уравнения (1) можно записать в виде континуального интеграла по вероятностной мере ω , сосредоточенной на непрерывных траекториях, удовлетворяющих гельдеровскому условию Леви. Мера ω абсолютно непрерывна относительно меры Винера ω , порождаемой фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

а потенциал $V(x)$ индуцирует абсолютно непрерывное преобразование меры ω .

Если потенциал $V(x)$ является характеристической функцией комплексной меры конечной вариации в R^n , то есть если

$$V(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{R^n} e^{-ipx} \tilde{V}(dp), \quad \int_{R^n} |\tilde{V}|(dp) < \infty, \quad (2)$$

то возможен принципиально иной подход к решению уравнения (1): решение записывается в виде континуального интеграла по комплексной мере m , сосредоточенной на непрерывных справа ступенчатых траекториях. Мера m может быть представлена в виде абсолютно непрерывного преобразования вероятностной меры ω_0 , порождаемой фундаментальным решением уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial Q(p, t)}{\partial t} = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \{Q(p+u, t) - Q(p, t)\} \Pi(du), \quad \Pi(A) = |\tilde{V}|(A),$$

а оператор Лапласа Δ индуцирует абсолютно непрерывное преобразование меры ω_0 . Равенство двух представлений решения уравнения (1) является аналогом равенства Парсевалья и может быть доказано с помощью бесконечномерного преобразования Фурье (см. [53], [82]).

Существенным ограничением, возникающим при сопоставлении меры ω_0 потенциалу $V(x)$, является условие (2), исключающее из рассмотрения все неограниченные потенциалы и не позволяющее выйти за рамки нестационарной теории возмущений. В этом смысле, данный метод является нестационарным аналогом схемы Неймана—Улама, применяемой в стационарной теории возмущений (см. [32]).

С другой стороны, в отличие от метода винеровских континуальных интегралов, в виде интеграла по мере на траекториях скачкообразного процесса удается записать не только решение уравнения теплопроводности (1), но и решения произвольного уравнения Шредингера

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \left(\frac{1}{i} \nabla_x \right) - V(x) \right\} \psi(x, t) = 0, \quad x \in R^n, \quad (3)$$

где $H(p)$ — любая непрерывная вещественная функция, в частности, $H(p) = |p|^2/2m$. Заметим, что среди ограниченных потенциалов физический интерес представляют, например, периодические функции.

В работе [127] устанавливается связь между решением уравнения (3) и скачкообразным процессом, зависящим от аргумента Фурье-образа потенциала $V(x)$. Как заметил В. Хаметов, эту связь можно интерпретировать следующим образом: существу-

ет некоторое комплексное решение обобщенного уравнения Колмогорова, соответствующего упомянутому процессу, совпадающее с общим решением уравнения (3) (см. § 2, п. 4).

По-видимому, переход от основного уравнения квантовой механики к основному уравнению теории случайных процессов возможен и в некоторых специальных случаях, когда коэффициенты уравнения неограничены. Изучение этого вопроса имеет, с нашей точки зрения, важное значение.

Представление решения уравнения Шредингера в виде математического ожидания функционала случайного процесса позволяет обосновать применение метода Монте-Карло* для вычисления решения (3) и вычислить дисперсию среднего значения. Недостатком получаемых приближенных формул является экспоненциальный рост дисперсии со временем с показателем экспоненты, пропорциональным величине $t \int_{R^n} |\bar{V}|(du)$. Тем не менее,

применение метода Монте-Карло для решения уравнения (3) представляет интерес, поскольку метод Монте-Карло устойчив в норме $C(R^n)$, тогда как построение разностных схем, устойчивых в этой норме, для уравнения (3) встречает известные трудности (см. [62]).

С квазилинейным уравнением типа Хартри

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left\{ H \left(\frac{1}{i} \nabla_x \right) + V(x) + \langle \psi, L(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q) \psi \rangle \right\} \psi(x, t), \quad (4)$$

где $H(p)$ — непрерывная вещественная функция, а $L(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q)$ — самосопряженный псевдодифференциальный оператор**, зависящий от параметра $x \in R^n$ и действующий в $\mathcal{L}_2(R^n)$ по правилу

$$L(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q) f(q) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{ipq} L(x, p, q) dp \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{-ip\xi} f(\xi) d\xi,$$

также можно связать скачкообразный процесс с ветвящейся составляющей и представить скалярное произведение $S(t) = \langle f, \psi(t) \rangle$, где $f \in \mathcal{L}_2(R^n)$, а $\psi(t)$ — решение уравнения (4) в виде среднего значения некоторого функционала траектории процесса, если $V(x)$ — Фурье-образ меры конечной вариации,

а символ $L(x, p, q)$ оператора $L(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q)$ является Фурье-образом меры конечной вариации по первым двум аргументам со значениями в пространстве абсолютно интегрируемых функций по последней переменной:

* О методе Монте-Карло и его применениях см. [13—21], [31—32], [66].

** Величина $\langle \psi, L, \psi \rangle$ называется средним значением оператора L в состоянии Ψ : $\langle f, \varphi \rangle = \int_{R^n} \bar{f}(x) \varphi(x) dx$. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

$$L(x, p, q) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-i(x\xi + \eta p)} \bar{L}(d\xi, d\eta, q), \quad \int_{R^n} dq \int_{R^{2n}} |\bar{L}(d\xi, d\eta, q)| < \infty.$$

Мера $|\bar{L}|$ определяет переходные вероятности составляющей скачкообразного процесса с ветвлением, а мера $|\bar{V}|$, также как и в случае уравнения (3), определяет переходные вероятности составляющей без ветвления. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (4) и его априорная оценка содержится в работах [50], [52], [82], [121].

Решения уравнений (3—4) порождают σ -аддитивные меры со значениями в $\mathcal{L}_2(R^n)$ на ступенчатых траекториях. Эти меры имеют смысл амплитуд вероятности квантово-механических событий, а вероятность (или интенсивность) события A вычисляется по формуле

$$I(A) = \|\psi(A)\|_{\mathcal{L}_2(R^n)}^2. \quad (5)$$

В отличие от классической теории вероятностей интенсивность (5) не является, вообще говоря, аддитивной функцией множества, а совокупность множеств, для которых выполнено традиционное условие нормировки

$$0 \leq I(A) \leq 1$$

образует лишь полукольцо (см. [50]). В работе [50] изучаются основные свойства амплитуды и интенсивности на простейшем примере так называемой комплексной марковской цепи и затем эти свойства формулируются в виде аксиом.

Предлагаемая статья состоит из четырех параграфов. В первом содержится обзор математических методов, применяемых в теории континуального интеграла Фейнмана. Во втором параграфе рассматривается обоснование представления решения уравнения Шредингера (3) в виде математического ожидания функционала скачкообразного процесса и связь уравнения Шредингера и обобщенного уравнения Колмогорова. В третьем параграфе приводится конструкция решения квазилинейного уравнения (4). Наконец, четвертый параграф посвящен свойствам комплексных марковских цепей и аксиомам комплексной вероятности.

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА

1. Метод аналитического продолжения. Метод аналитического продолжения для вычисления континуальных интегралов Фейнмана изучался Р. Камероном [97—99], Р. Камероном и Д. Сторвиком [100—104], Г. Джонсоном и Д. Скоугом [117—120], а также Д. Бэббитом [94] и Э. Нельсоном [136].

Основной прием, использованный в этих работах — аналитическое продолжение винеровского интеграла, зависящего от па-

раметра, с вещественной оси в комплексную полуплоскость — содержится в первой статье Р. Камерона [97]. Интегральным объектом здесь является последовательность конечномерных интегралов, зависящих от комплексного параметра:

$$I_{\lambda}^{(N)}[f] = \int_{R^N} f^{(N)}(\xi) w_{\lambda}^{(N)}(\xi) d^N \xi, \quad N=1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

$$w_{\lambda}^{(N)}(\xi) = \prod_{k=1}^N \exp\{-(\xi_k - \xi_{k-1})^2 / 2\lambda(t_k - t_{k-1})\} (2\pi\lambda(t_k - t_{k-1}))^{-1/2},$$

$$\lambda \in \mathbb{C}^+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in R^N, \quad \xi_0 = 0;$$

$\pi_N = (t_1, \dots, t_N)$ — разбиение отрезка $[0, t]$ точками t_1, \dots, t_{N-1} , причем $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t$, $|\pi_N| = \max_K |t_K - t_{K-1}|$

$$|\pi_N| \rightarrow 0, \text{ если } N \rightarrow \infty,$$

а основной задачей — вычисление повторного предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow p} \lim_{N \rightarrow \infty} I_{\lambda}^{(N)}[f] = J_p^{\text{seq}}[f], \quad p \neq 0, \operatorname{Re} p = 0, \quad (1.2)$$

где f — комплексная функция, определенная на множестве, состоящем из измеримых ограниченных траекторий $x_{\tau}: [0, t] \rightarrow R^1$, а $f^{(N)}$ — функция N переменных, сопоставляемая функции f и разбиению π_N по правилу:

$$f^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = f(x_{\tau}^{(N)}), \quad x_{\tau}^{(N)} = \{x_k, t_k \leq \tau < t_{k-1}\}_{k=1}^N \quad (1.3)$$

$x_{\tau}^{(N)}$ — скачкообразная кусочно-постоянная траектория, проходящая через точки $x_1, \dots, x_k, \dots, x_N$ в моменты времени $t_0, \dots, \dots, t_{k-1}, \dots, t_{N-1}$.

Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то правая часть формулы (1.1) является интегралом функции $f^{(N)}$ по комплексной мере $\mu_{\lambda}^{(N)}$, $d\mu_{\lambda}^{(N)} = w_{\lambda}^{(N)}(\xi) d^N \xi^*$, на борелевской σ -алгебре $\mathfrak{B}(R^N)$ подмножеств множества R^N , порожденной всеми множествами вида

$$B = \{a_k \leq x_k \leq b_k, 1 \leq k \leq N\},$$

называемыми цилиндрическими. С ростом N вариация комплексной меры $\mu_{\lambda}^{(N)}$ растет как степень числа большего единицы:

$$\operatorname{var} \mu_{\lambda}^{(N)} = \int_{R^N} |w_{\lambda}^{(N)}(\xi)| d^N \xi = (|\lambda| / \operatorname{Re} \lambda)^{N/2} \rightarrow \infty$$

и, следовательно, комплексные меры $\mu_{\lambda}^{(N)}$ не являются сужениями на $\mathfrak{B}(R^N)$ некоторой комплексной меры μ_{λ} , заданной на σ -алгебре \mathfrak{B} , содержащей все σ -алгебры $\mathfrak{B}(R^N)$. Поэтому способ, которым интеграл Винера был включен в теорию инте-

* Счетно-аддитивная функция множества μ , заданная на σ -алгебре \mathfrak{B} , называется комплексной мерой, если справедливо равенство $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, где μ_j — конечные меры на \mathfrak{B} .

грала Лебега (см. [72]), здесь не применим и для вычисления предела (1.2) необходима новая теория.

В рамках метода аналитического продолжения доказательство существования предела проводится в два этапа. Во-первых, выбирается такой класс функций f , чтобы для всех конечномерных интегралов (1.1) имелась равномерная оценка по N и $\lambda \in C^{+*}$.

Таким образом задается последовательность $\{I_\lambda^{(N)}[f]\}_{N=1}^\infty$ функций параметра λ , аналитических в области C^+ . Из теоремы Витали (см. [80], [81]) следует, что для существования предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_\lambda^{(N)}[f] \stackrel{\text{def}}{=} I_\lambda^{\text{seq}}[f]$$

в области C^+ достаточно, чтобы этот предел существовал при вещественных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, образующих в C^+ сходящуюся последовательность. Второй этап состоит в доказательстве существования предела $I_\lambda^{\text{seq}}[f]$ при вещественных значениях параметра $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$. Здесь либо привлекается теория интеграла Винера, обеспечивающая существование предела при $\lambda > 0$ для любой непрерывной** функции f , модуль которой мажорируется интегрируемой функцией, либо устанавливается фундаментальность последовательности $\{I_\lambda^{(N)}[f]\}_{N=1}^\infty$. Таким образом, функция $I_\lambda^{\text{seq}}[f]$ определяется как аналитическое продолжение с вещественной оси в область C^+ : «seq» — сокращение английского слова «sequential», означающего «последовательный». Здесь имеется в виду то, что величина $I_\lambda^{\text{seq}}[f]$ определена как предел последовательности конечномерных интегралов. Согласно теореме Фату—Привалова (см. [136]) аналитическая функция, равномерно ограниченная в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, имеет предел почти во всех точках границы по любому направлению, не касательному к границе $\partial\Omega$. Поэтому при почти всех $p \neq 0$, $\text{Re } p = 0$ существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow p} I_\lambda^{\text{seq}}[f] = J_p^{\text{seq}}[f] \quad (1.2')$$

по любому направлению не касательному к мнимой оси. Величина $J_p^{\text{seq}}[f]$ называется фейнмановским континуальным интегралом.

Использование теоремы Фату—Привалова было предложено Е. Нельсоном [136], а до этого фундаментальность последова-

* В работах [97—99], [104] рассматривались классы функций, конечномерные интегралы которых оцениваются равномерно не во всей области C^+ , а в некоторой ее части, содержащей интервал вещественной оси. Это ограничение не меняет существа метода.

** Норма $\|x_\tau\| = \max |x_\tau|$ определяет топологию в линейном пространстве $C[0, t]$. Комплексная функция f , заданная на множестве называется непрерывной, если непрерывно отображение $f: C[0, t] \rightarrow C$.

тельности $\{I_{\lambda_k}^{\text{seq}}[f]\}_{k=1}^{\infty}$ при $\lambda_k \rightarrow p$, $\text{Re } \lambda_k > 0$ проверялась непосредственно (см. [98]), например, предъявлялись дополнительные требования к функции f , обеспечивающие равномерную непрерывность интеграла $I_{q+ip}^{\text{seq}}[f]$ по q при $q > 0$.

С целью упрощения обоснования предельного перехода при $\lambda \rightarrow p$, в работах [97], [99] рассматриваются классы функций f , называемых ILSTOW-интегрируемыми, для которых интеграл по мере Винера, зависящий от параметра $\lambda > 0$, допускает специальное представление:

$$\int_{C_0[0, t]} f(\lambda^{-1/2} x_\tau) w(dx_\tau) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\varphi(s),$$

где $\varphi(s)$ — функция с ограниченной вариацией, вычисляемая как обратное преобразование Лапласа-Стилтьенса от интеграла Винера. Аббревиатура ILSTOW состоит из первых букв английского выражения «Inverse Laplace-Stiltjes Transform of Wiener's». Если f ILSTOW-интегрируемая функция, то аналитическое продолжение в область C^+ и предельный переход при $\lambda \rightarrow p$ не представляют трудностей и величина $I[f] = \int_0^\infty \exp(is) d\varphi(s)$ называется фейнмановским континуальным интегралом.

Примерами ILSTOW-интегрируемых функций являются функции вида:

$$f(x_\tau) = g\left(\int_0^t \alpha_1(\tau) dx_\tau, \dots, \int_0^t \alpha_n(\tau) dx_\tau\right),$$

где $g(x)$, $x \in R^n$ — комплексная функция, имеющая $[(n+1)/2]'$ непрерывных производных, ограниченных сверху величиной $A \exp B|x|^2$, а $\{\alpha_i\}_i^n$ — ортонормированная на отрезке $[0, t]$ система вещественных функций ограниченной вариации (см. [97]). Другим классом ILSTOW-интегрируемых функций являются функции вида:

$$f(x_\tau) = \Phi\left(\int_0^t \theta(\tau, x_\tau) d\tau\right), \quad (1.4)$$

где функция $\Phi(z)$ — аналитическая в круге радиуса $r \geq 5Bt$ с центром в начале координат, а $\theta(\tau, x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по x функция, удовлетворяющая при $\tau \in [0, t]$ условиям:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\tau, \cdot) \right\|_{L_1} \leq B, \quad \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \theta(\tau, \cdot) \right\|_{L_1} \leq B, \quad k=0, 1, 2 \quad (1.5)$$

Умножение $f(x_\tau)$ на функции $\psi(x_\tau)$ такие, что

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \psi(\cdot) \right\|_{L_1} \leq B, \quad (1.6)$$

не выводит из класса ILSTOW-интегрируемых функций. Это обстоятельство используется при обосновании представления в виде континуального интеграла Фейнмана решения задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условиям (1.5) и начальным условием, удовлетворяющим (1.6).

В работе [99] исследована сходимость конечномерных аппроксимаций $I[f^{(N)}]$ к $I[f]$ для функций вида (1.4). В предположении, что $\pi_N = (tN^{-1}, 2tN^{-1}, \dots)$ получена оценка

$$\delta_N = I[f^{(N)}] - I[f] = O(N^{-\alpha/\log \log N}),$$

где $\alpha = 2 \log r / \sqrt{3} B t$. Если $\Phi(z) = \exp z$, то сходимость несколько улучшается: $\delta_N = O(N^{-1})$.

Если вместо аналитической функции Φ в (1.4) рассмотреть отрезок ее ряда Маклорена, содержащий n первых членов и сопоставить этой функции функционал $f_n(x_t)$, то как доказано в [99] разность $I[f_n] - I[f]$ не превосходит величины $o((5t/n)^n)$.

В последующих работах это интересное направление исследований не получило дальнейшего развития.

Рассмотрим еще одно определение фейнмановского интеграла.

Если f — ограниченная непрерывная функция, то при $\lambda > 0$ выполнено равенство

$$I_\lambda^{\text{seq}}[f] = \int_{C_0[0, t]} f(\lambda^{-1/2} x_t) \omega(dx_t),$$

где справа — интеграл по мере Винера функции $f(\lambda^{-1/2} x_t)$. Пусть теперь $\lambda > 0$ и $f(\lambda^{-1/2} x_t)$ — интегрируемая по мере Винера функция, такая что интеграл $\int f(\lambda^{-1/2} x_t) \omega(dx_t)$ имеет равномерно ограниченное аналитическое продолжение $I_\lambda^{\text{an}}[f]$ с вещественной полуоси в область S^+ . Это условие выполнено, например, в том случае, если f — аналитическая функция, удовлетворяющая специальным условиям роста (см. [98]). Тогда при почти всех $p \neq 0$ существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow p} I_\lambda^{\text{an}}[f] \stackrel{\text{def}}{=} J_p^{\text{seq}}[f]$$

также называемый фейнмановским континуальным интегралом [97]. Если при вещественных λ совпадают интегралы $I_\lambda^{\text{an}}[f]$ и $I_\lambda^{\text{seq}}[f]$ и существуют пределы $J_p^{\text{an}}[f]$ и $J_p^{\text{seq}}[f]$, то $J_p^{\text{an}}[f] = J_p^{\text{seq}}[f]$. Однако не для всех интегрируемых по мере Винера функций интеграл по мере Винера равен пределу последовательности конечномерных аппроксимирующих интегралов (см. [45]). Поэтому, вообще говоря, интегралы $J_p^{\text{an}}[f]$ и

$J_p^{\text{seq}}[f]$ не равны между собой. Ниже мы еще раз вернемся к этому вопросу в связи с примером, приведенным в работе [120].

Операторная интерпретация интеграла (1.1) для функции $f(x_t) = \exp i \int_0^t V(x_s) ds$, содержащаяся в работах Ю. Далецкого [25—26], Д. Бэббита [94] и Э. Нельсона [136], оказала значительное влияние на дальнейшее развитие метода аналитического продолжения.*

Вместо последовательности интегралов (1.1) рассматривается последовательность

$$(I_\lambda^{(N)}[f]\psi)(x) = \int_{R^{Nn}} \psi(\xi_N + x) f^{(N)}(\xi_1 + x, \dots, \xi_N + x) \omega_\lambda^{(N)}(\xi) d\xi,$$

где $\xi_i \in R^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in R^{Nn}$, ψ — элемент некоторого топологического (банахова или гильбертова) пространства K_1 функций на R^n , а величина $I_\lambda^{(N)}[f]\psi$ принимает значения в топологическом пространстве K_2 . Если при $\lambda \in C^+$ для любого $\psi \in K_1$ существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} I_\lambda^{(N)}[f]\psi$, являющийся элементом K_2 , непрерывно зависящим от функции $\psi \in K_1$, то соответствующее непрерывное отображение K_1 в K_2 называется операторозначным континуальным интегралом и обозначают $I_\lambda^{\text{seq}}[f]$.

Аналогично определяется интеграл $(I_\lambda^{\text{an}}[f]\psi)(x)$ и оператор $I_\lambda^{\text{an}}[f]$ (см. [100]). Далее ставится вопрос о существовании в сильном или слабом смысле непрерывных операторов $J_p^{\text{seq}}[f]$ и $J_p^{\text{an}}[f]$, действующих из K_1 в K_2 . Для фейнмановских интегралов вида (1.1) естественными пространствами являются соболевские пространства $H_s(R^n)$, так как в этих пространствах интегральный оператор $K_\lambda(t)$ с ядром $K_\lambda(x, y, t) = \frac{\exp\{-|x-y|^2/2\lambda t\}}{(2\pi\lambda t)^{n/2}}$ унитарен при мнимых значениях параметра λ , а при $\text{Re } \lambda > 0$ его норма не превосходит единицы.**

Если $f(x_t) = \exp i \int_0^t V(x_s) ds$, то интегралы вида (1.1) можно записать в виде композиции $2N$ некоммутирующих операторов, действующих на функцию ψ :

$$I_\lambda^{(N)}[f]\psi = K_\lambda(t - t_{N-1}) M(t - t_{N-1}) \dots K_\lambda(t_1) M(t_1) \psi,$$

где $M(\Delta)$ — оператор умножения на функцию $\exp iV(x)\Delta$.

* Следует отметить, что в более ранних работах Фейнмана (см. [70]) более общие континуальные интегралы понимались как функции от бесконечного числа некоммутирующих операторов.

** При вещественных λ тот оператор сохраняет норму в банаховом пространстве $C(R^n)$.

Если $\operatorname{Im} V \geq c > -\infty$ и $V(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция, имеющая равномерно ограниченные производные, то $M(\Delta)$ — ограниченный оператор, действующий в $H_s(R^n)$, норма которого не превосходит $1 + c(s)\Delta$. Наиболее слабые требования к функции $V(x)$ предьявляются при $s=0$. В этом случае можно ограничиться измеримостью функции $V(x)$. Рассмотрим ограниченную функцию $\varphi(x_\tau, \cdot)$, заданную на множестве $C[0, t]$ и принимающую значения в $L_2(R^n)$:

$$\varphi(x_\tau, x) = \exp \left\{ i \int_0^t V(x_\tau + x) d\tau \right\} \psi(x_t + x), \quad \psi \in L_2(R^n)$$

$$\|\varphi(x_\tau, \cdot)\|_{L_2} \leq \exp \{ t \min_x \operatorname{Im} V(x) \} \|\psi\|_{L_2}.$$

Поскольку функция $V(x)$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{B}(R^n)$, то функция $\varphi(x_\tau, \cdot)$, принимающая значения в $L_2(R^n)$, измерима относительно σ -алгебры траекторий A_+ , на которой задана мера Винера $w(dx_\tau)$, и мы можем определить интеграл функции φ в смысле Бохнера:

$$I_\lambda [f] \psi = \int_{C_0[0, t]} \varphi(\lambda^{-1/2} x_\tau, \cdot) w(dx_\tau).$$

Если функция $V(x)$ такова, что почти всюду в $C_0[0, t]$ выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi(x_\tau^{(N)}, \cdot) - \varphi(x_\tau, \cdot)\|_{L_2} = 0, \quad (1.6)$$

то из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [81]) имеем:

$$I_\lambda^{\text{an}} [f] \psi = \lim_{N \rightarrow \infty} I_\lambda^{(N)} [f] \psi = I_\lambda^{\text{seq}} [f] \psi.$$

Условие (1.6) выполнено, например, в следующих случаях:

- а) $V(x)$ — измеримая, ограниченная на каждом компакте, ограниченная снизу вещественная функция (Бэббит, [94]);
- б) $V(x)$ — вещественная функция, непрерывная почти всюду в R^n (Нельсон, [136]).

Поскольку $I_\lambda^{(N)} [f] \psi$ — ограниченная последовательность функций параметра λ со значениями в $L_2(R^n)$ аналитических в области S^+ и при любом вещественном λ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_\lambda^{(N)} [f] \psi = I_\lambda^{\text{seq}} [f] \psi,$$

то в силу теоремы Витали (см. [80], [81]) для векторзначных аналитических функций, интеграл $I_\lambda^{\text{seq}} [f] \psi$ имеет аналитическое продолжение в область S^+ . Далее, из теоремы Фату — Привалова

из ограниченности функции $I_\lambda^{\text{se}} [f] \psi$ в L_2 при $\lambda \in C^+$ следует что по любому направлению, не касательному к мнимой оси, при почти всех p существует слабый предел:

$$\omega\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow p} I_\lambda^{\text{seq}} [f] \psi = J_p^{\text{seq}} [f] \psi, \quad (1.7)$$

причем из оценки $\|I_\lambda^{\text{seq}} [f] \psi\|_{L_2} \leq \| \exp \{ (\min_x \text{Im } V(x)) t \} \| \psi \|_{L_2}$ следует $\|J_p^{\text{seq}} [f]\| \leq \exp(t \min_x \text{Im } V(x))$. Оператор $J_p^{\text{seq}} [f]$ называется операторозначным Фейнмановским интегралом.

Замечание 1. Параметры λ и t входят в ядро оператора $K_\lambda(x, y, t)$ в виде произведения

$$K_\lambda(x, y, t) = K(x, y, \lambda t)$$

поэтому, если считать, что фиксированным является не t , а p и рассматривать аналитическое продолжение интеграла $J_p^{\text{seq}} [f] \psi(x, t)$ как функцию параметра t , то можно утверждать, что при фиксированном p слабый предел (1.7) существует при почти всех t (см. [102]).

Замечание 2. Если функция $V(x)$ удовлетворяет условию а), то оператор $H = \frac{1}{2} \Delta - V(x)$ имеет в $L_2(R^n)$ самосопряженное расширение H_{op} , и разрешающий оператор $U(t)$ задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_{\text{op}} \psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0 \in L_2(R^n)$$

может быть вычислен по формуле $U(t) = J_t^{\text{seq}} [f]$, где $f(x_\tau) = \exp i \int_0^\tau V(x_\tau) d\tau$.

В этом случае существует сильный предел, являющийся непрерывной функцией параметра t со значениями в $L_2(R^n)$ и предельные переходы при $N \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow p$ коммутируют (см. [94], [136]).

Исходя из (1.5) можно определить интеграл $I_\lambda^{\text{an}} [f] \psi$ и выйти на мнимую ось, если функция $I_\lambda^{\text{an}} [f] \psi$ со значениями в $L_2(R^n)$ имеет равномерно ограниченное аналитическое продолжение в область C^+ . Таким образом определяется операторозначный Фейнмановский интеграл $J_p^{\text{an}} [f]$. Классы функций, допускающих такую процедуру, изучались в [100—103], [117—118], [120].

В [120] приводится пример функции $f(x_\tau)$, принадлежащей пополнению по некоторой норме линейного пространства B , состоящего из функций вида

$$\sum_{k=1}^N \prod_{l=1}^{l(k)} f_{k\ell}(x_{\tau_{k\ell}}) \quad N=1, 2, \dots, \tau_{k\ell} \in [0, t],$$

для которой $J_p^{\text{an}}[f] \psi \in L_2(R^n)$, если $\psi \in L_2(R^n)$ и одновременно при любом достаточно мелком разбиении отрезка $[0, t]$

$$J_p^{\text{seq}}[f^{(N)}] \psi \notin L_2(R^n).$$

Отсюда следует неэквивалентность двух определений операторозначного интеграла Фейнмана. Аналогичный факт имеет место и для винеровских интегралов (см. [45]).

По аналогичной схеме изучались фейнмановские операторозначные интегралы со значениями в $L_2(R^1)$ и в $L_1(R^1)$ на линейном пространстве функций вида

$$\sum_{k=1}^N a_k \prod_{l=1}^{l(k)} \int_0^t \theta_{kl}(x_\tau, \tau) d\tau \quad N=1, 2, \dots$$

и его пополнения по специальным нормам.

Р. Камерон и Д. Сторвик рассмотрели фейнмановские операторозначные континуальные интегралы от функций вида

$$f(x_t) = \exp i \int_0^t V(\tau, x_\tau) d\tau \quad \text{Im } V \geq c > -\infty,$$

где $V(\tau, x)$ либо непрерывная почти всюду на $[0, t] \times R^1$ и ограниченная на всех компактах функция [100], [101], [104], либо измеримая и ограниченная в $L_2(R^1)$ равномерно по $\tau \in [0, t]$ (см. [103]). В этих случаях доказано равенство: $J_p^{\text{an}}[f] = J_p^{\text{seq}}[f]$ для почти всех p . Интегралы $J_p^{\text{an}}[f]$ и $J_p^{\text{seq}}[f]$ функций вида

$$f_1(x_t) = \Phi_1 \left(\int_0^t \int_0^t \theta(x_\tau, x_s, \tau, s) d\tau ds \right),$$

$$f_2(x_t) = \Phi_2 \left(\int_0^t \theta_1(x_\tau, \tau) d\tau, \int_0^t \theta_2(x_s, s) ds \right),$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z, w)$ — целые функции, а $\|\theta(\cdot, \cdot, \tau, s)\|_1 \leq c < \infty$, $\|\theta_{1,2}(\cdot, \tau)\| \leq c < \infty$ равномерно по $s, \tau \in [0, t]$, изучались в [104]. В обоих случаях $J_p^{\text{an}}[f] = J_p^{\text{seq}}[f]$ при всех p . Более того, доказана непрерывность операторозначных функций $J_p^{\text{an}}[f]$ по параметру p : $\text{Re } p = 0, p \neq 0$.

К методу аналитического продолжения примыкает метод гауссовской регуляризации фейнмановского интеграла, предложенный Ито [114—115] и изучавшийся Гарским [96], [139—140].

В вещественном гильбертовом пространстве H рассматриваются множество J симметрических положительно определенных ядерных операторов (см. [18], [80]), частично упорядоченных

отношением $\prec: T_1 \prec T_2$ если и только если $T_{1,2} \in J$, $T_1 - T_2 \in J$, и семейство гауссовских мер $\{\mu_{T,\alpha}\}_{T \in J}$ по средним $\alpha \in H$ ковариационным оператором T (см. [18]).

Пусть $f(T)$ — комплексная функция, зависящая от оператора $T \in J$ как от параметра. Если для любой монотонно возрастающей последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ ($T_j \prec T_{j-1}$) операторов из частично упорядоченного множества J существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n) = f,$$

не зависящий от выбора монотонно возрастающей последовательности, то говорят, что величина f является пределом последовательности $\{f(T)\}_{T \in J}$ при $T \rightarrow \infty$ по частично упорядоченной системе J и $\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = f$.

2. Определение интеграла Ито. Обозначив через $\lim_{T \rightarrow \infty}$ — предел по частично упорядоченной системе J , определим интеграл $I[f]$:

$$I[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} C_T^{-1} \int_H d\mu_{T,\alpha}(\xi) \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{m}{h} \langle \xi, \xi \rangle \right\} f(\xi),$$

$$C_T = \int_H d\mu_{T,\alpha}(\xi) \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{m}{h} \langle \xi, \xi \rangle \right\},$$

где область $D(I)$ определения интеграла I состоит из всех функций, измеримых относительно борелевской σ -алгебры подмножеств множества H , для которых такой предел существует, конечен и не зависит от $\alpha \in H$.

Функции из $D(I)$ называются интегрируемыми, а величина $I[f]$ — интегралом функции f по обобщенной мере. Класс интегрируемых в этом смысле функций оказывается нетривиальным: он содержит все функции вида

$$f(\xi) = \exp \left(\frac{i}{2h} |\xi|^2 \right) \int_H \exp i \langle \xi, \eta \rangle \mu(d\eta),$$

где μ — произвольная комплексная мера на борелевской σ -алгебре подмножеств множества H , имеющая конечную вариацию. В этом случае

$$I[f] = \int_H \exp \frac{h}{2i} |\xi|^2 \mu(d\xi). \quad (1.8)$$

Кроме того, существует целый класс линейных преобразований, относительно которых инвариантно подпространство $D(I)$. Пусть A — ограниченный оператор, действующий в H . Взаимоднозначное преобразование $A: H \rightarrow H$ называется почти ортогональным, если

$$\|(A^*A)^{1/2} - I\|_p < \infty$$

при некотором $0 < p < 1$, где

$$\|M\|_p = [\text{Tr}(M^*M)^{p/2}]^{1/p}.$$

Преобразование $S: H \rightarrow H$, называется почти изометрическим, если оно имеет вид $S\xi = a + A\xi$ $a \in H$, где A — почти ортогональный оператор.

Доказано (см. [114]), что область определения $D(I)$ является линейным подпространством H , инвариантным относительно почти изометрических преобразований.

Пусть элементами вещественного гильбертова пространства H являются траектории $x_\tau: [0, t] \rightarrow R^1$, $x(0) = 0$ и задано

скалярное произведение $\langle \xi, x \rangle = \int_0^t \dot{x}_\tau \dot{\xi}_\tau d\tau$, тогда в соответ-

ствии с общей схемой, можно определить интеграл по обобщенной мере от интегрируемых функций. Доказано, [114—115], что соответствующий интеграл $\varphi = I[f]$ определен для функций вида

$$f(x_\tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t V(x_\tau) d\tau\right) \delta(x_t - x)$$

если а) $\tilde{V}(p) \in L_1(R^1)$ (\tilde{V} — Фурье-образ функции V); б) $V(x) = c(x-a)$ ($c \in R^1$) в) $V(x) = \kappa(x-a)^2$ ($\kappa \geq 0$) и является функция Грина задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi - V(x) \varphi$$

$$\varphi(0, x) = \delta(x).$$

Таким образом, для функционалов указанного вида интегрирование в смысле Ито—Тарского приводит к тому же результату, что и интегрирование в смысле первоначального определения Фейнмана (см. [69—71]). В работе [140] доказана квантовомеханическая форма закона Ньютона и в конечномерных гильбертовых пространствах получены формулы метода стационарной фазы.

Работы Альбеверио и Крона [92—93], Моретт де Витт [132—135] и работы авторов [50—53] тесно связаны с исследованиями Ито—Тарского и являются, по существу, их продолжением. Формула (1.8) принимается в качестве определения без предельного перехода континуального интеграла Фейнмана для функционалов, являющихся Фурье-образами (или характеристическими функциями) мер конечной вариации и изучаются следующие вопросы:

- корректность определения [52], [53], [92];
- интегральные представления решений уравнения Шредингера [50—53], [92—93], [127], [132—135];

— вывод общих формул для разложения континуального интеграла по методу стационарной фазы [93];

— вывод формул метода стационарной фазы для асимптотического разложения решений уравнения Шредингера по параметру h [93, 134];

— интегральные представления матрицы рассеяния [92];

— интегральные представления решений уравнений квантовой теории поля [92];

— связь с теорией случайных процессов [127].

В § 2 мы подробно остановимся на результатах работы [127] и следствиях, вытекающих из этих результатов.

3. В теории фейнмановского континуального интеграла методы теории возмущений линейных операторов часто использовались применительно к интегралам функционала

$$f(x_t) = \exp \frac{i}{h} \int_0^t V(x_\tau) d\tau, \quad \text{Im } V \geq c > -\infty. \quad (1.9)$$

Как следует из предыдущего изложения, интеграл $I_\lambda^{(N)}[f]\psi$ функционала (1.9) можно представить как результат действия $2N$ линейных операторов на функцию ψ :

$$I_\lambda^{(N)}[f]\psi = M_V(t - t_{N-1}) K_\lambda(t - t_{N-1}) \dots M_V(t_1) K_\lambda(t_1) \psi, \quad (1.10)$$

где t_1, \dots, t_N — точки разбиения π_N отрезка $[0, t]$, $M_V(\tau)$ — оператор умножения на функцию $\exp\{ih^{-1}V(x)\tau\}$, а $K_\lambda(\tau)$ — интегральный оператор с ядром $K_\lambda(x, y, \tau)$:

$$K_\lambda(x, y, \tau) = (\lambda/2\pi\tau h)^{n/2} \exp\{-\lambda|x-y|^2/2h\tau\}.$$

Семейства операторов $M_V(\tau)$, $K_\lambda(\tau)$; $\tau \in (0, \infty)$, $\text{Re } \lambda \geq 0$, $|\lambda| > 0$ являются непрерывными полугруппами*, действующими в $L_2(R^n)$, причем при $\text{Re } \lambda = 0$ полугруппа $K(\tau)$ — унитарная, а $M_V(\tau)$ — квазиграниченная: $\|K(\tau)\| = 1$, $\|M_V(\tau)\| \leq \exp \alpha\tau$, $\alpha = \inf_x \text{Im } V(x)$

(см. [38]). Их производящие операторы A и B соответственно равны замыканию в $L_2(R^n)$ оператора $\frac{h^2}{2\lambda} \Delta$ и оператора умножения на функцию $ih^{-1}V(x)$.

Будем рассматривать оператор B как «малое» возмущение оператора A . Если функция V ограничена, то оператор B также ограничен: $\|B\| \leq \sup_x |V(x)|$ и $\exp B\tau = 1 + B\tau + O(\tau^2)$.

Систематически используя это равенство, интеграл (1.10) можно представить в виде:

$$I_\lambda^{(N)}[f]\psi = K_\lambda(t)\psi + O(|\pi_N|) + \sum (t_k - t_{k-1}) K_\lambda(t - t_k) \cdot B \times \\ \times K_\lambda(t_k - t_{k-1}) M_V(t_{k-1} - t_{k-2}) \dots M_V(t_1) \cdot K_\lambda(t_1)\psi$$

* Если не оговорено противное, то под непрерывностью операторозначных функций понимается сильная непрерывность.

и доказать, что при любом $\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq 0, |\lambda| > 0$ последовательность $I_\lambda^{(N)} [f] \psi$ сходится в $L_2(R^n)$ при $N \rightarrow \infty$ к решению интегрального уравнения

$$\psi(t) = K_\lambda(t) \psi + \int_0^t K_\lambda(t-\tau) \cdot B \cdot \psi(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

решение которого существует и единственно в классе функций $L_1[0, t]$ параметра τ со значениями в $L_2(R^n)$.

Дифференцируя правую и левую части (1.11) по t получаем, что функция $\psi(t)$ является решением эволюционного уравнения.

$$\frac{d\psi}{dt} = (A + B) \psi.$$

С другой стороны семейство операторов

$$U(t) = s - \lim_{|\pi_N| \rightarrow 0} M_V(t - t_{N-1}) \cdot K_\lambda(t - t_{N-1}) \dots M_V(t_1) K_\lambda(t_1) \quad (1.12)$$

является, очевидно, непрерывной квазиограниченной полугруппой. Поскольку $\psi(t) = U(t) \psi$, то производящим оператором полугруппы $U(t)$ является оператор $A + B$. Обобщения результатов такого рода содержатся в [25], [30], [61]. В частности, Ю. Л. Далецким доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть существует разрешающий оператор $\exp At$ уравнения $\frac{d\psi}{dt} = A\psi, \psi \in H$, где H — гильбертово пространство, и пусть T — положительно определенный самосопряженный оператор, действующий в H , имеющий плотную в H область определения и ограниченный обратный T^{-1} . Если оператор B ограничен в H и при некотором m выполнены условия $\|A^m B A^{-m}\| < \infty, \|A^m T^{-1}\| < \infty, \|T A^{-m}\| < \infty$ то а) оператор $A + B$ является производящим оператором непрерывной квазиограниченной полугруппы операторов $\exp(A + B)t$, действующих в H ; б) для любого $\xi \in N^*$ существует предел

$$\lim_{|\pi_N| \rightarrow 0} (\exp A(t - t_{N-1}) \exp B(t - t_{N-1}) \dots \exp A t_1 \exp B t_1) \xi = \\ = \exp \{(A + B)t\} \xi. \quad (1.13)$$

Поскольку левая часть этого равенства является пределом последовательности упорядоченных произведений некоммутирующих операторов, ее называют хронологическим или T -произведением.

Если функция $V(x)$ не ограничена, то существуют примеры, показывающие, что оператор $A + B$, вообще говоря, не является производящим оператором (см. [80], гл. IX, § 3), а предел (1.13) не существует [13]. Однако, можно выделить некоторые классы потенциалов, такие что использованная здесь конструкция со-

* Через N обозначено исполнение H по норме $\|\cdot\|_-: \|\psi\|_- = \|T^{-1}\|_H \psi$, а \lim^- — предел в смысле этой нормы.

храняет силу. Следуя [80], [38], мы изложим здесь теорию, основанную на использовании следующей леммы.

Лемма. (Т. Като, [38] гл. 5 § 4). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и B — симметричный оператор такой, что $D(B) \supseteq D(A)$. Если существуют постоянные $\alpha < 1$ и β такие, что для любого $\psi \in D(A)$ выполнено условие:

$$\|B\psi\| \leq \alpha \|A\psi\| + \beta \|\psi\|,$$

то $A+B$ — самосопряженный оператор.

Определение. Пусть $A = -\Delta$, $H = L_2(R^n)$ и B — оператор умножения на функцию $V(x)$, действующий в H . Если B удовлетворяет условиям леммы, то функция $V(x)$ называется потенциалом Като.*

Следствие. Если V — потенциал Като, то оператор $i(A+B)$ является производящим оператором унитарной группы операторов $\exp i(A+B)t$, действующих в $L_2(R^n)$.

Теперь мы рассмотрим вопрос о существовании предела композиции некоммутирующих полугрупп операторов

$$I^{(N)}\psi = P(t - t_{N-1})Q(t - t_{N-1}) \cdot \dots \cdot P(t_1)Q(t_1)\psi$$

не предполагая, что производящие операторы ограничены.

Теорема (см. [136] и [38], гл. 9, § 2). Пусть A и B — линейные операторы в банаховом пространстве \mathfrak{B} , такие, что A , B и $A+B$ — производящие операторы сжимающих непрерывных групп операторов $P(\tau)$, $Q(\tau)$ и $R(\tau)$. Тогда для любого $\psi \in \mathfrak{B}$ существует предел:

$$\lim_{|t_N| \rightarrow 0} I^{(N)}\psi = R(t)\psi. \quad (1.14)$$

Доказательство этой полезной теоремы основано на двух простых фактах. Во-первых, используется компактность в \mathfrak{B} множества $M = \{K(\tau)\psi \mid \tau \in [0, t]\}$, где ψ — фиксированный элемент из \mathfrak{B} , а $K(\tau)$ — непрерывная операторозначная функция параметра τ . Компактность множества M следует из компактности отрезка $[0, t]$ и непрерывности функции $K(\tau)$. Во-вторых, используется следующее свойство равномерной сходимости: если семейство операторов $C(\tau)$, действующих из банахова пространства B_1 в B_2 равномерно ограничено, и для каждого элемента $\varphi \in B_1$ выполнено

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} C(\tau)\varphi = 0, \quad (1.15)$$

то на любом компакте из B_1 сходимость к пределу (1.15) является равномерной, ибо в противном случае в B_1 существует элемент φ для которого условие (1.15) не выполнено.

Теперь рассмотрим норму разности

* Потенциалом Като является, например, любая вещественная функция, принадлежащая пространству $L_p(R^n)$, $p > n/2$, $p \geq 2$ (см. [136]).

$$d_N = \|R(t)\psi - P(t-t_{N-1}) \cdot Q(t-t_{N-1}) \dots P(t_1) Q(t_1) \psi\|. \quad (1.16)$$

Поскольку операторы R , P и Q — сжимающие, то достаточно доказать (1.14) для функций ψ из плотного в \mathcal{B} множества $D(A+B)$.

Множество $D(A+B)$ с нормой $\|(A+B)\psi\| + \|\psi\|$ является банаховым пространством B_1 , а роль семейства операторов $C(\tau)$ отводится операторам

$$\tau^{-1}(P(\tau)Q(\tau) - R(\tau)) \stackrel{\text{def}}{=} C(\tau) \quad \tau \in [0, t],$$

действующим из B_1 в \mathcal{B} . Для каждого $\varphi \in D(A+B)$ множество $\{C(\tau)\varphi\} \tau \in [0, t]$ ограничено в \mathcal{B} , поэтому в силу принципа равномерной ограниченности (см. [38] гл. 3, § 1), существует постоянная c такая, что $\|C(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq c\|\varphi\|_{B_1}$. Таким образом оператор $C(\tau): \mathcal{B} \rightarrow B_1$ ограничен.

Оператор $R(\tau)$ действует в $D(A+B) = B_1$ и непрерывно зависит от параметра $\tau \in [0, t]$. Поэтому для любого $\psi \in B_1$ множество $\{R(\tau)\psi\} \tau \in [0, t]$ компактно в B_1 .

Используя тождество $x^N - y^N = \sum_{k=1}^N x^{N-k} (x-y) y^{k-1}$, оценим разность (1.16):

$$d_N \leq \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) \|C(t_k - t_{k-1}) R(t_{k-1}) \psi\|_{\mathcal{B}}.$$

Поскольку множество $\{R(t_k)\psi\}_k$ ограничено в B_1 и для любого $\varphi \in B_1$ выполнено (1.15) равномерно на множестве $\{R(t_k)\psi\}_{t_k \in [0, t]}$, то

$$d_N \leq \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) \varepsilon(t_k - t_{k-1}),$$

где $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Теорема доказана. Ее применение к фейнмановским континуальным интегралам рассмотрены в [136—138].

Методы аппроксимации полугрупп операторов дискретными полугруппами (см. [38], гл. 9 § 3) можно рассматривать в рамках теории возмущений линейных операторов. Дискретной полугруппой называется семейство $\{U^k\}_{k=0}^{\infty}$, состоящее из степеней ограниченного оператора U , действующего в банаховом пространстве B . Каждой дискретной полугруппе сопоставим единицу времени $\tau > 0$ и положим $U(k\tau) \stackrel{\text{def}}{=} U^k$. Семейство $U = \{U(k\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ называется дискретной полугруппой с единицей времени τ , а оператор $T = \tau^{-1}(1 - U(\tau))$ — производящим оператором полугруппы U .

Пусть $U(\tau)$ — непрерывная квазиограниченная полугруппа

операторов, действующих в B . Рассмотрим последовательность $\{U_n\}$ дискретных полугрупп с единицей времени t/n . Говорят, что последовательность $\{U_n\}$ аппроксимирует полугруппу $U(\tau)$ на отрезке $[0, t]$, если для любого $\tau \in [0, t]$ существует предел

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k_n \tau_n \rightarrow \tau}} U(k_n \tau_n) = U(\tau).$$

Таким образом, вопрос о существовании предела (1.14) сводится к вопросу о сходимости последовательности дискретных полугрупп $U(\tau) = P(t/n)Q(t/n)$. Сходимость дискретных полугрупп изучалась в [25—26], [30], [54], [61]. Во многих случаях сходимость может быть установлена на основании известного результата Т. Като.

Теорема. (см. [38], стр. 633—634). Пусть $U(\tau)$ — непрерывная полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве B с производящим оператором T и $\{U_n(\tau)\}$ — последовательность дискретных полугрупп с производящими операторами T_n $n=1, 2, \dots$. Если существуют постоянные M и β , такие что $\|U_n(k\tau_n)\| \leq M e^{\beta k\tau_n}$ и ядро D^* оператора T такое, что $T_n \varphi \rightarrow T\varphi$ для любого $\varphi \in D$, то последовательность $\{U_n(\tau)\}$ аппроксимирует $U(\tau)$ на $[0, \infty)$.

При использовании этой теории основную трудность представляет получение равномерной априорной оценки для дискретных полугрупп (ср. [30]). Область применения теории аппроксимации полугрупп может быть расширена, если допустить, что дискретные подгруппы действуют в шкале, так как получение оценок в шкалах обычно проще, чем в фиксированном пространстве. Такое обобщение для специальной шкалы гильбертовых пространств, содержащей $L_2(R^n)$, было рассмотрено В. Л. Ройтбурдом [61].

Д. Фудживара [112] вычислил интегральные операторы, образующие дискретные полугруппы, равномерно сходящиеся к разрешающемуся оператору задачи Коши для уравнения Шредингера в римановом пространстве:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar^2 \Delta \right) u = 0, \quad u|_{t=0} = \psi, \quad (1.17)$$

где

$$\Delta = (\det g(x))^{-1/2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\det g(x))^{1/2} g^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$g^{ij}(x)$ — метрический тензор. Техника асимптотического разложения решений уравнения (1.17) по степеням параметра \hbar

* Пусть неограниченный оператор T , действующий в B , является замыканием некоторого оператора S . В этом случае область определения оператора S называется ядром D оператора T (см. [38], стр. 221).

хорошо известна (см. [126], [50]). При малых t асимптотика решения по h совпадает с асимптотикой по t , поэтому естественно ожидать, что вычислив функцию Грина задачи (1.17) с точностью до $O(t^{N+1})$:

$$G(x, y, t) = G_N(x, y, t) + O(t^{N+1}), \quad (N \geq 1)$$

можно представить точное решение в виде предела последовательности сверток приближенных функций Грина:

$$\psi(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R^n}^{(k)} \dots \int_{R^n} dx_1 \dots dx_k G_N(x, x_1, t/k) \dots \\ \dots G_N(x_{k-1}, x_k, t/k).$$

Известную трудность представляет оценка остатка в операторной норме:

$$\sup_{\|\psi\|_{L_2}=1} \left\| \int_{R^n} (G(\cdot, y, t) - G_N(\cdot, y, t)) \psi(y) dy \right\|_{L_2(R^n)} = O(t^{N+1}), \quad (1.18)$$

которая используется для обоснования предельного перехода. В работе [112] сообщаются условия, при которых оценка (1.18) имеет место, если

$$G_N(x, y, t) = (4\pi i t h)^{-n/2} \exp \left\{ \frac{i r^2(x, y)}{4 t h} \right\} \sum_{j=1}^N (i t h)^j e_j(x, y),$$

где $r(x, y)$ — длина геодезической, соединяющей точки x и y , а функции $e_j(x, y)$ вычисляются явно, они являются решениями уравнения переноса (см. [126], [50]). В заметке [112] та же задача решается в гамильтоновой форме.

Обозначим $G(t)$ разрешающий оператор задачи Коши (1.17) и через $G_N(t)$ — интегральный оператор Фурье:

$$G_N(t) \psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int_{R^{2n}} G_N(t, x, p, y) \psi(y) dy dp, \quad \psi \in C_0^\infty(R^n)$$

$$G_N(t, x, p, y) = \exp \frac{i}{h} \left\{ \int_0^t L(q, \dot{q}) ds - p(y - x^0(x, p, t)) \right\} \times \\ \times \sum_{j=1}^N (i t h)^j \tilde{e}_j(x, p),$$

где $L(q, \dot{q})$ — лагранжиан, отвечающий гамильтониану $H(p, x) = \sum g^{ij}(x) p_i p_j$; $x(t)$, $\xi(t)$ — решения уравнений Гамильтона $\dot{x} = H_p(\xi, x)$, $\dot{\xi} = -H_q(\xi, x)$, $\xi(0) = p$, $x(0) = x^0$, а $\tilde{e}_j(x, p)$ — решения уравнений переноса. Если выполнен ряд условий (см. [126]), включающих отсутствие фокальных точек

вдоль траектории $x(\tau)$ при любых $p \in \mathbb{R}^n$, то гарантируется оценка: $\|G_N(t) - G(t)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq O(t^{N+1})$, обеспечивающая равномерную сходимость дискретных полугрупп:

$$u - \lim_{k \rightarrow \infty} (G_k(t/k))^k = G(t).$$

В предположении, что задача Коши для квазилинейного эволюционного уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = A(t)\psi + D(t, \psi), \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 \in B$$

имеет решение на отрезке $[0, T]$, а семейства операторов $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ и $\{D(t, \cdot)\}_{t \in [0, T]}$ такие, что

— $A(t)$ — производящий оператор сильно непрерывной сжимающей полугруппы, имеющей в банаховом пространстве B всюду плотную область определения, независящую от t ;

$D(t, \cdot)$ — ограничен на каждом шаре в B , и локально липшиц-непрерывен по второму аргументу и непрерывен по первому аргументу, А. Т. Заплитная получила представление решения $\psi(t)$ в виде T -отображения [33].

В [50, 53] метод теории возмущений применялся для доказательства теоремы существования уравнений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Хартри. Математическая сторона работы состоит в следующем. Пусть $U(\tau)$ — квазиограниченная непрерывная группа операторов, действующих в банаховом пространстве B и $B(\cdot) : B \rightarrow \text{Op} B$ — оператор, отображающий B в множество ограниченных операторов, действующих в B , и обладающий тремя свойствами:

- 1) $\|B(\varphi)\| \leq C_1(\|\varphi\|)$, где C_1 — непрерывная функция;
- 2) $\exp B(\varphi)t \leq \exp at$, $a \geq 0$ для любых $\varphi \in B$, $t \geq 0$;
- 3) $\|B(\varphi) - B(\varphi')\| \leq C_2(\|\varphi\|, \|\varphi'\|)\|\varphi - \varphi'\|$, где C_2 — некоторая непрерывная функция. Из условия 2) следует, что при фиксированном $\varphi \in B$ рекуррентная последовательность

$$\begin{aligned} \psi_N(tN^{-1}k) &= U(tN^{-1}) \exp(tN^{-1}B(\psi_N(tN^{-1}(k-1)))) \dots \\ &\dots U(tN^{-1}) \exp\{tN^{-1}B(\psi)\} \psi, \quad k=1, 2, \dots, N; \quad N=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

ограничена равномерно по N и k . Поэтому, также как и в п. 1 $\exp tN^{-1}B(\psi_N(tN^{-1}k)) = 1 + tN^{-1}B(\psi_N(tN^{-1}k)) + O(tN^{-1})$.

Отсюда следует представление ψ_N :

$$\psi_N(t_k) = U(t_k)\psi + O(tN^{-1}) + \sum_{l=1}^k tN^{-1}U(t_{k-l})B(\psi_N(t_{l-1}))\psi_N(t_{l-1}).$$

Используя априорную ограниченность последовательности и условия 1) и 3) можно доказать (см. [53]), что последовательность $\psi_N(t_k)$ фундаментальна в B при $t_k \rightarrow \tau$, $N \rightarrow \infty$, а пре-

дельная функция $\psi(\tau)$ непрерывна по τ и является решением нелинейного интегрального уравнения:

$$\psi(t) = U(t)\psi + \int_0^t U(t-\tau)B(\psi(\tau))\psi(\tau)d\tau.$$

Решение этого уравнения единственно в классе непрерывных функций параметра $\tau \in [0, t]$ со значениями в \mathbf{B} .

Таким образом, соотношение $\psi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(t)$ определяет нелинейный оператор $T: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$

$$T_t(\psi) = \psi(t).$$

Совершая предельный переход в (1.19), мы переходим к произведению бесконечного числа некоммутирующих нелинейных операторов. Такое произведение называется T -отображением. В дальнейшем под термином T -отображение будет пониматься также всякий оператор, определяемый как предел последовательности функций от некоммутирующих линейных или нелинейных операторов. Тем самым, понятие T -отображения является более широким, чем понятие T -произведения или хронологического произведения операторов.

§ 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ВИДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА СКАЧКООБРАЗНОГО ПРОЦЕССА

1. p -представление континуального интеграла Фейнмана. По аналогии с представлением решения уравнения теплопроводности в виде предела конечномерных аппроксимаций интеграла по мере Винера, решение задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right\} \psi(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \in C_0^\infty(R^n)$$

можно формально записывать в виде Фейнмановского континуального интеграла (см. [10—11], [71]):

$$\psi(x, t) = \int_{x_t=x} \mathcal{D}x_\tau \psi_0(x_0) \exp \frac{1}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{m}{2} |\dot{x}_\tau|^2 - V(x_\tau) \right) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i t N^{-1} \hbar} \right)^{\frac{nN}{2}} \int_{R^n} \dots \int_{R^n}^{(N)} \psi_0(x_0) \prod_{k=0}^{N-1} dx_k \times$$

$$\times \exp \frac{i}{h} \left\{ \frac{m |x_{k+1} - x_k|^2}{2tN^{-1}} - V(x_k) tN^{-1} \right\}, \quad (2.2)$$

где $x_N = x$.

Существование предела (2.2) доказано для широкого класса потенциалов $V(x)$ ([136]), однако запись решения задачи (2.1) в виде интеграла по мере на траекториях $x_t: [0, t] \rightarrow R^n$ имеет лишь формальный характер и до сих пор не обоснована.

В последние годы для изучения континуального интеграла (2.2) был использован метод Фурье (см. [50—53], [92—93], [114—115]), состоящий в следующем. После тождественных преобразований по формуле Парсеваля в R^N допредельное выражение в формуле (2.2) записывается в виде $2N$ -кратного интеграла:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\frac{nN}{2}} \prod_{k=1}^N dp_k \exp \left\{ -\frac{i}{2mh} |p_k|^2 tN^{-1} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{ip_N x}{h} \right\} \times \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\frac{nN}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp \left\{ -\frac{i}{h} (V(x_k) tN^{-1} - \right. \\ & \left. - p_k(x_{k+1} - x_k)) \right\} \psi_0(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_t=x} \mathcal{D}p_\tau \int \mathcal{D}x_\tau \times \\ & \times \exp \frac{i}{h} \{ S[x_\tau, p_\tau] + p_t x \} \psi_0(x_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Показатель экспоненты в $2N$ -кратном интеграле является конечномерной аппроксимацией действия в гамильтоновой форме:

$$S[x_\tau, p_\tau] = \int_0^t p_\tau dx_\tau - H(p_\tau x_\tau) d\tau = \int_0^t p_\tau dx_\tau - \frac{|p_\tau|^2}{2m} d\tau - V(x_\tau) d\tau.$$

Поэтому континуальный интеграл (2.3) называют гамильтоновой формой фейнмановского континуального интеграла (см. [9], [10]). Замечательным фактом, установленным в работах [52], [53], является существование предельной аддитивной комплексной функции множества

$$\begin{aligned} \mu[a] = & \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\frac{Nn}{2}} \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \prod_{k=1}^N dp_k \chi_a^{(j)} [p_{\tau, N}] \times \\ & \times \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\frac{Nn}{2}} \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \prod_{k=1}^N dx_k \exp \left\{ -\frac{i}{h} \sum_{k=1}^{N-1} (V(x_k) tN^{-1} - p_k(x_{k+1} - x_k)) \right\}, \end{aligned}$$

где a — произвольное множество ступенчатых траекторий из некоторой алгебры A , $\{\chi_a^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность непрерывных

ограниченных функций, сходящаяся к характеристической функции множества, а при $j \rightarrow \infty$ для каждого $a \in A$, а $V(x)$ — фурье-образ меры конечной вариации в R^n . Функция множества μ допускает продолжение до σ -аддитивной комплексной функции множества m на σ -алгебре \mathcal{A} , порожденной алгеброй A , а ограниченный функционал

$$\exp \left\{ -\frac{i}{2m\hbar} \int_0^t |p_\tau|^2 d\tau \right\} \tilde{\Psi}_0(p_t),$$

где $\tilde{\Psi}_0(p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} \int \exp\{-ipx/\hbar\} \psi_0(x) dx$, \mathcal{A} -измерим. Таким образом, после выполнения интегрирования по пространственным переменным в формуле (2.3) было обосновано включение формулы (2.3) в теорию интегрирования (см. [53]):

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} \int_{R^n} \exp \frac{ipx}{\hbar} dp \int_{p_0=p} m(dp_\tau) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{|p_\tau|^2}{2m} d\tau \right\} \tilde{\Psi}_0(p_t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Равенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} \int_{R^n} e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp \int_0^t m(dp_\tau) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{|p_\tau|^2}{2m} d\tau \right\} \tilde{\Psi}_0(p_t) = \\ & = \int_{x_t=x} \mathcal{D}x_\tau \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{m|\dot{x}_\tau|^2}{2} - V(x_\tau) \right) d\tau \right\} \psi_0(x_0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

если правую часть этой формулы понимать в смысле определения (2.2), является аналогом равенства Парсеваля (см. [53]), а левая и правая части формулы (2.5) называются соответственно импульсным и координатным представлением (соответственно p -представлением и x -представлением) континуального интеграла Фейнмана. В работах [50, 53] приводятся явные формулы для меры m простых множеств и вычисляется характеристический функционал комплексной меры m :

$$\int_{p_0=0} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t x_\tau dp_\tau \right\} m(dp_\tau) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V(x_\tau) d\tau \right\}.$$

Там же было показано, что интеграл

$$\tilde{\Psi}(p, t) = \int_{p_0=p} m(dp_\tau) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{|p_\tau|^2}{2m} d\tau \right\} \tilde{\Psi}_0(p_t)$$

является решением задачи Коши для уравнения Шредингера в p -представлении:

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(ih\nabla_p) \right\} \tilde{\Psi}(p, t) = 0,$$

$$\tilde{\Psi}(p, 0) = \tilde{\Psi}_0(p),$$

где псевдодифференциальный оператор $V(ih\nabla_p)$ действует в $C(R^n)$ по правилу

$$V(ih\nabla_p) f(p) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \tilde{V}(du) f(p + hu). \quad (2.6)$$

Тот факт, что мера m сосредоточена на ступенчатых траекториях, послужил в дальнейшем для выяснения тесной связи интегрального представления решения (2.4) с теорией скачкообразных процессов.

2. Скачкообразный процесс, отвечающий потенциалу $V(x)$.

Пусть \tilde{V} — комплексная мера конечной вариации на σ -алгебре \mathfrak{B} борелевских множеств в R^n такая, что

$$V(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{-ipx} \tilde{V}(dp), \quad x \in R^n,$$

то есть V — характеристическая функция меры \tilde{V} . Мера \tilde{V} абсолютно непрерывна относительно конечной неотрицательной меры $|\tilde{V}|$, являющейся вариацией меры \tilde{V} , поэтому существует $|\tilde{V}|$ -интегрируемая функция $f(p)$ такая, что

$$\tilde{V}(B) = \int_B f(p) |\tilde{V}|(dp), \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Рассмотрим конечную неотрицательную меру Q :

$$Q(B) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \int_B |f(p)| |\tilde{V}|(dp). \quad (**)$$

Очевидно, что мера \tilde{V} абсолютно непрерывна относительно меры Q :

$$\frac{d\tilde{V}}{dQ}(p) = (2\pi)^{n/2} \frac{f(p)}{|f(p)|} = (2\pi)^{n/2} \exp i\Phi(p),$$

где $\Phi(p) = f(p)/|f(p)| = \arg f(p)$ — вещественная \mathfrak{B} -измеримая функция. Поэтому мера \tilde{V} может быть представлена в следующем виде:

$$\tilde{V}(B) = (2\pi)^{n/2} \int_B e^{i\Phi(p)} Q(dp), \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Отсюда мы заключим, что

$$V(ih\nabla_p) f(p) = \int_{R^n} e^{i\Phi(u)} Q(du) f(p+hu). \quad (2.6')$$

Функция $\Phi(u)$ в дальнейшем изложении называется фазовой функцией. Пусть далее $\nu(B, \Delta)$ — пуассоновская мера на $R^n \times [0, T]$ со средним $M\nu(B, \Delta) = \Delta h^{-1} Q(B)$ и $\xi_{sp}(t)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) марковский скачкообразный процесс, определяемый формулой (2.7):

$$\xi_{sp}(t) = p + h \int_s^t \nu(du, d\tau). \quad (2.7)$$

Процесс $\xi_{sp}(t)$ обладает следующими свойствами (см. [59], [24]):

(i) вероятность $P(B)$ совершить скачок, значения которого принадлежат множеству $B \in \mathcal{B}(R^n)$, не зависит от того, из какой точки совершается скачок и вычисляется по формуле

$$P(B) = Q(h^{-1}B) / Q(R^n),$$

где $h^{-1}B = \{u : u \in R^n, hu \in B\}$;

(ii) вероятность совершить k скачков за время Δ равна

$$P_k = \frac{(\Delta h^{-1}\kappa)^k}{k!} e^{-\frac{\Delta\kappa}{h}},$$

где $\kappa = Q(R^n)$.

Переходная функция $P(\Gamma, p, t)$ процесса $\xi_{0p}(t)$, равная вероятности попасть на множество $\Gamma \in \mathcal{B}(R^n)$ за время t из точки $p \in R^n$ может быть выражена через математическое ожидание:

$$P(\Gamma, p, t) = M_{\chi_\Gamma}(\xi_p(t)),$$

где $\chi_\Gamma(x)$ — характеристическая функция множества Γ , и удовлетворяет уравнению Колмогорова (см. [24], [59]):

$$\begin{aligned} h \frac{\partial}{\partial t} P(\Gamma, p, t) &= \int_{R^n} \{P(\Gamma, p+hu, t) - P(\Gamma, p, t)\} Q(du) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{R^n} (P(\Gamma, p+hu, t) - P(\Gamma, p, t)) |\tilde{V}|(du). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в том случае, если в формуле (*) $|f(p)| \equiv 1$. Решение уравнения Колмогорова можно представить в виде ряда:

$$\begin{aligned} P(\Gamma, p, t) &= \exp(-\kappa t h^{-1}) \times \left\{ \chi_\Gamma(p) + \sum_{k=1}^{\infty} h^{-k} \int_0^t ds_k \cdot \right. \\ &\cdot \int_0^{s_k} ds_{k-1} \dots \int_0^{s_2} ds_1 \dots \times \int_{R^n} \dots \int_{R^n}^{(k)} \chi_\Gamma \left(p + h \sum_{j=1}^k u_j \right) \prod_{j=1}^k Q(du_j) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Вероятность любого измеримого множества ступенчатых траекторий A записывается аналогично (ср. [53], [82]):

$$P_t(A) = \exp(-\alpha t h^{-1}) \times \left\{ \chi_A(p) + \sum_{k=1}^{\infty} h^{-k} \int_0^t ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1} \dots \right. \\ \left. \dots \int_0^{s_2} ds_1 \times \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \chi_A(p_\tau^k(s, u|p)) \prod_{j=1}^k Q(du_j) \right\}, \quad (p)$$

где

$$\chi_A(p) = \begin{cases} 1, & \text{если траектория } p_\tau \equiv p \text{ принадлежит множеству } A \\ & \text{при всех } \tau \in [0, t], \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\chi_A(p_\tau^k(s, u|p)) = \begin{cases} 1, & \text{если траектория } p_\tau^k(s, u|p) \text{ принадлежит} \\ & \text{множеству } A \text{ при всех } \tau \in [0, t], \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$p_\tau^k(s, u|p) = \begin{cases} p, & \text{если } 0 \leq \tau < s_1, \\ p + h \sum_{j=1}^m u_j, & \text{если } s_m \leq \tau < s_{m+1}, \\ p + h \sum_{j=1}^m u_j, & \text{если } s_k \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Этой формулой мы воспользуемся для оценок вероятности множества траекторий, совершающих скачки ограниченной величины.

Предложение 2.1. Условная вероятность множества траекторий, совершающих на отрезке $[t, t+\Delta]$ скачки величины большей некоторого $R > 0$ при условии, что за это время происходит только один скачок, равна

$$P^{\Delta, 1}(R) = \int_{|u| > R} Q(du) / \int Q(du).$$

Доказательство. Из формулы (p) следует, что вероятность множества траекторий, совершающих за время $[t, t+\Delta]$ один скачок, значения которого принадлежат борелевскому множеству B , равна:

$$P_{t+\Delta}^{\Delta, 1}(B) = \exp\{-\alpha(t+\Delta)h^{-1}\} \times \sum_{k=1}^{\infty} h^{-k} \int_t^{t+\Delta} ds_k \int_0^{s_k \wedge t} ds_{k-1} \dots \\ \dots \int_0^{s_2} ds_1 \times \int_{R^n} \dots \int_{R^n} \prod_{j=1}^k Q(du_j) \chi_B(u_k) =$$

$$= \Delta t^{-1} \int_B Q(du) \{ \exp(-\kappa \Delta h^{-1}) - \exp(-\kappa(t + \Delta)h^{-1}) \}.$$

Заметим теперь, что $P^{\Delta, 1}(R) = P_{t+\Delta}^{\Delta, 1}(|u| \geq R) / P_{t+\Delta}^{\Delta, 1}(R^n)$. Отсюда следует формула для условной вероятности

$$P^{\Delta, 1}(R) = \int_{|u| \geq R} Q(du) / \int Q(du).$$

Что и требовалось.

Предложение 2.2 $P^{\Delta, 1}(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ равномерно по Δ .

Доказательство. Поскольку любая конечная мера в сепарабельном гильбертовом пространстве может быть сколь угодно точно аппроксимирована мерой с компактным носителем (см. [64]), то $\int_{|u| \geq R} Q(du) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Утверждение предложения 2.2 следует теперь из предложения 2.1.

Процесс $\xi_{sp}(t)$, определенный формулой (2.7), называется скачкообразным процессом, отвечающим потенциалу $V(x)$.

Через $\xi(t)$, $\xi_s(t)$ и $\xi_p(t)$ обозначаются соответственно $\xi_{00}(t)$, $\xi_{s0}(t)$ и $\xi_{0p}(t)$. Очевидно, что $\xi_{sp}(t) = \xi_s(t) + p$. Зависимость процесса $\xi_{sp}(t)$ от параметра h такова, что среднее число скачков за время Δ , равное $M\nu(R^n, \Delta)$, растет пропорционально h^{-1} . Если интеграл $\int_{R^n} |u| |\tilde{V}|(du)$ сходится, то средняя величина скачка убывает пропорционально h .

3. Решение задачи Коши для уравнения Шредингера в p -представлении. Пусть $\tilde{\psi}_0(p) \in C(R^n)$. $H(p)$ — непрерывная вещественная функция, $\Phi(p)$ — измеримая вещественная фазовая функция, входящая в формулу (2.6'), $\kappa = Q(R^n)$ и $\xi_{sp}(t)$ — скачкообразный марковский процесс, отвечающий потенциалу $V(x)$. Рассмотрим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(p, t) = & \exp(\kappa t h^{-1}) M_t \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_{sp}(s)) ds + \right. \\ & \left. + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \right\} \tilde{\psi}_0(\xi_0(t)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\psi}(p, t) = \tilde{\psi}_0(p)$. Выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $\tilde{\psi}(p, t)$ (см. [127]).

Скачкообразный процесс $\xi_{sp}(t)$ является марковским процессом, поэтому

$$\tilde{\psi}(p, t + \Delta) = e^{\kappa \Delta h^{-1}} M_{t+\Delta} \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^{t+\Delta} H(\xi_p(s)) ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i \int_t^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \left\} e^{\kappa t h^{-1}} \times M_t \exp \left\{ \frac{1}{i h} \int_0^t H(\xi_p(t+\Delta t)) ds + \right. \\
& \left. + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \right\} \tilde{\Psi}_0(\xi_p(t+\Delta)). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что имеет место следующее равенство

$$\xi_{sp}(t+\Delta) = \xi_{sp}(t) + \xi_t(t+\Delta) = \tilde{\xi}_{s,p+\xi_t(t+\Delta)}(t). \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(p, t+\Delta) &= e^{\kappa \Delta h^{-1}} M_{t+\Delta} \exp \left\{ \frac{1}{i h} \int_t^{t+\Delta} H(\xi_{sp}(t+\Delta)) ds + \right. \\
& \left. + i \int_t^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \right\} \tilde{\Psi}(p + \xi_t(t+\Delta), t).
\end{aligned}$$

Величина $\xi_t(t+\Delta)$ представляет собой сумму скачков процесса $\xi_{sp}(t+\Delta)$ на отрезке $[t, t+\Delta]$.

Обозначим через $M_{t+\Delta}^{\Delta, k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) условное математическое ожидание при условии, что на отрезке $[t, t+\Delta]$ процесс $\xi_{sp}(t+\Delta)$ совершает k скачков. Поскольку вероятность совершить k скачков за время Δ равна $P_k = (\Delta h^{-1} \kappa)^k / k! \exp\{-\Delta \kappa h^{-1}\}$, то

$$\begin{aligned}
M_{t+\Delta} \{ \dots \} &= (1 - \kappa \Delta h^{-1}) M_{t+\Delta}^{\Delta, 0} \{ \dots \} + \kappa \Delta h^{-1} M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} \{ \dots \} + \\
& + O(\Delta^2). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Заметим, что величины $\xi_{sp}(t+\Delta)$ и $\int_s^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds)$ являются статистически зависимыми. Из определения (2.7) следует, что если процесс $\xi_{sp}(t+\Delta)$ совершил k скачков величины $h u_1, \dots, h u_k$ за время $[t, t+\Delta]$, то

$$\int_t^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) = \sum_{j=1}^k \left(\Phi(u_j) - \frac{\pi}{2} \right).$$

Предположим сначала, что $H(p)$ — ограниченная функция. Поскольку при скачке из точки p вероятность совершить скачок величины hdu равна

$$P(hdu) = Q(du) / Q(R^n),$$

то с точностью до членов порядка $O(\Delta^2)$ выполнено

$$\tilde{\Psi}(p, t+\Delta) = e^{\kappa \Delta h^{-1}} (1 - \kappa \Delta h^{-1}) (1 + i^{-1} \Delta H(p)) \tilde{\Psi}(p, t) +$$

$$+ \kappa \Delta h^{-1} \int_{R^n} Q(du) / Q(R^n) \tilde{\psi}(p + \hbar u, t) \exp i \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) + O(\Delta^2).$$

Учитывая (2.6) и приводя подобные члены, получим:

$$\tilde{\psi}(p, t + \Delta) = \tilde{\psi}(p, t) + i^{-1} \Delta h^{-1} \{H(p) + V(i\hbar \nabla_p)\} \tilde{\psi}(p, t) + O(\Delta^2).$$

Отсюда мы заключаем, что $\tilde{\psi}(p, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера в p -представлении:

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(i\hbar \nabla_p) \right\} \tilde{\psi}(p, t) = 0. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь вывод уравнения (2.1) в случае, если $H(p)$ — непрерывная неограниченная функция.

Пусть $R \geq 0$. Обозначим через $\chi_{R, \Delta}$ — характеристическую функцию множества траекторий процесса $\xi_{s,p}(t + \Delta)$, скачки которых на отрезке $[t, t + \Delta]$ не превосходят величины R и заметим, что

$$M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} \{1 - \chi_{R, \Delta}(\xi_{s,p}(t + \Delta))\} = P^{\Delta, 1}(R).$$

Поскольку функция $\tilde{\psi}(p, t)$ ограничена по модулю:

$$|\tilde{\psi}(p, t)| \leq \exp(\kappa t \hbar^{-1}) \|\tilde{\psi}_0\|_{C(R^n)},$$

то из предложения 2.2 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется столь большое $R = R(\varepsilon) > 0$, что

$$\left| M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} (1 - \chi_{R, \Delta}(\xi_{s,p}(t + \Delta))) \left[1 - \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta} H(\xi_{s,p}(t + \Delta)) ds \right\} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \int_t^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \tilde{\psi}(p + \xi_t(t + \Delta), t) \right| \leq \varepsilon, \quad (2.13)$$

причем данная оценка выполнена равномерно по Δ при $\Delta \downarrow 0$. С другой стороны,

$$\left| M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} \chi_{R, \Delta}(\xi_{s,p}(t + \Delta)) \left[1 - \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta} H(\xi_{s,p}(t + \Delta)) ds \right\} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \int_t^{t+\Delta} \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \tilde{\psi}(p + \xi_t(t + \Delta), t) \right| = \\ = O(\Delta) \times \max_{|u| \leq R(\varepsilon)} |H(p + u)|, \quad (2.14)$$

поскольку здесь при $s \in [t, t + \Delta]$ выполняется оценка $|\xi_{s,p}(t + \Delta)| \leq |p| + R$. Заметим теперь, что для любых H и χ выполнено тождество

$$e^{iH} \equiv 1 + (e^{iH} - 1)\chi + (e^{iH} - 1)(1 - \chi).$$

Поэтому из (2.11) и (2.13—2.14) следует:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p, t + \Delta) &= M_{t+\Delta}^{\lambda, 0} \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta} H(\xi_{sp}(t + \Delta)) ds \right\} \times \\ &\times \tilde{\Psi}(p + \xi_t(t + \Delta), t) + x\Delta\hbar^{-1} M_{t+\Delta}^{\lambda, 1} \exp \left\{ i \int_t^{t+\Delta} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \times \\ &\times \tilde{\Psi}(p + \xi_t(t + \Delta), t) + O(\Delta\varepsilon) + O(\Delta^2) \left(\max_{|u| \leq R(\varepsilon)} |H(p + u)| + 1 \right). \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования аналогичны выводу уравнения (2.12) в случае ограниченного $H(p)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p, t + \Delta) &= \tilde{\Psi}(p, t) + i^{-1}\Delta\hbar^{-1} \{H(p) + V(i\hbar\nabla_p)\} \tilde{\Psi}(p, t) + \\ &+ O(\Delta\varepsilon) + O(\Delta^2) (1 + \max_{|u| \leq R(\varepsilon)} |H(p + u)|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Переходя в (2.15) к пределу сначала по Δ , а затем по ε получаем тот же результат, что и в случае ограниченной функции $H(p)$. Итак, доказана

Теорема 2.3. Пусть $H(p)$ — вещественная непрерывная функция на R^n , $V(x)$ — фурье-образ меры конечной вариации, а $Q(B)$ и $\Phi(p)$ — неотрицательная мера на $\mathcal{B}(R^1)$ и вещественная фазовая функция на R^n такие, что

$$V(x) = \int_{R^n} \exp\{-i(px - \Phi(p))\} Q(dp), \quad x \in R^1.$$

Пусть далее $\nu(B, \Delta)$ — пуассоновская мера на $R^n \times [0, T]$ со средним $M\nu(B, \Delta) = \hbar^{-1} \cdot \Delta \cdot Q(B)$ и $\xi_{sp}(t)$ — марковский скачкообразный процесс со значениями в R^n , отвечающий потенциалу $V(x)$:

$$\xi_{sp}(t) = p + \hbar \int_s^t u \nu(du, d\tau).$$

Тогда функция

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p, t) &= \exp(xt\hbar^{-1}) M_t \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_{sp}(t)) ds + \right. \\ &\left. + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \tilde{\Psi}_0(\xi_p(t)) \end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\begin{aligned} \left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(i\hbar\nabla_p) \right\} \tilde{\Psi}(p, t) &= 0, \\ \tilde{\Psi}(p, 0) &= \tilde{\Psi}_0(p) \in C(R^n). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь решения уравнения Шредингера в координатном представлении.

Пусть $\tilde{\psi}_0(p) \in C(R^n) \cap \mathcal{L}_2(R^n)$. Поскольку $\xi_{s,p} = \xi_s + p$, то функционал траектории $\xi_s(t)$

$$\exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_s(t) + p) ds \right\} \tilde{\psi}_0(\xi(t) + p)$$

принимает значения в $\mathcal{L}_2(R^n)$ по параметру $p \in R^n$. Следовательно,

$$\|\tilde{\psi}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \exp(xth^{-1}) M_t \|\tilde{\psi}_0(\xi(t) + p)\|_{\mathcal{L}_2} = \exp(xth^{-1}) \|\tilde{\psi}_0\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Преобразование Фурье является линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{L}_2(R^n)$ в $\mathcal{L}_2(R^n)$. Теорема о коммутации линейного ограниченного оператора с операцией интегрирования по параметру (см. [81]) позволяет выполнить преобразование Фурье под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) & \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tilde{\psi}(p, t) dp = \exp(xth^{-1}) M_t \times \\ & \times \exp i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(\xi_s(t) + p) ds \right\} \tilde{\psi}_0(\xi(t) + p) dp. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Функция $\psi(x, t)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_2(R^n)$ и является решением задачи Коши для уравнения Шредингера в x -представлении

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H\left(\frac{\hbar}{i} \nabla_x\right) + V(x) \right\} \psi(x, t) = 0, \quad (2.17)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \int_{R^n} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tilde{\psi}_0(p) dp.$$

В том случае, если $H(p) = |p|^2/2m$, интеграл по dp в формуле (2.16) может быть вычислен явно:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) & = \exp(xth^{-1}) M_t \exp \left\{ i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) - \right. \\ & \left. - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{|\xi_s(t)|^2}{2m} ds \right\} \times \left(\frac{m}{2\pi\hbar it} \right)^{n/2} \int_{R^n} \psi_0(\xi) d\xi \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ \frac{im}{2th} \left| \frac{1}{m} \int_0^t \xi_s(t) ds - x + \xi \right|^2 \right\}. \quad (2.18)$$

При $V(x) \equiv 0$ формула (2.18) переходит в известную формулу решения уравнения Шредингера для свободной частицы: в этом случае процесс $\xi_s(t)$ скачков не совершает:

$$\xi_s(t) \equiv 0, \quad \nu(du, d\tau) \equiv 0 \quad \text{и} \quad x = 0.$$

Поэтому формула (2.18) переходит в известное соотношение

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar it} \right)^{n/2} \int_{R^n} \psi_0(\xi) d\xi \exp \frac{im}{2th} |x - \xi|^2.$$

Перейдем к выводу формулы для функции Грина уравнения Шредингера (2.17). Нам достаточно определить преобразование Фурье функции (2.18) для начального условия

$$\tilde{\psi}_0(p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \exp \frac{ipx'}{\hbar}.$$

В этом случае функцию $\tilde{\psi}(p, t)$ удобно рассматривать как медленно растущую обобщенную функцию и использовать теорию преобразования Фурье медленно растущих обобщенных функций (см. [80]). Пусть $\varphi(p)$ — функция из пространства $S(R^n)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Преобразование Фурье действует из $S(R^n)$ в $S(R^n)$ (см. [79]). Обозначим через $\tilde{\varphi}(x)$ — фурье-образ функции $\varphi(\cdot, p)$. Фурье-образом медленно растущей обобщенной функции $\tilde{\psi}(p, t)$ называется такая медленно растущая обобщенная функция $\psi(x, t)$, что

$$\int_{R^n} \tilde{\psi}(p, t) \varphi(p) dp = \int_{R^n} \psi(x, t) \tilde{\varphi}(-x) dx.$$

С одной стороны, в силу теоремы Фуббини

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} \tilde{\psi}(p, t) \varphi(p) dp = \\ & = \exp(\kappa th^{-1}) M_t \exp \left\{ i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \right\} \times \\ & \quad \times \int_{R^n} \varphi(p) \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)) \exp \left\{ \frac{1}{th} \int_0^t H(\xi_{ps}(t)) ds \right\} dp. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любой траектории $\xi_{ps}(t)$ выполнено

$$\int_{R^n} \varphi(p) \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)) \exp \left\{ \frac{1}{th} \int_0^t H(\xi_{ps}(t)) ds \right\} dp =$$

$$= \int_{R^n} \tilde{\varphi}(-x) \mathcal{F}_{p \rightarrow x} \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)) \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_{ps}(t)) ds \right\} dx.$$

Отсюда мы заключаем, что если $\tilde{\psi}_0(p)$ — непрерывная ограниченная функция, то Фурье-образом медленно растущей функции $\psi(p, t)$ является медленно растущая обобщенная функция (2.16), действующая на элементы пространства $S(R^n)$ по правилу

$$\int_{R^n} \psi(x, t) \varphi(x) dx = \exp(\kappa t \hbar^{-1} M_t) \exp \left\{ i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) \times \right. \\ \left. \times \int_{R^n} \tilde{\varphi}(-x) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(px - \int_0^t H(\xi_{ps}(t)) ds \right) \right\} \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)) dp \right.$$

и являющаяся решением задачи Коши для уравнения Шредингера (2.17). Начальное условие задачи (2.17) также является в этом случае медленно растущей обобщенной функцией. Отсюда следует

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда функцией Грина уравнения Шредингера (2.17) является медленно растущая обобщенная функция

$$G(x, x', t) = \exp(\kappa t \hbar^{-1} M_t) \exp \left\{ i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, d\tau) - \right. \\ \left. - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{|\xi_s(t)|^2}{2m} ds + \frac{im}{2\hbar} \left[\frac{1}{m} \int_0^t \xi_s(t) ds - x + \xi \right]^2 \right\} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{n/2}. \quad (2.19)$$

Аналогичные соображения приводят нас к новой формуле для решения уравнения теплопроводности.

Теорема 2.5. Пусть функция $V(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и $\hbar = 1$. Тогда функция

$$P(x, t) = \exp(\kappa t) M_t \exp \left\{ i \int_0^t \int_{R^n} \Phi(u) \nu(du, ds) - \right. \\ \left. - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t |\xi_s(t)|^2 ds \right\} \times \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2 t} \right)^{n/2} \int_{R^n} P_0(\xi) d\xi \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{1}{2t\sigma^2} \left[\int_0^t \sigma^2 \xi_s(t) ds - x + \xi \right]^2 \right\} \quad (2.20)$$

является решением задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ \frac{\sigma^2 \Delta}{2} + V(x) \right\} P(x, t), \quad (2.21)$$

$$P(x, 0) = P_0(x) \in C(R^n).$$

Если функции $V(x)$ и $P_0(x)$ — вещественные, то все коэффициенты уравнения (2.21) и его решение — вещественные. Поэтому мнимая составляющая $\exp i \int_0^t \int_{R^n} \Phi(u) \nu(du, d\tau)$ вклада в математическое ожидание не дает и в формуле (2.20) можно заменить $\exp i \int_0^t \int_{R^n} \Phi(u) \nu(du, d\tau)$ на $\cos \int_0^t \int_{R^n} \Phi(u) \nu(du, d\tau)$. В частности, из теоремы 2.5 вытекает

Следствие. Функция Грина уравнения теплопроводности (2.21) может быть представлена в виде:

$$P(x, x', t) = \exp(xt) M_t \cos \left\{ \int_0^t \int_{R^n} \Phi(u) \nu(du, d\tau) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\int_0^t |\xi_s(t)|^2 ds + \frac{1}{t} \left| \sigma^2 \int_0^t \xi_s(t) ds - x + x' \right|^2 \right] \right\}. \quad (2.22)$$

4. О связи между уравнением Колмогорова и уравнением Шредингера. Здесь мы рассмотрим вывод уравнения Шредингера для функции (2.8), основанный на использовании теории стохастических уравнений (см. [23—24]). Как будет показано, уравнение Шредингера (2.12) с ограниченными коэффициентами есть частный случай общего уравнения Колмогорова. Для этой цели мы воспользуемся следующим утверждением, являющимся следствием общей теоремы о решениях уравнения Колмогорова (см. [24], гл. 2, § 2).

Предложение 2.6. Пусть $\nu(A, \Delta)$ — пуассоновская мера на $R^n \times [0, T]$ со средним $M\nu(A, \Delta) = Q(A) \Delta$ и

$$\tilde{\nu}(A, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(A, \Delta) - Q(A) \Delta.$$

Пусть $a^j(p, t)$ и $g^j(p, t, u)$ неслучайные функции, $j=1, 2, \dots, m$ ($(p, t, u) \in R^m \times [0, T] \times R^n$), удовлетворяющие условиям:

- $a^j(p, t)$, $g^j(p, t, u)$ — непрерывны по p , t и дважды непрерывно дифференцируемы по p ;
- частные производные по p первого и второго порядка функций $a^j(p, t)$ равномерно ограничены,

в) $\int \{ |\nabla_p g|^2 + |\nabla_p g|^4 + |\nabla_p g|^2 \} Q(du) \leq C < \infty$, где постоянная C не зависит от (p, t) . Обозначим через $\xi_{ps}(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_{(s)} = a(\xi_{(s)}, s) ds + \int_{R^n} g(\xi_{(s)}, s, u) \tilde{\nu}(du, ds), \quad \xi_{(t)} = p.$$

Тогда функция $F(p, t) = Mf(\xi_{p,t}(T))$, где $f(p) \in C^2(R^n)$ является решением уравнения Колмогорова:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + (a(p, t), \nabla_p F(p, t)) + \\ & + \int_{R^n} \{F(p+g(p, t, u), t) - F(p, t) - g(p, t, u) \nabla_p F(p, t)\} Q(du) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для того, чтобы от уравнения (2.23) перейти к уравнению Шредингера (2.12), мы опишем специальную конструкцию процесса $\eta(s)$ в R^{n+1} .

Пусть в условии предложения 2.6 $m = n + 1$ и

$$V(x) = \int_{R^n} \exp i(\Phi(p) - px) Q(dp),$$

где $Q(dp)$ — неотрицательная конечная мера такая, что $\int_{R^n} |u| Q(du) < \infty$, $\Phi(p)$ — измеримая вещественная функция и $\nu(A, \Delta)$ — пуассоновская мера со средним $M\nu(A, \Delta) = h^{-1}Q(A)\Delta$. Пусть далее

$$\begin{aligned} d\eta^{(k)}(s) &= h \int_{R^n} u_k Q(du) ds + h^2 \int_{R^n} u_k \tilde{\nu}(du, ds), \\ \eta^{(k)}(t) &= p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Обозначим $u = (u_1, \dots, u_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $\eta(s) = (\eta^{(1)}(s), \dots, \eta^{(n)}(s))$ и положим (см. [127]):

$$\begin{aligned} d\eta^{(n+1)}(s) &= -H(\eta(s)) ds + h \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) Q(du) ds + \\ &+ h^2 \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \tilde{\nu}(du, ds), \quad \eta^{(n+1)}(t) = z. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, в условиях предложения 2.6

$$g^j(p, t, u) = h^2 u_j, \quad \text{при } 1 \leq j \leq n \text{ и } g^{n+1}(p, t, u) = h^2 \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$a^j(p, t) = h \int_{R^n} u_j Q(du) \quad \text{при } 1 \leq j \leq n$$

и

$$a^{n+1}(p, t) = -H(p) + h \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) Q(du).$$

В дальнейшем изложении предполагается, что $H(p) \in C^2(R^n)^*$. Таким образом, коэффициенты a^j и g^j , определенные выше, удовлетворяют условиям предложения 2.5.

Рассмотрим математическое ожидание

$$F(p, z, t) = Mf(\eta_{pzt}(T)) \quad (t \leq T),$$

где η_{pzt} — решение системы стохастических дифференциальных уравнений (2.24—2.25), а $f(x_1, \dots, x_n, z) = \psi_0(x_1, \dots, x_n) e^{iz/h}$, где $\psi_0(x) \in C^2(R^n)$. Заметим, что решения системы (2.24—2.25) однородны по z :

$$\eta_{p, z+u, t} = (\eta_{p, z, t}^{(1)}, \dots, \eta_{p, z, t}^{(n)}, \eta_{p, z, t}^{(n+1)} + u),$$

поэтому

$$F(p, z+u, t) = \exp(iu/h) F(p, z, t). \quad (2.26)$$

В силу предложения 2.5, функция $F(p, z, t)$ является решением уравнения Колмогорова:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} F(p, z, t) + h \sum_{k=1}^n \int_{R^n} u_k Q(du) \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} F(p, z, t) + \\ & + \left(-H(p) + h \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) Q(du) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} F(p, z, t) + \\ & + h^{-1} \int_{R^n} \left\{ F\left(p + hu, z + h \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right), t\right) - F(p, z, t) \right\} Q(du) - \\ & - h \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial p_k} F(p, z, t) \cdot \int_{R^n} u_k Q(du) - \\ & - h \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) Q(du) \frac{\partial}{\partial z} F(p, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из соотношения (2.26) следует, что $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{i}{h} F$. Учитывая это равенство и приводя подобные члены в (2.27) получим уравнение Шредингера с обратным временем для функции F непосредственно из уравнения Колмогорова (2.27):

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, z, t) - \frac{i}{h} H(p) F(p, z, t) -$$

* Через $C^k(R^n)$ обозначено банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{l=0}^k \sum_{l_1+\dots+l_n=l} \sup_x \left| \frac{\partial^l}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} f(x) \right|.$$

$$-\frac{i}{\hbar} \int_{R^n} F(p+hu, z, t) \exp(i\Phi(u)) Q(du) - \\ - \hbar^{-1} F(p, z, t) \cdot \int_{R^n} Q(du) = 0$$

или

$$\left\{ +i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(i\hbar \nabla_p) - i\kappa \right\} F(p, z, t) = 0, \quad (2.28)$$

где $\kappa = \int_{R^n} Q(du)$ и $\lim_{t \uparrow T} F(p, z, t) = \psi_0(p) \exp iz/\hbar$. Для того, чтобы исключить член $i\kappa$ в уравнении (2.28), достаточно умножить функцию $F(p, z, t)$ на $\exp \kappa(T-t)\hbar^{-1}$. Итак, доказано, что $\psi_0(p, z, t) = \exp(\kappa(T-t)\hbar^{-1}) Mf(\eta_{p,z,t}(T))$ — решение задачи Коши для уравнения Шредингера с обратным временем

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(i\hbar \nabla_p) \right\} \psi_T(p, z, t) = 0 \\ \lim_{t \uparrow T} \psi_T(p, z, t) = \psi_0(p) \exp iz/\hbar. \quad (2.29)$$

Учитывая введенные выше обозначения, функция $\psi_T(p, z, t)$ может быть записана в виде математического ожидания:

$$\psi_T(p, z, t) = \exp(\kappa(T-t)\hbar^{-1}) M_t \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_t^T H(\eta_{sp}(T)) ds + \frac{i}{\hbar} z + i \int_t^T \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \tilde{v}(du, ds) \right\} \times \\ \times \psi_0(\eta_{tp}(T)), \quad (2.30)$$

где $\eta_{sp}(T) = p + \hbar \int_s^T u v(du, d\tau)$.

Очевидно, что если в (2.29—2.30) положить $z=0$, $T=0$ и заменить t на $-t$, то функция (2.30) перейдет в решение (2.8) уравнения Шредингера (2.12).

5. О решении уравнения Шредингера методом Монте-Карло. Результаты, изложенные в п.п. 2—4, позволяют обосновать применение метода Монте-Карло для решения уравнения Шредингера (см. [127]). Рассмотрим вычислительную схему решения задачи Коши (2.12), вытекающую из представления решения в виде математического ожидания (2.8).

Для моделирования траектории $\xi_{sp}(t)$ используются две независимые случайные величины:

распределенная экспоненциально случайная величина τ :

$$P(\tau \leq T) = \exp \kappa T \hbar^{-1}$$

и случайный вектор u в R^n :

$$P(u \in B) = \int_B Q(du) / \int_{R^n} Q(du).$$

Тогда $\xi_{sp}^{(r)}(t) = p + h \sum_{j=1}^{k-1} u_j^{(r)}$, если $\sum_{j=1}^k \tau_j^{(r)} < t - s \leq \sum_{j=1}^{k-1} \tau_j^{(r)}$, где $\xi_{sp}^{(r)}(t)$ — r -я реализация случайной траектории $\xi_{sp}(t)$, а $\tau_j^{(r)}$ и $u_j^{(r)}$ — независимые реализации случайных величин τ и u . Каждому r отвечает серия случайных величин $\{\tau_j^{(r)}\}_{j=1}^{j_r}$ и $\{u_j^{(r)}\}_{j=1}^{j_r}$, длина которой определяется условием $\sum_{j=1}^{j_r} \tau_j^{(r)} \geq t$.

Пусть $\Delta_j^{(r)} = \min \left\{ \tau_j^{(r)}, t - \sum_{k=1}^{j-1} \tau_k^{(r)} \right\}$, так что $\sum_{j=1}^{j_r} \Delta_j^{(r)} = t$. Рассмотрим случайную величину ω , независимые реализации которой вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} \omega_r = & \Phi_0 \left(p + h \sum_{j=1}^{j_r} u_j^{(r)} \right) \times \exp \left\{ \frac{1}{ih} \sum_{k=1}^{j_r} H \left(p + h \sum_{j=1}^k u_j^{(r)} \right) \Delta_j^{(r)} + \right. \\ & \left. + i \sum_{j=1}^{j_r} \left(\Phi(u_j^{(r)}) - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \tilde{\Phi}_0(\xi_{sp}^{(r)}(t)) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{ih} \int_0^t H(\xi_{sp}^{(r)}(t)) ds + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu^{(r)}(du, ds) \right\}. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Поскольку реализации $\xi_{sp}^{(r)}(t)$ случайной траектории независимы и существует математическое ожидание величины (2.31), то из эргодической теоремы Биркгофа-Хинчина (см. [59]) и теоремы 2.3 следует существование предела

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \omega_r \exp \kappa t h^{-1} = M \omega \exp \kappa t h^{-1} = \exp(\kappa t h^{-1}) M_t \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{ih} \int_0^t H(\xi_{sp}(t)) ds + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \times \\ \times \tilde{\Phi}_0(\xi_p(t)) = \tilde{\Psi}(p, t), \quad (2.32) \end{aligned}$$

где $\tilde{\Psi}(p, t)$ — решение задачи (2.12).

Оценим дисперсию D случайной величины ω :

$$D = M_{pt} |\omega|^2 - |M_{pt} \omega|^2.$$

Грубая оценка дисперсии получается сразу

$$D \leq M_{pt} |\omega|^2 + |M_{pt} \omega|^2 \leq 2 \|\Phi_0\|_{C(R^n)}^2. \quad (2.33)$$

Получим оценку, убывающую при $t \downarrow 0$. Для этого введем следующее обозначение:

$$V_+(x) = \int \exp(-ipx) Q(dp),$$

где мера Q определялась соотношением (2.6). Тогда $V_+(ih\nabla_p)$ — ограниченный оператор, действующий $C(R^n)$ по правилу:

$$V_+(ih\nabla_p) f(p) = \int Q(du) f(p + hu).$$

Нетрудно видеть, что

$$M_{tp} f(\xi_p(t)) = \exp\{V_+(ih\nabla_p) th^{-1}\} f(p).$$

Эта формула является прямым следствием определения функции V_+ и уравнения Колмогорова. Норма оператора $V_+(ih\nabla_p)$ легко оценивается

$$\|V_+(ih\nabla_p)\|_{C(R^n)} = \int Q(du) = \kappa.$$

Аналогично оцениваются нормы операторов $\exp V_+(ih\nabla_p) th^{-1}$ и $\exp\{V_+(ih\nabla_p) th^{-1}\} - 1 \stackrel{\text{def}}{=} K(t)$:

$$\|\exp V_+(ih\nabla_p) th^{-1}\|_{C(R^n)} \leq \exp(\kappa th^{-1}), \quad (2.34)$$

$$\|K(t)\|_{C(R^n)} = \|\exp(V_+(ih\nabla_p) th^{-1}) - 1\|_{C(R^n)} \leq \kappa th^{-1} \exp(\kappa th^{-1}).$$

Поэтому

$$M_{tp} |\omega|^2 = \exp V_+(ih\nabla_p) th^{-1} |\psi_0(p)|^2 = |\psi_0(p)|^2 + K(t) |\psi_0(t)|^2,$$

$$|M_{tp} \omega|^2 = |\psi_0(p)|^2 + 2\text{Re} \psi_0(p) K(t) \psi_0(p) + |K(t) \psi_0(p)|^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= M_{tp} |\omega|^2 - |M_{tp} \omega|^2 \leq \\ &\leq (3 \|K(t)\|_{C(R^n)} + \|K(t)\|_{C(R^n)}^2) \times \|\psi_0\|_{C(R^n)}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Сравнивая (2.33) и (2.35), мы заключаем, что

$$\mathcal{D} \leq \min\{2, 3a(t) + a^2(t)\} \times \|\psi_0\|^2, \quad (2.36)$$

где $a(t) = \kappa th^{-1} \exp(\kappa th^{-1})$. Дисперсия D случайной величины $\exp(\kappa th^{-1}) \omega$ равна

$$D = \exp(2\kappa th^{-1}) \mathcal{D}. \quad (2.37)$$

Центральная предельная теорема (см. [59]) позволяет получить оценку погрешности метода Монте-Карло. Именно, справедлива

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия теоремы 2.3, ω_r — случайная величина, определенная формулой (2.31), и $\tilde{\psi}(p, t)$ — решение задачи Коши для уравнения Шредингера (2.12). Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \omega_r - \tilde{\psi}(p, t) \right| \leq x (D/N)^{1/2} \right\} = \Phi(x),$$

где D — дисперсия (2.37), а $\Phi(x)$ — интеграл вероятности:

$$\Phi(x) = (2\pi)^{1/2} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt.$$

В заключение рассмотрим вопрос о возможности уменьшения дисперсии оценок путем абсолютно непрерывных преобразований меры. Известно, (см. [32]), что минимальная дисперсия оценки интеграла

$$I = \int f(q) \mu(dq),$$

где μ — вероятностная мера, достигается при использовании вероятностной меры λ_0 , абсолютно непрерывной относительно меры μ :

$$\lambda_0(dq) = \mu(dq) |f(q)| / \int |f(u)| \mu(du).$$

При этом интеграл I может быть вычислен по формуле

$$I = \int f(q) \lambda_0(dq) |f(q)| \times \int |f(u)| \mu(du), \quad (2.38)$$

а дисперсия оценки интеграла (2.38) с помощью суммы

$$I \simeq x_N = N^{-1} \sum_{i=1}^N f(q_i) |f(q_i)| \cdot \int |f(u)| \mu(du),$$

где q_i — независимые случайные величины, распределенные по закону λ_0 , равна

$$D_0 = N^{-1} \left[\left(\int |f(q)| \mu(dq) \right)^2 - \left| \int f(q) \mu(dq) \right|^2 \right]. \quad (2.39)$$

Мы используем этот результат для получения оптимальных оценок дисперсии интегральных представлений решений уравнения Шредингера.

Пусть $\tilde{\omega}$ — некоторый комплекснозначный функционал, определенный на траекториях скачкообразных процессов со значениями в R^n и $\tilde{\xi}_{sp}$ — скачкообразный процесс в R^n , мера траекторий которого абсолютно непрерывна относительно меры траекторий процесса ξ_{sp} , заданного формулой (2.7). Если выполняется равенство

$$M_{pt} \tilde{\omega} [\tilde{\xi}_{sp}(t)] = M_{pt} \omega [\xi_{sp}(t)] = \tilde{\psi}(p, t) e^{-\kappa t h^{-1}}, \quad (2.40)$$

где $\omega[\cdot]$ — функционал (2.31), а $\tilde{\psi}(p, t)$ — решение задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(p) + V(i\hbar \nabla_p) \right\} \tilde{\psi}(p, t) = 0 \quad (2.41)$$

$$\tilde{\psi}(p, 0) = \tilde{\psi}_0(p) \in C(R^n),$$

то из формул (2.38 — 2.39) следует, что минимальная дисперсия случайной величины $\tilde{\omega}$ равна

$$D_{\text{MIN}} = (M_{pt}|\omega|)^2 - |M_{pt}\omega|^2$$

и минимум дисперсии достигается для такого процесса, мера траекторий которого равна

$$\lambda_0(d\xi_{sp}(t)) = \mu(d\xi_{sp}(t))|\omega[\xi_{sp}(t)]|/M_{pt}|\omega|,$$

где μ — мера траекторий процесса $\xi_{sp}(t)$.

Процесс $\tilde{\xi}_{sp}$, доставляющий минимум дисперсии случайной величины $\omega[\tilde{\xi}_{sp}]$, удовлетворяющей (2.40), будем называть оптимальным процессом, соответствующим задаче (2.41).

Предложение 2.7. Мера траекторий оптимального процесса, соответствующего задаче (2.41) равна

$$\lambda_0[d\xi_{sp}(t)] = \mu[d\xi_{sp}(t)]f(\xi_p(t), t),$$

где $f(q, t) = |\tilde{\Psi}_0(q)|/R(q, t)$, а $R(q, t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} h \frac{\partial}{\partial t} R(q, t) &= \int [R(q + hu, t) - R(q, t)] Q(du), \\ R(q, 0) &= |\tilde{\Psi}_0(q)|. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Доказательство этого утверждения следует из формулы (2.41) и определения (2.31) функционала $\omega[\xi_{sp}(t)]$, а также из установленного ранее соотношения

$$R(p, t) = M_{pt}|\omega|.$$

Следствие. Если $|\tilde{\Psi}_0(q)| = \text{const}$, то процесс $\xi_{sp}(t)$, определенный формулой (2.7), является оптимальным.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ТИПА ХАРТРИ И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

1. Ветвящийся процесс, связанный с уравнением типа Хартри. Ветвящиеся процессы, как известно, связаны с нелинейными уравнениями. С одной стороны, их переходные вероятности и производящие функции переходных вероятностей удовлетворяют нелинейным уравнениям (см. [63]).

С другой стороны, использование ветвящихся процессов при решении нелинейных уравнений в ряде случаев (см. [32]) позволяет избежать необходимости запоминать приближения решений, полученные на предыдущих итерациях, для вычисления последующих как при использовании итерационных методов, так и при использовании метода T -отображений (см. [51], [78—79], [121]). В диссертации А. Т. Заплитной [33] описана мера на пространстве непрерывных ветвящихся траекторий и конструкция функционала траекторий, позволяющая записать решение задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения второго порядка с гладкими ограниченными коэффициентами

$$\left(\frac{d}{dt} - L\right)u(x, t) = \sum_{k=1}^m b_k(x, t)(u(x, t))^k, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

в виде интеграла по траекториям

$$u(x, t) = \int \Phi[\xi_{s,x}(t)] \mu(d\xi_{s,x}(t)),$$

где μ — мера на множестве ветвящихся траекторий, определяемая с помощью функции Грина уравнения $\left(\frac{d}{dt} - L\right)u(x, t) = 0$, а $\Phi[\cdot]$ — специальный функционал. Сформулированы условия, при которых мера μ имеет конечную вариацию, но вопрос о конструкции случайного процесса, позволяющего записать решение в виде математического ожидания, остается открытым.

В этом параграфе описывается ветвящийся марковский скачкообразный процесс и специальный функционал траектории процесса, среднее значение которого дает решение задачи Коши для уравнения типа Хартри в p -представлении.

Рассмотрим квазилинейное уравнение типа Хартри, в котором для простоты положим $h=1$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left\{ H\left(\frac{1}{i} \nabla_x\right) + V(x) + \langle \psi(q, t), \mathcal{L}\left(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q\right) \psi(q, t) \rangle \right\} \psi(x, t), \quad (3.1)$$

где $x \in R^n$, $H(p)$ — непрерывная вещественная функция, $V(x)$ — Фурье-образ меры конечной вариации в R^n , $\mathcal{L}\left(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q\right)$ — ограниченный оператор, зависящий от параметра x и действующий в $L_2(R^n)$ по правилу:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}(x)\psi)(q) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\left(x, \frac{1}{i} \nabla_q, q\right) \psi(q) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{R^n} e^{iq\xi} \mathcal{L}(x, d\xi, q) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{R^n} e^{-iq'\xi} \psi(q') dq'. \end{aligned}$$

Величина

$$\langle \psi, \hat{\mathcal{L}}(x)\psi \rangle = \int \bar{\psi}(q) (\hat{\mathcal{L}}(x)\psi)(q) dq$$

называется средним значением оператора $\hat{\mathcal{L}}(x)$ в состоянии ψ .

Если мера $\mathcal{L}(x, d\xi, q)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в R^n , то есть если

$$\mathcal{L}(x, A, q) = \int_A L(x, \xi, q) d\xi, \quad \forall A \in \mathcal{B}(R^n),$$

то оператор $\hat{\mathcal{L}}(x)$ является псевдодифференциальным (см. [50]), а функция $L(x, \xi, q)$ называется символом оператора $\hat{\mathcal{L}}(x)$.

Если $V(x)$ — вещественная функция, либо $\sup_x \text{Im } V(x) \leq c < \infty$, а $\hat{\mathcal{L}}(x)$ — самосопряженный оператор, то теорема

существования и единственности решения уравнения (3.1), удовлетворяющего начальному условию

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \in \mathcal{L}_2(R^n), \quad (3.2)$$

может быть доказана для произвольного отрезка $[0, t]$ как итерационными методами, так и методом T -отображений (см. [51], [50], [82], [83]).

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что существуют неотрицательные конечные меры $Q(B_1)$ на R^n и $D(B_2, B_3, B_4)$ на $R^n \times R^n \times R^n$ и измеримые вещественные функции $\Phi_c(p)$ и $\Phi_g(p, \xi, u)$ такие, что

$$V(x) = (2\pi)^{n/2} \int_{R^n} \exp\{i(\Phi_c(p) - px)\} Q(dp), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, A, q) = (2\pi)^{n/2} \int_{R^n} \int_A \int_{R^n} \exp\{i(\Phi_g(p, \xi, u) - px + uq)\} \times \\ \times D(dp, d\xi, du). \end{aligned}$$

Функции Φ_c и Φ_g называются фазовыми функциями потенциала $V(x)$ и оператора $\hat{\mathcal{L}}(x)$ соответственно. Если условия (3.3) выполнены, то операторы $V(i\nabla_p)$ и $\langle \psi, \hat{\mathcal{L}}(i\nabla_p)\psi \rangle$ можно представить как интегральные:

$$V(i\nabla_p)\varphi(p) = \int_{R^n} e^{i\Phi_c(u)} Q(du) \varphi(p+u), \quad (3.4)$$

$$\langle \psi, \hat{\mathcal{L}}(i\nabla_p)\psi \rangle \varphi(p) = \int_{R^{3n}} e^{i\Phi_g(p', \xi, u-\xi)} D(dp', d\xi, du-\xi) \times$$

$$\times \bar{\varphi}(u) \bar{\varphi}(\xi) \bar{\varphi}(p+p') = \int_{R^{3n}} D(dp', d\xi+p, du-\xi) \times$$

$$\times \exp(i\Phi_g(p', \xi+p, \xi-u)) \varphi(u+p) \varphi(\xi+p) \varphi(p+p'). \quad (3.5)$$

Опишем теперь марковский ветвящийся скачкообразный процесс, связанный с уравнением типа Хартри.

Пусть время τ между скачками, которые совершают ветви траектории процесса $\xi_{sp}(t)$, распределено экспоненциально, причем показатель экспоненты зависит, вообще говоря, от того, из какой точки происходит скачок:

$$P(\tau \leq T) = \exp\{-\kappa(q)T\},$$

где q точка, из которой происходит скачок, а

$$\kappa(q) = \int_{R^n} Q(du) + \int_{R^{3n}} D(dp', d\xi+q, du-\xi).$$

Будем считать, что выполнено условие

$$\kappa = \sup_q \kappa(q) < \infty,$$

обеспечивающее с вероятностью единица конечность числа скачков за любое конечное время.

Совершая скачок, траектория процесса ξ_{sp} может разветвиться на три ветви с вероятностью

$$P_g(q) = \kappa^{-1}(q) \int_{R^{3n}} D(d\rho', d\xi + q, du - \xi),$$

либо остаться неразветвленной с вероятностью

$$P_n(q) = 1 - P_g(q) = \kappa^{-1}(q) \int_{R^n} Q(du).$$

Если ветвления не произошло, то вероятность совершить скачок, значения которого принадлежат множеству $B_1 \in \mathcal{B}(R^n)$, не зависит от того, из какой точки произошел скачок:

$$P(B_1) = \int_{B_1} Q(du) \Big/ \int_{R^n} Q(du).$$

Если же происходит скачок с ветвлением, траектория распадается на три ветви, каждая из которых совершает некоторый скачок, причем вероятность совершить скачки, значения которых принадлежат множеству B_i ($i=2, 3, 4$) зависит, вообще говоря, от того, из какой точки произошел скачок:

$$P(B_2, B_3, B_4 | q) = \int_{B_2} \int_{B_3} \int_{B_4} D(d\rho', d\xi + q, du - \xi) \Big/ \int_{R^{3n}} D(d\rho', d\xi + q, du - \xi).$$

После ветвления каждая ветвь совершает дальнейшие скачки и дальнейшие ветвления независимо от других ветвей. Марковский ветвящийся скачкообразный процесс $\xi_{sp}(t)$, описанный выше, называется процессом, отвечающим потенциалу $V(x)$ и оператору $\hat{\mathcal{L}}(x)$.

Нетрудно видеть, что каждой траектории процесса $\xi_{sp}(t)$ на отрезке $[0, t]$ можно сопоставить дерево $\Gamma(\xi_{sp}(t))$, все вершины которого, кроме корневой, имеют степень равную либо двум, либо четырем. Пример такого дерева изображен на рисунке 3.1: Каждому пути l на дереве $\Gamma(\xi_{sp}(t))$, идущему от корня к вершине, можно сопоставить неветвящуюся скачкообразную траекторию $\eta_{sp}^l(t)$, совершающую скачки, равные скачкам тех ветвей траектории $\xi_{sp}(t)$ из которых она состоит. Такие траектории мы будем называть составляющими ветвящейся траектории $\xi_{sp}(t)$ или ее ветвями:

$$\xi_{sp}(t) = \bigcup_{l \in \Gamma} \eta_{sp}^l(t).$$

Каждую составляющую, совершающую N скачков, удобно занумеровать последовательностью N чисел $\{i_1, \dots, i_N\}$, где $i_k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Например, выделенной составляющей на рис.

отвечает последовательность $\{1, 3, 4, 3\}$ и эта последовательность используется как номер составляющей:

$$\eta'_{sp}(t) = \eta_{1343}(s) = \eta_{1343}.$$

(см. [3.2]).

Аналогичная нумерация используется и для обозначения текущих координат составляющей. Например, p_{1343} , p_{134} , p_{13} , p_1 , p — положения составляющей η_{1343} траектории $\xi_{sp}(t)$ при

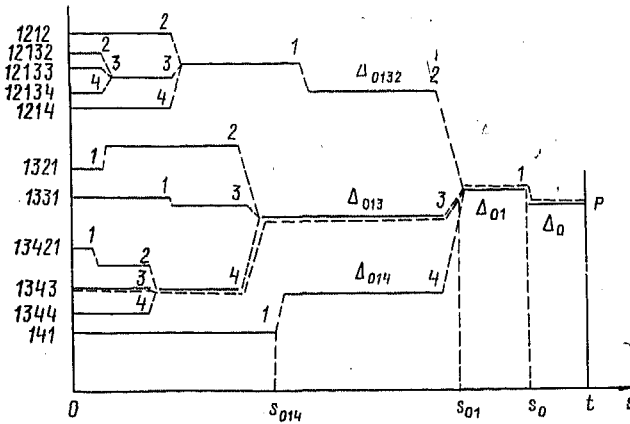


Рис. 3.1

$0 \leq s < s_{0134}$, $s_{0134} \leq s < s_{013}$, ..., $s_0 \leq s \leq t$ соответственно; u_{1343} , u_{134} , u_{13} , u_1 — величины скачков вдоль составляющей η_{1343} , происходящих в моменты s_{0134} , s_{013} , s_{01} , s_0 .

2. Амплитуда ветвящейся траектории. Пусть $\tilde{\Psi}_0(p) \in C(R^n)$. Определим рекуррентным образом функционал траектории $\xi_{sp}(t)$ скачкаобразного процесса.

Предположим, что составляющая η_{i_1, \dots, i_N} траектории $\xi_{sp}(t)$ совершает N скачков в моменты $s_{0, i_1, \dots, i_{N-1}}, \dots, s_{0, i_1}, s_0$ и пусть $\Delta_0 = t - s_0$, $\Delta_{0i_1} = s_{0i_1} - s_0, \dots, \Delta_{0i_1, \dots, i_{N-1}} = s_{0, i_1, \dots, i_{N-1}}$. Для составляющей η_{i_1, \dots, i_N} положим

$$\tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_N} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Psi}_0(p_{i_1, \dots, i_N}),$$

где p_{i_1, \dots, i_N} — положение составляющей η_{i_1, \dots, i_N} при $s = t$. Аналогичным образом определяются величины $\tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_N, l}$, $l = 1, 2, \dots$ для всех составляющих траектории $\xi_{sp}(t)$. Далее при $k = N, N-1, \dots, 2$ положим

$$\tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_{k-1}} \stackrel{\text{def}}{=} i^{-1} \exp \left\{ \left(x(p_{i_1, \dots, i_{k-1}}) + \frac{1}{i} H(p_{i_1, \dots, i_{k-1}}) \right) \Delta \right\} \times$$

$$\times \begin{cases} \tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1} \exp \{i\Phi_c(u_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1})\}, & \text{если } i_k = 1; \\ \tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_{k-1}, 2} \tilde{\Psi}_{i_1, \dots, i_{k-1}, 3} \bar{\Psi}_{i_1, \dots, i_{k-1}, 4} \times \\ \times \exp \{i\Phi_g(u_{i_1, \dots, i_{k-1}, 2}, u_{i_1, \dots, i_{k-1}, 3} + p_{i_1, \dots, i_{k-1}, 2}, \\ u_{i_1, \dots, i_{k-1}, 4} - u_{i_1, \dots, i_{k-1}, 3})\}, & \text{если } i_k \neq 1. \end{cases}$$

Поскольку условие $\sup_p \kappa(p) < \infty$ обеспечивает конечность числа составляющих, то перебрав конечное число составляющих, мы вычислим значение функционала Φ траектории $\xi_{s,p}(t)$:

$$[\Phi [\xi_{s,p}(t)]] \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \left(\kappa(p) + \frac{1}{i} H(p) \right) \Delta_0 \right\} \tilde{\Psi}_{i_1}, \quad (3.6)$$

называемого амплитудой траектории $\xi_{s,p}(t)$. Например, амплитуда траектории, изображенной на рис. 3.2, вычисляется следующим образом:

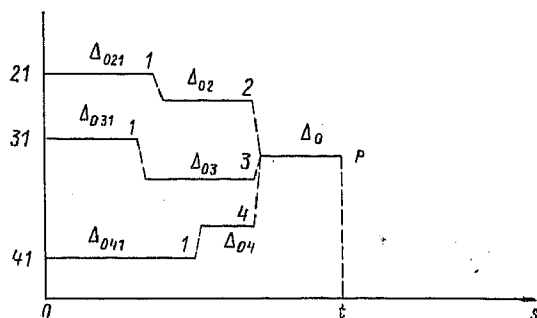


Рис. 3.2

$$\begin{aligned} \Phi [\xi_{s,p}(t)] = & i^{-1} \tilde{\Psi}_0(p_{21}) \exp \left\{ \left(\kappa(p_{21}) + \frac{1}{i} H(p_{21}) \right) \Delta_{021} + i\Phi_c(u_{21}) + \right. \\ & \left. + \left(\kappa(p_2) + \frac{1}{i} H(p_2) \right) \Delta_{02} \right\} i^{-1} \tilde{\Psi}_0(p_{31}) \exp \left\{ \left(\kappa(p_{31}) + \frac{1}{i} H(p_{31}) \right) \Delta_{031} + \right. \\ & \left. + i\Phi_c(u_{31}) + \left(\kappa(p_3) + \frac{1}{i} H(p_3) \right) \Delta_{03} \right\} i \bar{\Psi}_0(p_{41}) \times \\ & \times \exp \left\{ \left(\kappa(p_{41}) + iH(p_{41}) \right) \Delta_{041} + \frac{1}{i} \Phi_c(u_{41}) + \right. \\ & \left. + \left(\kappa(p_4) + iH(p_4) \right) \Delta_{04} \right\} i^{-1} \exp \left\{ \left(\kappa(p) + \frac{1}{i} H(p) \right) \Delta_0 + \right. \\ & \left. + i\Phi_g(u_2, u_3 + p, u_4 - u_3) \right\}. \end{aligned}$$

3. Вывод уравнения для среднего значения амплитуды. Предположим, что математическое ожидание

$$M_t \Phi [\xi_{s,p}(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Psi}(p, t)$$

существует и ограничено и выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $\tilde{\psi}(p, t)$, аналогично тому, как выводилось уравнение (2.12) в § 2. Для упрощения выкладок будем предполагать, что $H(p)$ — ограниченная функция. Обобщение на случай неограниченных функций не представляет принципиальных трудностей и рассматривается далее в этом параграфе.

Процесс $\xi_{sp}(t)$ является марковским, поэтому

$$M_{t+\Delta} \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] = M_{t+\Delta} M_t \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)].$$

За время $[t, t+\Delta]$ процесс $\xi_{sp}(t+\Delta)$ не совершит ни одного скачка с вероятностью $1 - \kappa(p)\Delta$, один скачок — с вероятностью $\kappa(p)\Delta$ и более одного скачка — с вероятностью $O(\Delta^2)$. Используя обозначения § 2, представим $\tilde{\psi}(p, t+\Delta)$ в виде суммы условных математических ожиданий:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(p, t+\Delta) &= (1 - \kappa(p)\Delta) M_{t+\Delta}^{\Delta, 0} M_t \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] + \\ &+ \kappa(p)\Delta M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} M_t \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если за время $[t, t+\Delta]$ не произошло ни одного скачка, то по определению функционала $\Phi [\xi_{sp}]$, его значения вычисляются по рекуррентной формуле:

$$\Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] = \exp \left\{ \left(\kappa(p) + \frac{1}{t} H(p) \right) \Delta \right\} \Phi [\xi_{sp}(t)].$$

Поэтому первое слагаемое в формуле (3.7) дает

$$\begin{aligned} (1 - \kappa(p)\Delta) M_{t+\Delta}^{\Delta, 0} M_t \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] &= \\ &= (1 - iH(p)\Delta) \tilde{\psi}(p, t) + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обозначим через $M_{t+\Delta, c}^{\Delta, 1}$ и $M_{t+\Delta, g}^{\Delta, 1}$ условные математические ожидания при условиях, что за время $[t, t+\Delta]$ произошел один скачок без ветвления и с ветвлением соответственно. Если скачок произошел, то с вероятностью $P_c(p)$ ветвления не происходит и с вероятностью $1 - P_c(p) = P_g(p)$ траектория делится на три независимые ветви. Таким образом,

$$M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} = P_c(p) M_{t+\Delta, c}^{\Delta, 1} + P_g(p) M_{t+\Delta, g}^{\Delta, 1}. \quad (3.9)$$

Если за время $[t, t+\Delta]$ произошел скачок (без ветвления), значения которого принадлежат элементу du , то из рекуррентного определения функционала $\Phi [\xi_{sp}]$ следует:

$$\Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] = i^{-1} \exp \{ i\Phi_c(u) \} \Phi [\xi_{sp}(t)] + O(\Delta), \quad (3.10)$$

а если произошло ветвление на независимые ветви, вдоль которых произошли скачки, значения которых принадлежат элементам dp' , $d\xi'$, du , то

$$\begin{aligned} \Phi [\xi_{sp}(t+\Delta)] &= i^{-1} \exp \{ i\Phi_g(p', p+\xi', u-\xi') \} \times \\ &\times \Phi [\xi_{s, p+p'}(t)] \Phi [\xi_{s, p+\xi'}(t)] \bar{\Phi} [\xi_{s, p+u}(t)] + O(\Delta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Теперь из формул (3.9—3.11) и определения переходных вероятностей скачков, получим:

$$\begin{aligned}
 M_{t+\Delta}^{\Delta, 1} M_t \Phi [\xi_{s,p}(t+\Delta)] &= \frac{i^{-1} P_c(p)}{\int_{R^n} Q(du)} \int_{R^n} Q(du) \exp \{i \Phi_c(u)\} \times \\
 &\times M_t \Phi [\xi_{s,p+u}(t)] + \frac{i P_g(p)}{\int_{R^{3n}} D(dp', d\xi' + p, du - \xi')} \times \\
 &\times \int_{R^{3n}} D(dp', d\xi' + p, du - \xi') M_t (\Phi [\xi_{s,p+p'}(t)] \Phi [\xi_{s,p+\xi'}(t)] \times \\
 &\times \bar{\Phi} [\xi_{s,p+u}(t)]) \exp \{i \Phi_g(p', \xi' + p, u - \xi')\} + O(\Delta). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Поскольку ветви $\xi_{s,p+u}(t)$, $\xi_{s,p+\xi'}(t)$, $\xi_{s,p+p'}(t)$ независимы, то

$$\begin{aligned}
 M_t (\Phi [\xi_{s,p+p'}(t)] \times \Phi [\xi_{s,p+\xi'}(t)] \times \bar{\Phi} [\xi_{s,p+u}(t)]) &= \\
 = M_t \Phi [\xi_{s,p+p'}(t)] \times M_t \Phi [\xi_{s,p+\xi'}(t)] \times M_t \bar{\Phi} [\xi_{s,p+u}(t)].
 \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в (3.12), мы заключаем, что с точностью до членов порядка $O(\Delta^2)$ выполнено:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(p, t+\Delta) &= \tilde{\Psi}(p, t) - i \Delta H(p) \tilde{\Psi}(p, t) - i \kappa(p) \frac{\Delta P_c(p)}{\int_{R^n} Q(du)} \times \\
 &\times \int_{R^n} Q(du) e^{i \Phi_c(u)} \tilde{\Psi}(p+u, t) - i \kappa(p) \Delta P_g(p) / \int_{R^{3n}} D(dp', d\xi' + p, \\
 &du - \xi') \times \int_{R^{3n}} D(dp', d\xi', du - \xi') \exp \{i \Phi_g(p', \xi', u - \xi')\} \times \\
 &\times \tilde{\Psi}(p+p', t) \tilde{\Psi}(\xi', t) \tilde{\Psi}(u, t) + O(\Delta^2). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Заметим, что вероятности p_c , p_g были определены нами ранее таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\kappa(q) P_c(q)}{\int_{R^n} Q(du)} = \frac{\kappa(q) P_g(q)}{\int_{R^{3n}} D(dp', d\xi + q, du - \xi)} = 1, \quad \forall q \in R^n.$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta \downarrow 0$ в (3.13) и учитывая интегральные представления операторов $V(i\nabla_p)$ и $\hat{\mathcal{L}}(i\nabla_p)$ (см. формулы (3.4—3.5)), мы получаем p -представление уравнения (3.1) для функции $\tilde{\Psi}(p, t)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(p, t) = \{H(p) + V(i\nabla_p) + \langle \psi, \hat{\mathcal{L}}(i\nabla_p) \psi \rangle\} \tilde{\Psi}(p, t). \quad (3.14)$$

Очевидно, что при $t \downarrow 0$ существует предел

$$\lim_{t \downarrow 0} \tilde{\Psi}(p, t) = \lim_{t \downarrow 0} M \Phi [\xi_{s,p}(t)] = \tilde{\Psi}_0(p) \in C(R^n). \quad (3.15)$$

Таким образом, $\tilde{\psi}(p, t)$ — решение задачи Коши (3.14—3.15) для уравнения типа Хартри в p -представлении. Сформулируем полученный результат в виде теоремы, доказанной выше для ограниченных функций $H(p)$.

Теорема 3.1. Пусть $\xi_{sp}(t)$ — марковский ветвящийся скачкообразный процесс, отвечающий вещественному потенциалу $V(x)$ и самосопряженному оператору $\hat{L}(x)$, и $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ — амплитуда траектории $\xi_{sp}(t)$, определенная формулой (3.6). Если математическое ожидание $\tilde{\psi}(p, t) = M\Phi[\xi_{sp}(t)]$ существует, то оно является решением задачи Коши (3.14—3.15) для уравнения типа Хартри в p -представлении.

4. Экспоненциальная формула для амплитуды. Рекуррентное определение амплитуды ветвящейся траектории (3.6) удобно с точки зрения алгоритмизации вычислений, но мало-наглядно. Для того, чтобы представить амплитуду в обозримом виде, введем следующие обозначения. Если ветвь $\eta_{sp}^k(t)$ траектории $\xi_{sp}(t)$ имеет индекс $i_1 i_2 \dots i_N$ ($N = N(k)$), то будем говорить, что ветвь $\eta_{sp}^k(t)$ переходит из состояния i_1 в i_2 , из i_2 в i_3 и так далее. Обозначим через $\omega_k(\Delta)$ число переходов в состояние 4 за время Δ вдоль ветви $\eta_{sp}^k(t)$, а через $\nu_k(B_1, \Delta)$ и $\mu_k(B_2, B_3, B_4, \Delta)$ — число скачков за время Δ составляющей $\eta_{sp}^k(t)$ без ветвления и с ветвлением соответственно, значения которых принадлежат множествам B_1 и $B_2 \times B_3 \times B_4$ соответственно. Пусть далее $M_k(\Delta) = \mu_k(R^n, R^n, R^n, \Delta)$ число скачков с ветвлением вдоль ветви $\eta_{sp}^k(t)$ и $K = K[\xi_{sp}(t)]$ — число ветвей траектории $\xi_{sp}(t)$. Например, число ветвей траектории, изображенной на рис. 3.1, равно 11.

Теорема 3.2. Пусть $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ — амплитуда ветвящейся траектории, определенная рекуррентными формулами (3.6). Тогда справедливо следующее экспоненциальное представление:

$$\begin{aligned} \Phi[\xi_{sp}(t)] = & \exp \sum_{k=1}^K \int_0^t \frac{1}{3M_k(s) + 1} \left\{ i(-1)^{\omega_k[0,s]} \left[\int_{R^n} \left(\Phi_c(u_1) - \frac{\pi}{2} \right) \times \right. \right. \\ & \times \nu_k(du, ds) + \int_{R^{3n}} \left(\Phi_g(u_2, u_3 + \eta_{sp}^k(t), u_4 - u_3) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\pi}{2} \right) \mu_k(du_2, du_3, du_4, ds) - H(\eta_{sp}^k(t)) ds \right] + \kappa(\eta_{sp}^k(t)) ds \left. \right\} \times \\ & \times \prod_{k=1}^K |\tilde{\psi}_0(\eta_{sp}^k(t))| \exp \{ i \arg \tilde{\psi}_0(\eta_{sp}^k(t)) (-1)^{\omega_k[0,t]} \}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Доказательство. Из рекуррентного определения амплитуды (3.6) следует, что функционал $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ можно представить в виде произведения трех групп сомножителей. Первая группа отвечает начальным условиям, вторая — точкам ветвле-

ния и зависит от фазовых функций, третья — отрезкам ветвей без скачков, она зависит от гамильтониана $H(p)$ и от x .

Начальному условию в $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ отвечает произведение K сомножителей, являющихся значениями начального условия $\tilde{\psi}_0$ в точках $\gamma_p^1(t), \dots, \gamma_p^K(t)$, причем каждый сомножитель комплексно сопрягается столько раз, сколько переходов в состояние 4 происходит вдоль соответствующей ветви:

$$\prod_{k=1}^K |\tilde{\psi}_0(\gamma_p^k(t))| \exp \{i \arg \tilde{\psi}_0(\gamma_p^k(t)) (-1)^{\omega_k|0, t^1}\}. \quad (3.17)$$

Вторая группа сомножителей — произведение величин

$$\exp i \left\{ \Phi_c(u_1) - \frac{\pi}{2} \right\} \text{ и } \exp i \left\{ \Phi_g(u_2, u_3 + \gamma_{sp}^k(t), u_4 - u_3) - \frac{\pi}{2} \right\}$$

по всем точкам скачков без ветвления и с ветвлением соответственно, причем, как и в предыдущем случае, каждый сомножитель комплексно сопрягается столько раз, сколько переходов в состояние 4 предшествует данному скачку. Если точки скачков занумеровать числами $j=1, 2, \dots$ и обозначить через $\pi(j)$ число переходов в состояние 4, последующее за скачком с номером j (см. рис. 3.1), то такие произведения примут вид:

$$\begin{aligned} & \exp i \sum_{j \in D_c} \left[\Phi_c(u_j) - \frac{\pi}{2} \right] (-1)^{\pi(j)} \text{ и} \\ & \exp i \sum_{j \in D_g} \left[\Phi_g(u_j^2, u_j^3 + \gamma_{ps_j}(t), u_j^4 - u_j^3) - \frac{\pi}{2} \right] (-1)^{\pi(j)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где D_c и D_g — множества номеров скачков без ветвления и с ветвлением.

Перейдем от суммирования по точкам скачков к суммированию по ветвям. Если двигаться от вершины дерева к корню вдоль ветви $\gamma_{sp}^k(t)$, то за время Δ объединяется $3M_k(\Delta) + 1$ ветвь. Следовательно, сумму по точкам скачков в показателе экспоненты (3.18) можно заменить суммой интегралов вдоль ветвей по мере скачков, разделив подынтегральное выражение на число ветвей, объединившихся к моменту $s \in [0, t]$, задающему текущую точку на траектории:

$$\begin{aligned} & \exp i \sum_{j \in D_c} \left[\Phi_c(u_j) - \frac{\pi}{2} \right] (-1)^{\pi(j)} = \\ & = \exp i \int_0^t \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{\omega_k|0, s^1}}{3M_k(s) + 1} \int_{R^u} \left(\Phi_c(u_1) - \frac{\pi}{2} \right) \nu_k(du, ds); \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \exp i \sum_{j \in D_g} \left[\Phi_g(u_2^j, u_3^j + \eta_{s_{jp}}^k(t), u_4^j - u_3^j) - \frac{\pi}{2} \right] (-1)^{\pi(j)} = \\ & = \exp i \int_0^t \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{\omega_k[0,s]}}{3M_k(s)+1} \int_{R^{3n}} [\Phi_g(u_2, u_3 + \eta_{s_p}^k(t), \\ & \quad u_4 - u_3(-\frac{\pi}{2}))] \mu_k(du_2, du_3, du_4, ds). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Наконец, последний сомножитель — произведение по всем непрерывным отрезкам ветвей $\eta_{s_p}^k(t)$, $s \in \Delta$

$$\exp \int_{\Delta} \left\{ \frac{1}{i} H(\eta_{s_p}^k(t)) + \chi(\eta_{s_p}^k(t)) \right\} ds.$$

Каждый сомножитель такого вида сопрягается столько раз, сколько переходов в состояние 4 следует за отрезком Δ . Произведение таких сомножителей, очевидно, равно

$$\exp \sum_{k=1}^K \int_0^t \frac{ds}{3M_k(s)+1} \left(\frac{(-1)^{\omega_k[0,s]}}{i} H(\eta_{s_p}^k(t)) + \chi(\eta_{s_p}^k(t)) \right). \quad (3.21)$$

Объединяя (3.17), (3.19—3.21), получим (3.16). Теорема доказана.

5. Оценка математического ожидания. Экспоненциальная формула для амплитуды позволяет вывести оценку для математического ожидания $M\Phi[\xi_{s_p}(t)]$.

Необходимым и достаточным условием существования математического ожидания является интегрируемость функции $|\Phi[\cdot]|$. Выведем уравнение для функции $F(p, t) = M|\Phi[\xi_{s_p}(t)]|$ и оценим величину отрезка, на котором она конечна. Метод, используемый здесь, широко используется в теории ветвящихся процессов ([59], [63]).

Из экспоненциальной формулы (3.16) вытекает, что в случае

$$H(p) = \Phi_c(u) = \Phi_g(u, \xi, p) = 0, \quad \tilde{\psi}_0(p) \geq 0,$$

функционалы $\Phi[\xi_{s_p}(t)]$ и $|\Phi[\xi_{s_p}(t)]|$ совпадают. Поэтому из теоремы 3.1 и формул (3.4—3.5) следует, что функция $F(p, t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) &= \int F(p+u, t) Q(du) + \int F(u, t) F(\xi, t) F(p+p', t) \times \\ & \quad \times D(dp', d\xi, du-\xi); \quad F(p, 0) = \tilde{\psi}_0(p), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где Q и D определенные выше неотрицательные конечные меры.

Обозначим $a(t) = \sup_p F(p, t)$, $a_0 = \sup_p \tilde{\psi}_0(p)$ и $\chi = \int Q(du) + \sup_p \int D(dp', d\xi + p, du - \xi)$. Тогда из уравнения (3.22)

следует

$$a'(t) \leq \kappa a(t)(1+a^2(t))$$

или $dt \leq \kappa^{-1} a^{-1}(1+a^2)^{-1} da$. Отсюда мы заключаем, что функция $a(t)$ конечна во всех точках полуотрезка $[0, T)$, где

$$T = \kappa^{-1} \int_{a_0}^{\infty} da/a(1+a^2) = \kappa^{-1} \ln(1+a_0^{-2})^{1/2} \quad (3.23)$$

и $a(t) \leq A(t)$, где $A(t)$ — функция, определяемая из уравнения

$$t = \kappa^{-1} \int_{a_0}^{A(t)} da/a(1+a^2). \quad (3.24)$$

Итак, доказана

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда математическое ожидание $M\Phi[\xi_{sp}(t)]$ существует и конечно при всех $t \in [0, T)$, где значение T определяется формулой (3.23), а модуль математического ожидания $|M\Phi[\xi_{sp}(t)]|$ не превосходит величины $A(t)$, определяемой из уравнения (3.24).

6. Случай неограниченной функции $H(p)$. Приведенное выше доказательство теоремы 3.1 верно для ограниченных непрерывных функций $H(p)$. Для того, чтобы доказать это утверждение для произвольной вещественной непрерывной функции $H(p)$, можно воспользоваться оценкой модуля математического ожидания и формулами для условных вероятностей, аналогичных формуле, содержащейся в предложении 2.1. Другой путь, который используется в данном разделе, состоит в применении теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и экспоненциальной формулы.

Пусть $\{H_l(p)\}_1^{\infty}$ — последовательность непрерывных вещественных функций, сходящаяся на каждом компакте к непрерывной вещественной функции $H(p)$ и $\{\Phi_l[\xi_{sp}(t)]\}_{l=1}^{\infty}$ соответствующая последовательность амплитуд, определенных формулой (3.16). Каждая траектория ветвящегося процесса $\xi_{sp}(t)$ совершает с вероятностью единица конечное число скачков конечной величины. Поэтому с вероятностью единица существует компакт, содержащий все ветви любой фиксированной траектории $\xi_{sp}(t)$ и для любой ее ветви существует предел:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^t H_l(\eta_{sp}^k(t)) ds (-1)^{\omega_k^{[0, s]}} = \int_0^t H(\eta_{sp}^k(t)) (-1)^{\omega_k^{[0, s]}} ds.$$

Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_l[\xi_{sp}(t)] = \Phi[\xi_{sp}(t)],$$

где $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ — амплитуда, отвечающая функции $H(p)$. Кроме того, из экспоненциальной формулы для амплитуды вытекает равенство

$$|\Phi[\xi_{sp}(t)]| = |\Phi_l[\xi_{sp}(t)]|,$$

справедливое при всех l , а из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует интегрируемость функционала $\Phi[\xi_{sp}(t)]$ при $t \in [0, T]$:

$$M\Phi_l[\xi_{sp}(t)] = \lim_{l \rightarrow \infty} M\Phi[\xi_{sp}(t)].$$

Покажем теперь, что математическое ожидание $M\Phi[\xi_{sp}(t)] = \tilde{\psi}(p, t)$ является решением уравнения (3.14) в случае, если $H(p)$ — непрерывная вещественная функция. Для этой цели воспользуемся априорной оценкой математического ожидания, полученной в теореме 3.3

$$|\tilde{\psi}(p, t)| = |M\Phi[\xi_{sp}(t)]| \leq M|\Phi[\xi_{sp}(t)]| = M|\Phi_e[\xi_{sp}(t)]| \leq A(t), \quad (3.25)$$

где $t = x^{-1} \int_{a_0}^{A(t)} da/a(1+a^2)$, и интегральным представлением уравнения (3.14):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(p, t) = & e^{\frac{1}{t}H(p)t} \tilde{\psi}_0(p) + \\ & + i \int_0^t e^{\frac{1}{t}H(p)(t-s)} \{V(i\nabla_p) + \langle \psi(s), \hat{L}(i\nabla_p)\psi(s) \rangle\} \tilde{\psi}(p, s) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Существование решения интегрального уравнения (3.26) доказывается итерационным методом (см. [121]). Рассмотрим последовательность функций $\{\tilde{\psi}^k(p, s)\}_1^\infty$, заданных рекуррентным образом: $\tilde{\psi}^0(p, s) = \tilde{\psi}_0(p)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{k+1}(p, t) = & e^{\frac{1}{t}H(p)t} \tilde{\psi}_0(p) + \\ & + i \int_0^t e^{\frac{1}{t}H(p)(t-s)} ds \{V(i\nabla_p) + \langle \psi^k(s), \hat{L}(i\nabla_p)\psi^k(s) \rangle\} \tilde{\psi}^k(p, s). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Лемма 3.4. Для любого $t \in [0, T]$ существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\psi}^k(p, t) = \tilde{\psi}(p, t)$, являющийся непрерывной функцией параметра t со значениями в $C(R^n)$ и удовлетворяющий уравнению (3.26).

Доказательство. Пусть $a_k(t) = \sup_p |\tilde{\psi}^k(p, t)|$. Тогда из рекуррентных формул (3.27) следует:

$$\begin{aligned} a_{k+1}(t) \leq & a_0 + \kappa \int_0^t [a_k(s) + a_k^3(s)] ds; \quad k=0, 1, 2, \dots \quad a_0(t) = a_0 = \\ & = \sup_p |\tilde{\psi}_0(p)|, \end{aligned}$$

$$+ \langle \psi^k(s), \hat{L}(i\nabla_p) \psi^k(s) \rangle \tilde{\psi}^k(p, s) ds.$$

Лемма доказана.

Теперь для доказательства существования предела $\lim_{l \rightarrow \infty} M\Phi_l[\xi_{sp}(t)] = \tilde{\psi}(p, t)$, где $\tilde{\psi}(p, t)$ — решение уравнения (3.25), остается убедиться, что для любого компакта $K \in \mathcal{R}^n$

$$\alpha_l(t) = \sup_{p \in K} |\tilde{\psi}(p, t) - M\Phi_l[\xi_{sp}(t)]| \rightarrow 0 \text{ при } l \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 3.1 следует, что функция $\tilde{\psi}_l(p, t) = M\Phi_l[\xi_{sp}(t)]$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_l(p, t) = & e^{\frac{1}{t} H_l(p)t} \tilde{\psi}_0(p) + i \int_0^t e^{\frac{1}{t} H_l(p)(t-s)} ds \{V(i\nabla_p) + \\ & + \langle \psi_l(s), \hat{L}(i\nabla_p) \psi_l(s) \rangle \tilde{\psi}_l(p, s)\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

из которого следует интегральное уравнение для разности

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_l(p, t) - \tilde{\psi}(p, t) & \stackrel{\text{def}}{=} \theta_l(p, t) \\ \theta_l(p, t) = & \left[e^{\frac{1}{t} H_l(p)t} - e^{\frac{1}{t} H(p)t} \right] \tilde{\psi}_0(p) + i \int_0^t \left[e^{\frac{1}{t} H_l(p)(t-s)} - e^{\frac{1}{t} H(p)(t-s)} \right] \times \\ & \times \{V(i\nabla_p) + \langle \psi_l(s), \hat{L}(i\nabla_p) \psi_l(s) \rangle \tilde{\psi}_l(p, s) ds + i \int_0^t e^{\frac{1}{t} H(p)(t-s)} \times \\ & \times \{V(i\nabla_p) \theta_l(p, s) + \langle \tilde{\theta}_l(q, s), \hat{L}(i\nabla_p) \psi_l(q, s) \rangle \tilde{\psi}_l(p, s) + \\ & + \langle \psi(q, s), \hat{L}(i\nabla_p) \tilde{\theta}_l(q, s) \rangle \tilde{\psi}_l(p, s) + \\ & + \langle \psi(q, s), \hat{L}(i\nabla_p) \psi(q, s) \rangle \theta_l(p, s)\} ds. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Обозначим через $\delta_l(p, t)$ величину $\sup_{p \in K} \left| e^{\frac{1}{t} H_l(p)t} - e^{\frac{1}{t} H(p)t} \right|$. Учитывая априорные оценки для функций $\tilde{\psi}_l(p, t)$ и $\tilde{\psi}(p, t)$:

$$|\tilde{\psi}_l(p, t)| \leq A(t) < \infty, \quad |\tilde{\psi}(p, t)| \leq A(t) < \infty,$$

где $A(t)$ — решение уравнения (3.24), нетрудно вывести из (3.29) оценку для функции $\alpha_l(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_l(t) \leq & \delta_l(t) a_0 + \kappa \int_0^t \delta_l(t-s) [A(s) + A^3(s)] ds + \kappa \int_0^t \alpha_l(s) ds + \\ & + 2\varepsilon \int_0^t A(s) ds + 3\kappa \int_0^t \alpha_l(s) A^2(s) ds + 2\varepsilon \int_0^t A^3(s) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Поскольку число ϵ сколь угодно мало и $\delta_l(s) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, то из (3.30) следует, что $a_l(t) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Поэтому для любого фиксированного $p \in R^n$ существует предел:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}_l(p, t) = \tilde{\Psi}(p, t).$$

Итак, доказана

Теорема 3.5. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и $H(p)$ — непрерывная вещественная функция. Тогда при всех $t \in [0, T)$ где значение T определено формулой (3.23), существует математическое ожидание $\tilde{\Psi}(p, t) = M\Phi[\xi_{sp}(t)]$ амплитуды (3.16), являющееся решением задачи Коши (3.14—3.15) для уравнения типа Хартри в p -представлении.

7. **Перечисление деревьев, связанных с рядом теории возмущений.** Математическое ожидание амплитуды траектории можно представить в виде суммы условных математических ожиданий по множествам траекторий, совершающих за время t $k = 0, 1, 2, \dots$ скачков:

$$M\Phi[\xi_{sp}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) M\Phi[\xi_{sp}(t)|k], \quad (3.31)$$

где $P_k(t)$ — вероятность множества траекторий, совершающих k скачков за время t .

Предположим, что $V(x) = \lambda U(x)$ и $\hat{L}(x) = \lambda \hat{\mathcal{L}}(x)$, где λ — малое число. Из определения процесса $\xi_{sp}(t)$ следует, что ветвь, начинающаяся в точке p , не совершает скачков за время Δ с вероятностью $\exp(-\alpha(p)\Delta)$, где

$$\alpha(p) = \int_{R^n} Q(du) + \int_{R^{3n}} \mathcal{D}(dp', d\xi + p, du - \xi).$$

Тогда $\alpha(p) = O(\lambda)$, $\sup_p \alpha(p) = O(\lambda)$, и, поскольку процесс ξ_{sp} — марковский, то

$$P_k(t) = O(\lambda t)^k / k! \exp\{-O(\lambda t)\}.$$

Следовательно, сумма (3.31) является абсолютно сходящимся рядом по степеням параметра λ . Такое представление решения задачи Коши (3.14—3.15) для уравнения типа Хартри называется разложением решения в ряд теории возмущений.

Нетрудно изобразить в виде несимметричных деревьев всевозможные типы ветвящихся траекторий (см. рис. 3.3).

Однако при $k=3$ изобразить все такие деревья было бы трудно: их 56. В данном разделе мы рассмотрим задачу перечисления деревьев, отвечающих членам ряда теории возмущений (3.31).

Пусть a_{ki} — число различных деревьев, имеющих k вершин и i ветвей. Например,

$$a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=1, a_{14}=0$$

$$a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=4, a_{24}=0, a_{25}=0, a_{26}=0$$

см. рис. 3.3. Деревья, имеющие $i+1$ вершину, могут быть получены из множества деревьев, имеющих i вершин, путем присоединения элемента $\begin{array}{c} \circ \\ | \\ 1 \end{array}$ или $\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$ к концу одной из ветвей.

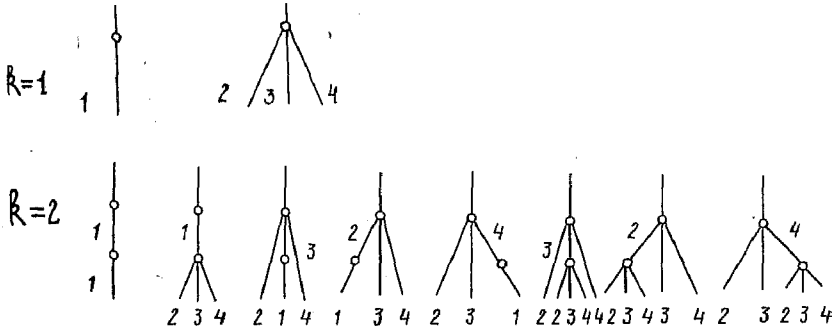


Рис. 3.3

В первом случае число ветвей не изменится, а во втором — увеличится на два. Таким образом, четность числа ветвей не зависит от числа скачков и поэтому достаточно учитывать только значения $a_{i,2i+1}$. Нетрудно видеть, что число деревьев, имеющих $i+1$ вершину и $2i+1$ ветвь равно сумме числа деревьев, имеющих i вершин и $2i+1$ ветвь, умноженной на число способов присоединения элемента $\begin{array}{c} \circ \\ | \\ 1 \end{array}$, равное $2i+1$, и числа деревьев, имеющих i вершин и $2i-1$ ветвь, умноженного на число способов присоединения элемента $\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$, равное $2i-1$:

$$a_{i+1,2i+1} = (2i-1)a_{i,2i-1} + (2i+1)a_{i,2i+1} \quad (3.32)$$

Составим таблицу значений $a_{i,k}$.

Число вершин \ Число ветвей	Число ветвей							Суммарное число деревьев
	1	3	5	7	9	11	13	
1	1	1	0					2
2	1	4	3	0				8
3	1	13	27	15	0			56
4	1	40	174	240	150	0		560
5	1	121	990	2550	2615	945	0	7222
6	1	364	5313	22800	41384	33929	10395	114186

В заключение этого раздела получим производящие выражения для коэффициентов этой таблицы. Пусть

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$$

и $\{f_k(x)\}_1^\infty$ — рекуррентная последовательность функций, заданная соотношением

$$f_k(x) = -\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx} f_{k-1}(x). \quad (3.33)$$

Нетрудно видеть, что функции $f_k(x)$ — аналитические, имеющие полюса $2k+1$ -го порядка в точке 0. Покажем, что значение $f_k(1)$ равно суммарному числу деревьев, отвечающих траекториям ветвящегося процесса $\xi_{sp}(t)$, совершающим k скачков, а коэффициент при x^{-2l-1} разложения функции $f_k(x)$ в ряд Лорана равен $a_{k,2l+1}$.

Действительно, в силу соотношения (3.33), коэффициенты разложения функции $\{a_{k,2l+1}\}_{l=0}^k$, $\{a_{k+1,2l+1}\}_{l=0}^{k+1}$, $f_k(x) = \sum_{l=0}^k \frac{\alpha_{k,2l+1}}{x^{2l+1}}$ и $f_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\alpha_{k+1,2l+1}}{x^{2l+1}}$ связаны между собой:

$$\alpha_{k+1,2l+1} = (2l+1) \alpha_{k,2l+1} + (2l-1) \alpha_{k,2l-1}. \quad (3.33')$$

Поскольку $\alpha_{11} = a_{11} = \alpha_{13} = a_{13} = 1$, то из (3.33) и (3.33') следует, что $\alpha_{k,2l+1} = a_{k,2l+1}$ при всех k и l . Суммарное число различных деревьев, отвечающих траекториям, совершающим k скачков, равно сумме всех коэффициентов $a_{k,2l+1}$ или

$$N(k) = f_k(1) = \left[-\left(x + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \right]_{x=1},$$

а коэффициенты $a_{k,2l+1}$ могут быть вычислены по следующей формуле:

$$a_{k,2l+1} = \frac{1}{2^{k-l-1} l!} \frac{d^{2(k-l)}}{dx^{2(k-l)}} x^{2(k-l)} \left[-\left(x + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \right]_{x=0}$$

§ 4. АКСИОМАТИКА КОМПЛЕКСНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И КОМПЛЕКСНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Как видно из предыдущего изложения, решение основной задачи нерелятивистской квантовой механики — задачи Коши для уравнения Шредингера — в ряде случаев может быть представлено в виде интеграла относительно комплексной меры. При этом возникает естественный вопрос, в чем состоит специфика таких мер и их вероятностной интерпретации? Мы изложим здесь аксиомы и определения «комплексной» вероятности, а затем проиллюстрируем их на примере комплексных цепей Маркова, являющихся дискретными аппроксимациями интегралов

по траекториям суммами по кусочно-линейным путям (см. [50], [112], [131]).

1. **Пространство с амплитудой.** Понятие пространства с амплитудой является обобщением понятия вероятностного пространства и вводится с целью аксиоматизации основных свойств решений уравнений квантовой механики.

Пусть I — некоторое множество индексов; $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ — множество σ -алгебр, элементы которых являются подмножествами некоторого множества Ω и содержат Ω в качестве элемента; \mathcal{K} — полукольцо, подмножеств множества Ω , представимых в виде пересечения любого конечного числа элементов из алгебр \mathfrak{A}_i , $i \in I$:

$$k = \prod_r a_{i_r}, \quad a_{i_r} \in \mathfrak{A}_{i_r}, \quad i_r \in I;$$

A и \mathfrak{A} — соответственно алгебра и σ -алгебра подмножеств Ω , порожденные полукольцом \mathcal{K} . Элементы σ -алгебр \mathfrak{A}_i называются истинными событиями, элементы полукольца \mathcal{K} — псевдоистинными событиями, элементы σ -алгебры \mathfrak{A} — виртуальными событиями, а множество Ω — множеством элементарных виртуальных событий.

Пусть на алгебре A задана функция множества ψ со значениями в гильбертовом пространстве H . Интенсивностью виртуального события $a \in \mathfrak{A}$ называется квадрат нормы $\psi(a)$:

$$I(a) = \|\psi(a)\|_H^2.$$

Виртуальные события A_1 и A_2 называются непересекающимися, если множества A_1 и A_2 не пересекаются и несовместными, если они не пересекаются и $\langle \psi(A_1), \psi(A_2) \rangle = 0^*$. Функция $\psi: \mathfrak{A} \rightarrow H$ называется амплитудой, если

- на алгебре виртуальных событий ψ является аддитивной функцией множества, а на σ -алгебрах \mathfrak{A}_i — σ -аддитивной;
- на полукольце псевдоистинных событий интенсивность I нормирована:

$$0 \leq I(k) \leq 1, \quad I(\Omega) = 1;$$

— существует выделенная σ -алгебра истинных событий $\mathfrak{A}_0 \in \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$, называемая базовой, такая, что для любых непересекающихся событий $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_0$ и любого виртуального события $A \in \mathfrak{A}$, виртуальные события

$$A_1 \cap A, \quad A_2 \cap A$$

являются несовместными;

— сужение интенсивности на любую σ -алгебру истинных событий является вероятностью.

* $\langle \Psi, \Psi \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H .

Тройка $(\Omega, \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}, \psi)$, состоящая из множества элементарных виртуальных событий Ω , множества σ -алгебр истинных событий $\{\mathfrak{A}_i\}$ и амплитуды ψ называется пространством с амплитудой. Амплитуда ψ называется σ -аддитивной, если она определена на σ -алгебре \mathfrak{A} и является σ -аддитивной функцией множества.

Теперь мы можем дать определение случайной величины, согласующееся с определением, принятым в теории вероятностей, а затем дадим определение обобщенной случайной величины (см. [50]).

Пусть задано пространство с амплитудой $(\Omega, \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}, \psi)$ и некоторое измеримое пространство (X, \mathfrak{B}) . Отображение $\xi: \Omega \rightarrow X$ называется случайной величиной, если существует σ -алгебра \mathfrak{A}_i такая, что отображение ξ является $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B})$ -измеримой функцией. В этом случае сужение интенсивности на σ -алгебру \mathfrak{A}_i порождает распределение вероятностей P_ξ случайной величины ξ :

$$P_\xi(B) = I \{a: \xi(a) \in B; a \in \mathfrak{A}_i\}, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Отображение $\xi: \Omega \rightarrow X$ называется обобщенной случайной величиной, если функция ξ является $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$ -измеримым отображением, то есть прообразом любого множества $B \in \mathfrak{B}$ при отображении ξ является некоторое множество $k \in \mathfrak{H}$. Интенсивностью обобщенной случайной величины ξ называется функция

$$I_\xi(B) = I \{a: \xi(a) \in B, a \in \mathfrak{H}\}, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Пусть I — некоторое множество. Обобщенным случайным процессом на Ω со значениями в (X, \mathfrak{B}) называется функция параметра $t \in T$ со значениями в пространстве обобщенных случайных величин.

2. Пример. Приведем пример пространства с амплитудой. Пусть $\Omega = R^2 \times R^2$ — множество элементарных виртуальных событий, $I = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}(R^2) \times R^2$ и $\mathfrak{A}_2 = R^2 \times \mathfrak{B}(R^2)$ где $\mathfrak{B}(R^2)$ — σ -алгебра борелевских подмножеств R^2 . Любое множество из \mathfrak{A}_1 имеет вид $B_1 \times R^2$, где $B_1 \in \mathfrak{B}(R^2)$, а любое множество из \mathfrak{A}_2 имеет вид $R^2 \times B_2$, где $B_2 \in \mathfrak{B}(R^2)$.

Определим амплитуду ψ на полукольце \mathfrak{H} псевдоистинных событий вида

$$k = B_1 \times B_2,$$

а на алгебру \mathcal{A} продолжим ее, используя свойство аддитивности. Пусть $\psi(B_1 \times B_2)$ — амплитуда вероятности обнаружить электрон на множестве B_2 после того, как он прошел через экран с отверстием B_1 (см. [71]).

Амплитуда ψ принимает значения в $L_2(R^n)$ и ее свойства хорошо известны. В качестве базы мы примем σ -алгебру \mathcal{A}_2 . Тогда основные свойства амплитуды, сформулированные выше, совпадут с известными свойствами амплитуды вероятности. Именно — амплитуда является аддитивной функцией множества; на

полукольце \mathcal{K} псевдоистинных событий интенсивность не превосходит единицы; если отсутствует экран и все электроны, вылетающие из источника попадают в приемник, то интенсивность такого события равна 1: $I(\Omega) = 1$;

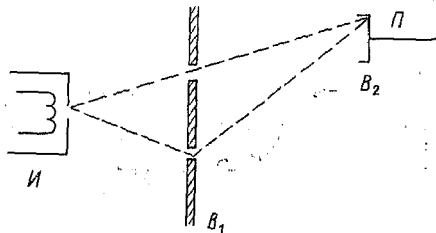


Рис. 4.1

— интенсивность является σ -аддитивной функцией на базе и на σ -алгебре истинных событий \mathcal{A}_1 , то есть в случае, когда регистрируются все электроны, проходящие через экран.

Приведем более сложный пример пространства с амплитудой. Пусть $\tilde{\psi}_0(p) \in C(R^n) \cap L_2(R^n)$, $\|\tilde{\psi}_0\|_{L_2} = 1$ и $V(x)$ — вещественная функция. Тогда разрешающий оператор задачи (2.12) $U(t)$ — унитарный оператор, действующий в $L_2(R^n)$:

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}(p, t) - U(t)\tilde{\psi}_0(p) = \exp(\kappa t) M_t \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_{s,p}(t)) ds + i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \right\} \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим пространство элементарных виртуальных событий Ω , состоящее из всех непрерывных слева ступенчатых траекторий, элементы σ -алгебр истинных событий $\{\mathfrak{A}_s\}_{s \in [0, t]}$ состоят из объединения всех траекторий, удовлетворяющих условию

$$a = \bigcup_{\xi} \{ \xi_{s,p}(t) \in B \}, \quad a \in \mathfrak{A}_s,$$

где $B \in \mathcal{B}(R^n)$. В качестве базовой σ -алгебры примем \mathfrak{A}_t . Полукольцо псевдоистинных событий \mathcal{K} состоит из множеств вида

$$k = \bigcup_{\xi} \{ \xi_{s_1,p}(t) \in B_1, \dots, \xi_{s_l,p}(t) \in B_l \}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим σ -аддитивную функцию множества ψ на σ -алгебре \mathfrak{A} виртуальных событий, порождаемой полукольцом \mathcal{K}

$$\psi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\kappa t) M_t \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H(\xi_{s,p}(t)) ds + \right.$$

$$+ i \int_0^t \int_{R^n} \left(\Phi(u) - \frac{\pi}{2} \right) \nu(du, ds) \Big\} \times \chi_A(\xi_{s_p}(t)) \tilde{\psi}_0(\xi_p(t)), \quad A \in \mathfrak{A}$$

где χ_A — характеристическая функция множества A . Из определения разрешающего оператора $U(t)$ и псевдоистинных событий k следует, что амплитуда псевдоистинного события вычисляется по формуле:

$$\psi(k) = U(t - s_i) \chi_B U(s_i - s_{i_1}) \dots \chi_{B_1} U(s_1) \tilde{\psi}_0.$$

Поэтому $I(k) = \|\psi(k)\|^2 \leq 1$ и $I(\Omega) = 1$. В то же время, на σ -алгебре виртуальных событий \mathfrak{A} можно получить лишь более слабую оценку:

$$\sup_{a \in \mathfrak{A}} I(a) \leq \exp 2\lambda t.$$

Далее, если $A_{1,2}$ — непересекающиеся события из \mathfrak{A}_t , и A — произвольное виртуальное событие, то

$$\psi(A_1 \cap A) = \chi_{A_1} \psi(A) \quad \text{и} \quad \psi(A_2 \cap A) = \chi_{A_2} \psi(A).$$

Отсюда следует, что $\langle \psi(A \cap A_1), \psi(A \cap A_2) \rangle = 0$, если множества A_1 и A_2 не пересекаются, иными словами, события A_1 и A_2 несовместны.

σ -аддитивность интенсивности на σ -алгебрах \mathfrak{A}_s вытекает из формулы

$$I(a) = \|\chi_a \tilde{\psi}(s)\|^2 = \int_a |\tilde{\psi}(s, p)|^2 dp,$$

где $\tilde{\psi}(s) = U(s) \tilde{\psi}_0$ и $\|\tilde{\psi}(s)\| = 1$. Таким образом, $(\Omega, \{\mathfrak{A}_s\}, \psi)$ — пространство с σ -аддитивной амплитудой.

Простейшим примером обобщенного случайного процесса, показывающим содержательность введенной аксиоматики, является так называемая комплексная марковская цепь. Следуя работам [48], [50], мы рассмотрим определение и основные свойства КМ-цепей.

3. Комплексные марковские цепи. Пусть задано конечное множество $K = \{a_1, \dots, a_h\}$, элементы которого называются элементарными состояниями, и целое положительное N . Обозначим через Ω множество всевозможных последовательностей N таких элементарных состояний:

$$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_N}\} = \omega_i, \quad i = (i_1, \dots, i_N),$$

называемых элементарными виртуальными событиями и предположим, что каждой последовательности N элементарных состояний сопоставлен комплексный вектор $\psi(\omega_i)$, имеющий k компонент, из которых лишь одна i_N -я отлична от нуля:

$$\psi(\omega_i) = \{0, \dots, 0, \psi_{i_N}(\omega), 0, \dots, 0\}.$$

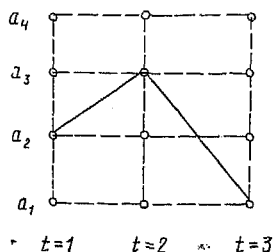


Рис. 4.2

На рисунке 4.2 изображено виртуальное событие

$$\omega = \{a_2, a_3, a_1\} = \omega_{231}.$$

Продолжим функцию ψ на алгебру \mathfrak{A} всех подмножеств множества Ω полагая

$$\psi(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \psi(\omega_i), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Таким образом, на алгебре \mathfrak{A} , элементы которой называются виртуальными событиями, задана аддитивная функция множества, принимающая значения в C^{k*} .

Виртуальное событие, состоящее из объединения всех элементарных виртуальных событий $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, \dots, a_{i_N}\}$ таких, что $i_m = j$ называется состоянием a_j в момент t или короче, состоянием:

$$A_j^m = \bigcup_{i: i_m = j} \omega_i.$$

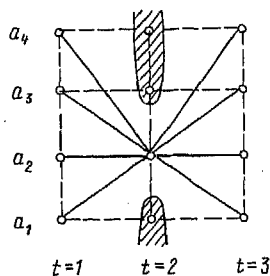


Рис. 4.3

На рисунке 4.3 изображено состояние A_2^2 в случае $k=4$, $N=3$. Множество алгебр истинных событий состоит из N

* Через C^k обозначено гильбертово пространство комплексных векторов, имеющих k компонент, со скалярным произведением $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^k \bar{f}_j \varphi_j$. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

алгебр $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_N$, из которых базовой является \mathfrak{A}_N . Каждая алгебра \mathfrak{A}_m порождается множеством всех состояний в момент m . Например, состояние A_2^2 , изображенное на рисунке 4.3 является элементом алгебры \mathfrak{A}_2 .

Итак, пусть $(\Omega, \{\mathfrak{A}_i\}_1^N, \psi)$ — пространство с амплитудой.

Определение. Амплитуда ψ называется амплитудой комплексной марковской цепи (КМ-цепи), если существует набор унитарных матриц $\{Z^l\}_1^{N-1}$ размера $k \times k$, зависящих от параметра l , и единичный вектор $\psi^0 \in C^k$, такие что амплитуда любого элементарного виртуального события $\omega_l = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_N}\}$ равна

$$\psi(\omega_l) = \{0, \dots, 0, \psi_{i_N}, 0, \dots, 0\},$$

где $\psi_{i_N} = \prod_{i=1}^{N-1} z_{i_{t+1} i_t}^l \psi_{i_1}^0$. Матрицы Z^l называются матрицами перехода КМ-цепи за один шаг, а матричные элементы z_{ij}^l — амплитудами перехода из элементарного состояния a_j в состояние a_i за один шаг.

КМ-цепью называется обобщенный случайный процесс ξ_m $m \in T = \{1, 2, \dots, N\}$ на Ω со значениями в K такой, что

$$\xi_m(\omega_l) = a_{i_m},$$

если $\omega_l = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, \dots, a_{i_N}\}$.

Рассмотрим основные свойства КМ-цепи. Пусть I — некоторое подмножество множества индексов $\{1, 2, \dots, k\}$. Обозначим через $\hat{\chi}_I$ — диагональную матрицу размера $k \times k$, у которой i -ый диагональный элемент равен единице, если $i \in I$ и нулю в противном случае. Прежде всего получим формулу для интенсивности псевдоистинных событий. Полукольцо псевдоистинных событий состоит, очевидно, из множеств вида

$$A_{I_1 \dots I_N} = \bigcup_{i_1 \in I_1, \dots, i_N \in I_N} \omega_{i_1 \dots i_N}.$$

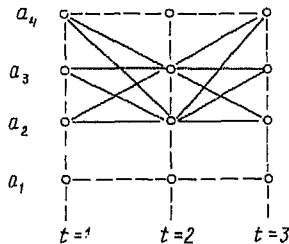


Рис. 4.4

На рисунке 4.4 изображено псевдоистинное событие

$$A = \bigcup_{i_1=2}^4 \bigcup_{i_2=2}^3 \bigcup_{i_3=2}^4 \omega_{i_1 i_2 i_3}.$$

Лемма 4.1. Амплитуда псевдоистинного события $A_{I_1 \dots I_N}$ равна

$$\psi(A_{I_1 \dots I_N}) = \hat{\chi}_{I_N} \circ Z^{N-1} \circ \hat{\chi}_{I_{N-1}} \circ \dots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{I_1} \psi^0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Из определения псевдоистинного события $A_{I_1 \dots I_N}$ и амплитуды ψ следует, что

$$\psi(A_{I_1 \dots I_N}) = \sum_{i_i \in I_1 \dots I_N \in I_N} \psi(\omega_i), \quad i = (i_1, \dots, i_N) \quad (4.2)$$

и

$$\psi(\omega_i) = \hat{\chi}_{\{i_N\}} \circ Z^{N-1} \circ \hat{\chi}_{\{i_{N-1}\}} \circ \dots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{\{i_1\}} \psi^0, \quad (4.3)$$

где $\{i_k\}$ — множество, состоящее из одного элемента. Из формул (4.2) и (4.3) следует утверждение леммы. Если A и A' — два виртуальных события, то условной интенсивностью события A относительно A' назовем величину

$$I(A/A') = \|\psi(A \cap A')\|^2 / \|\psi(A')\|^2.$$

Рассмотрим теперь псевдоистинное событие $A_{i_{l+1}^{l+1} \dots i_l \dots i_j}$, состоящее из объединения всех последовательностей элементарных состояний, принимающих значения $a_{i_{l+1}}, a_{i_l}, \dots, a_{i_j}$ в моменты $l+1, l, \dots, j$. Аналогично определяется виртуальное событие $A_{i_{l+1}^{l+1} \dots i_l \dots i_j}$.

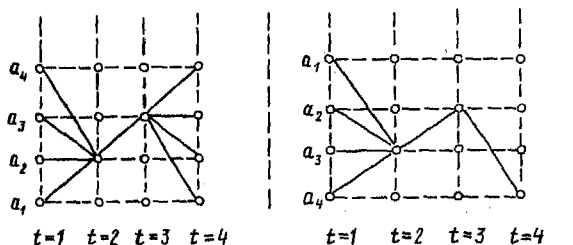


Рис. 4.5

На рисунке 4.5 изображены в качестве примера псевдоистинные события A_{23}^{23} и A_{231}^{234} .

По аналогии со случаем цепей Маркова, будем говорить, что виртуальному событию $A_{i_{l+1}^{l+1} \dots i_l \dots i_j}$ отвечает последовательность элементарных состояний КМ-цепи: $a_{i_{l+1}}$ в момент $l+1$, a_{i_l} — в момент l и т. д. a_{i_j} в момент j .

Теорема 4.2. Если ψ — амплитуда КМ-цепи, то условная интенсивность виртуального события $A = A_{i_{l+1} i_l \dots i_j}^{l+1 l \dots l}$ относительно $A' = A_{i_{l+1} i_l \dots i_j}^{l \dots l}$ зависит только от состояний КМ-цепи в моменты l и $l+1$ и равна квадрату модуля амплитуды перехода КМ-цепи из состояния a_{i_l} в состояние $a_{i_{l+1}}$.

Доказательство. Поскольку матрицы $Z^l (l = 1, 2, \dots, N-1)$ — унитарные, то из определения интенсивности и формулы (4.1) вытекает равенство

$$\|\psi(A \cap A')\|^2 = \|\hat{\chi}_{\{i_{l+1}\}} \circ Z^l \circ \hat{\chi}_{\{i_l\}} \circ \dots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{\{i_1\}} \psi^0\|^2 = |z_{i_{l+1} i_l}^l|^2 c_{i_l}^l,$$

где $c_{i_l}^l = \|\hat{\chi}_{\{i_l\}} \circ Z^{l-1} \circ \dots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{\{i_1\}} \psi^0\|^2 = \|\psi(A')\|^2$. Поэтому $I(A/A') = |z_{i_{l+1} i_l}^l|^2$. Теорема доказана. Величину $|z_{ij}^l|^2$ будем называть интенсивностью перехода КМ-цепи из a_j в a_i за один шаг.

Теорема 4.2 показывает, что интенсивность состояний КМ-цепи обладает марковским свойством: если известно, что в момент l КМ-цепь находилась в состоянии a_j , (событие A_j^l), а в момент $l+1$ — в состоянии a_i (событие A_i^{l+1}), то условная интенсивность виртуального события A_i^{l+1} относительно A_j^l не зависит от того, в каких состояниях находилась КМ-цепь до момента l . Аналогичным свойством обладает и амплитуда КМ-цепи, (см. [50]).

Теорема 4.3. Пусть φ и θ — произвольные единичные векторы из C^h . Если отношение

$$\frac{\langle \varphi, \psi(A \cap A') \rangle}{\langle \theta, \psi(A') \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} J(A, \varphi/A', \theta),$$

где $A = A_{i_{l+1} i_l \dots i_j}^{l+1 l \dots l}$, $A' = A_{i_{l+1} i_l \dots i_j}^{l \dots l}$, конечно, то оно зависит только от состояний КМ-цепи в моменты $l+1$ и l .

Доказательство этой теоремы, аналогичное доказательству теоремы 4.2, приводится в [50].

Если φ — единичный вектор гильбертова пространства H , то пространство H можно представить в виде ортогональной суммы подпространства $H_{\perp}(\varphi)$, ортогонального вектору φ и его ортогонального дополнения $H(\varphi)$: $H = H(\varphi) \dot{+} H_{\perp}(\varphi)$. Проекцией вектора ψ в $H(\varphi)$ называют скалярное произведение $\langle \varphi, \psi \rangle$.

По аналогии будем называть амплитудой виртуального события A в $H(\varphi)$ ($H = C^h$) величину $\langle \varphi, \psi(A) \rangle$, а отношение $J(A, \varphi/A', \theta)$, определенное выше, — условной амплитудой события A в $H(\varphi)$ относительно A' в $H(\theta)$.

Приняв утверждение теоремы 4.3 в качестве определения КМ-цепи в терминах условной амплитуды $J(A, \varphi/A', \theta)$ можно в качестве следствия получить формулы (4.1) и, таким образом, вернуться к исходному определению.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов А. Л., О связи между континуальными интегралами и дифференциальными уравнениями. Теор. и мат. физ., 1972, 11, № 2, 182—189 (РЖМат, 1972, 9Б456)
2. —, О гамильтоновой форме фейнмановского континуального интеграла. Теор. и мат. физ., 1974, 20, № 3, 302—307 (РЖМат, 1975, 1Б766)
3. Барбашов Б. М., Функциональные интегралы в квантовой электродинамике, ЖЭТФ, 1965, 48, 607—621
4. —, Нестеренко В. В., Приближенные решения в модели $L_{int} = \hbar^2 \psi^2 \varphi^2$ и уравнения на траекториях для функции Грина. Теор. и мат. физ., 1974, 19, № 1, 47—58 (РЖМат, 1974, 9Б652)
5. —, Первушин В. Н., Квазиклассическое приближение в квантовой теории поля со статическим нуклоном. Теор. и мат. физ., 1970, 3, 320—325
6. Баталин И. А., Фрадкин Е. С., Приближение стационарной фазы в функциональном методе. Препринт ФИАН, 1968, № 137
7. Белов В. В., Маслов В. П., Теория возмущения комплексных марковских цепей. Дополнение к книге В. В. Белова и соавт. Теория графов. М., «Высшая школа», 1976, 295—388
8. Березин Ф. А., Об одном представлении операторов с помощью функционалов. Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, 17, 117—196 (РЖМат, 1968, 9Б685)
9. —, Невинеровские континуальные интегралы. Теор. и мат. физ., 1971, 6, № 2, 194—212 (РЖМат, 1971, 7Б845)
10. Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М., Применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля. Успехи физ. наук, 1972, 106, № 4, 593—616 (РЖМат, 1972, 8Б514)
11. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1973, гл. 7
12. Буслаев В. С., Континуальные интегралы и асимптотика решений параболических уравнений при $t \rightarrow 0$. Приложения к дифракции. В сб. «Пробл. мат. физ.», вып. 2. Л., Ленингр. ун-т, 1967, 85—107 (РЖМат, 1968, 8Б475)
13. Владимиров В. С., О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 113—130 (РЖМат, 1958, 611)
14. —, Численное решение кинетического уравнения для сферы. Вычисл. математика, 1958, № 3, 3—33 (РЖМат, 1960, 901)
15. —, О приближенном вычислении винеровских интегралов. Успехи мат. наук, 1960, 15, № 4, 129—135 (РЖМат, 1962, 3В15)
16. —, Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967 (РЖМат, 1968, 12Б410К)
17. —, Соболев И. М., Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло. Вычисл. математика, 1958, № 3, 130—137 (РЖМат, 1960, 4621)
18. Гельфанд И. М., Вилленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Физматгиз, 1961 (РЖМат, 1963, 8Б364К)
19. —, Фейнберг С. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., О применении метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения. Тр. 2-й Междунар. конференции по мирному использованию атомн. энергии. 1958. Т. 2. Ядерн. реакторы и ядерн. энерг. М., Атомиздат, 1959, 588—612 (РЖМат, 1960, 3500)
20. —, Фролов А. С., Ченцов М. Н., Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 32—45 (РЖМат, 1959, 9495)
21. —, Ченцов М. Н., Численное вычисление континуальных интегралов. ЖЭТФ, 1956, 31, № 6, 1106—1107
22. —, Яглом А. М., Интегрирование в функциональных пространствах и

- его применение в квантовой физике. Успехи мат. наук, 1957, 12, № 1, 3—52 (РЖМат, 1958, 3336)
23. Гихман И. Н., Скороход А. В., Теория случайных процессов. Т. 1. М., «Наука», 1971 (РЖМат, 1972, 3В36К)
 24. —, —, Теория случайных процессов. Т. Ш. М., «Наука», 1971 (РЖМат, 1976, 5В38К)
 25. Далецкий Ю. Л., Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, 3—115 (РЖМат, 1963, 8Б438)
 26. —, Интегрирование в функциональных пространствах. В сб. «Матем. анализ, 1966 (Итоги науки. ВИНТИ АН СССР)». М., 1967, 83—124 (РЖМат, 1968, 6Б755)
 27. —, Стремский В. В., Фейнмановские интегралы для уравнения Шредингера в функциональных производных. Успехи мат. наук, 1969, 24, вып. 1, 191—192 (РЖМат, 1969, 11Б618)
 28. —, Фомин С. В., Обобщенные меры в функциональных пространствах. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 2, 329—343 (РЖМат, 1966, 1Б514)
 29. —, —, Обобщенные меры в гильбертовом пространстве и прямое уравнение Колмогорова. Докл. АН СССР, 1972, 205, № 4, 759—762 (РЖМат, 1972, 12Б793)
 30. Евграфов М. А., Об одной формуле для представления фундаментального решения дифференциального уравнения континуальным интегралом. Докл. АН СССР, 1970, 191, № 5, 979—982 (РЖМат, 1970, 8Б678)
 31. Евсеев А. М., Расчет основного уровня энергии гелия с помощью интегралов по траекториям. Докл. АН СССР, 1969, 189, № 6, 1197—1199 (РЖМат, 1970, 5Б790)
 32. Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Изд. 2-е, доп. М., «Наука», 1975 (РЖМат, 1976, 2В265К)
 33. Заплатная А. Т., Разностные схемы и функциональные интегралы, связанные с некоторыми нелинейными уравнениями параболического типа. Кандидатская дис. АН УССР, Киев, 1967
 34. Карасев М. В., Функция от континуальных семейств упорядоченных операторов. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1975, вып. 49, 64—95 (РЖМат, 1976, 8Б856)
 35. —, Об упорядоченном квантовании. Моск. ин-т электрон. машиностр. М., 1974 (РЖМат, 1975, 6Б915ДЕП)
 36. —, Интеграл по траекториям и его квазиклассическая асимптотика на группе Лп. Теор. и мат. физ., 1977, 31, № 1, 41—47 (РЖМат, 1977, 10Б924)
 37. —, Мосалова М. В., Бесконечные произведения и T-произведения экспонент. Теор. и мат. физ. 1976, 28, № 2, 189—200 (РЖМат, 1977, 2Б578)
 38. Като Т., Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972 (РЖМат, 1973, 2Б695К)
 39. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975
 40. —, Татарский В. И., О приближении параболического уравнения в задачах распространения волны в среде со случайными неоднородностями. ЖЭТФ, 1970, 58, № 2, 624—634
 41. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974 (РЖМат, 1974, 9В1К)
 42. Колчин В. Ф., Ветвящиеся процессы, случайные деревья и обобщенная схема размещения частиц. Мат. заметки, 1977, 21, № 5, 691—705 (РЖМат, 1977, 9В85)
 43. Крылов В. Ю., О некоторых свойствах распределения, отвечающего уравнению $\frac{du}{dt} = (-1)^{q+1} \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}}$. Докл. АН СССР, 1960, 132, № 6, 1254—1257 (РЖМат, 1962, 11Б279)
 44. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа относительно винеров.

- ской. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, 36, № 4, 847—889 (РЖМат, 1972, 10В110)
45. *Майков Е. В.*, О неэквивалентности двух определений континуального интеграла. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 85—87 (РЖМат, 1961, 2В389)
 46. —, τ -гладкие функционалы и интегрирование в функциональных пространствах. Успехи мат. наук, 1963, 18, № 3, 243—244
 47. —, τ -гладкие функционалы. Тр. Моск. мат. о-ва, 1969, 20, 9—42 (РЖМат, 1970, 2В692)
 48. *Маслов В. П.*, Определение комплексных марковских цепей и вывод уравнения Шрёдингера. Докл. АН СССР, 1970, 192, № 2, 272—275 (РЖМат, 1970, 12В859)
 49. —, К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана. Теор. и мат. физ., 1970, 2, № 1, 30—35 (РЖМат, 1970, 5В467)
 50. —, Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М., «Наука», 1976, (РЖМат, 1976, 11В972К)
 51. —, Чеботарев А. М., Представление решения уравнения типа Хартри в виде T -отображения. Докл. АН СССР, 1975, 222, № 5, 1037—1040 (РЖМат, 1976, 1В726)
 52. —, —, Определение континуального интеграла Фейнмана в P -представлении. Докл. АН СССР, 1976, 229, № 1, 37—38 (РЖМат, 1976, 12В892)
 53. —, —, Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана. Теор. и мат. физ., 1976, 28, № 3, 291—307 (РЖМат, 1977, 1В201)
 54. —, Шишмарев И. А., О T -произведении гипоеллиптических операторов. В сб. «Соврем. пробл. мат. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 137—197 (РЖМат, 1977, 10В923)
 55. *Невё Ж.*, Математические основы теории вероятностей. М., «Мир», 1969 (РЖМат, 1970, 2В1К)
 56. *Новиков Е. А.*, Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1964, 47, № 5, 1919—1926
 57. *Питовранов С. Е.*, Исследование динамических систем, возмущаемых случайными шумами с помощью винеровских континуальных интегралов. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1973, вып. 36, 243—249 (РЖМат, 1974, 11В287)
 58. *Прохоров Ю. В.*, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применение, 1956, 1, № 2, 177—238 (РЖМат, 1957, 8789)
 59. —, Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. Изд. 2-е, перераб. М., «Наука», 1973 (РЖМат, 1974, 1В110К)
 60. *Пулков К. А.*, Капалин В. И., Ющенко А. С., Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М., «Наука», 1976 (РЖМат, 1976, 10В930К)
 61. *Райтбурд В. Л.*, О представлении решения задачи Коши в виде континуального интеграла. Докл. АН СССР, 1971, 201, № 3, 545—547 (РЖМат, 1972, 3В252)
 62. *Самарский А. А.*, Гуллин А. В., Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973 (РЖМат, 1974, 4В962К)
 63. *Севастьянов Б. А.*, Ветвящиеся процессы. М., «Наука», 1971 (РЖМат, 1972, 3В165К)
 64. *Скороход А. В.*, Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1975 (РЖМат, 1976, 4В894К)
 65. *Славнов А. А.*, Континуальный интеграл в теории возмущений. Теор. и мат. физ., 1975, 22, № 2 (РЖМат, 1975, 7В520)
 66. *Соболь И. М.*, Численные методы Монте-Карло. М., «Наука», 1973 (РЖМат, 1974, 9В1268К)
 67. *Фаддеев Л. Д.*, Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. Теор. и мат. физ., 1969, 1, № 1, 3—18 (РЖМат, 1970, 7В515)
 68. —, Симплектическая структура и квантование теории тяготения Эйнштейна. В сб. «Международ. конгресс математиков в Ницце. 1970». М., «Наука», 1972, 328—333 (РЖМат, 1973, 4В561)

69. *Фейнман Р.*, Пространственно-временной подход в квантовой механике. В сб. «Вопр. причинности в квантовой механике», М., ИЛ, 1955, 167—207
70. —, Операторное начисление, имеющее приложение в квантовой электродинамике. В сб. «Пробл. совр. физики», 1955, № 3, 37—79
71. —, Хи б с А., Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., «Мир», 1969
72. *Фомин С. В.*, О включении интеграла по мере Винера в общую схему интеграла Лебега. Научн. докл. высш. школы. Физ.-мат. н., 1958, № 2, 83—85 (РЖМат, 1959, 11263)
73. —, Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье. Успехи мат. наук, 1968, 23, № 2, 215—216 (РЖМат, 1968, 11Б500)
74. —, Метод преобразования Фурье для уравнения в функциональных производных. Докл. АН СССР, 1968, 181, № 4, 812—814 (РЖМат, 1969, 1Б692)
75. —, Дифференцируемые меры в линейных пространствах. Успехи мат. наук, 1968, 23, № 1, 221—222 (РЖМат, 1968, 8Б587)
76. —, О некоторых новых проблемах и результатах в нелинейном функциональном анализе. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1970, № 2, 57—65. (РЖМат, 1970, 8Б679)
77. *Фрадкин Е. С.*, О функциональном методе в квантовой статистике и в теории многих тел. В сб. «Пробл. теор. физики», М., «Наука», 1969, 386—413
78. *Фрейдлин М. И.*, О существовании «в целом» гладких решений вырождающихся квазилинейных уравнений. Мат. сб., 1969, 78, № 3, 332—348. (РЖМат, 1969, 12Б370)
79. —, Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональном пространстве. Функци. анализ и его прил., 1967, 1, № 3, 74—82 (РЖМат, 1968, 5Б716)
80. Функциональный анализ. Изд. 2-е перераб. и доп. Ред. Крейн С. Г. М., «Наука», 1972 (РЖМат, 1972, 10Б419К)
81. *Хилле Э., Филлипс Р.*, Функциональный анализ и полугруппы. М., «Изд-во ин. лит.», 1962 (РЖМат, 1963, 12Б409К)
82. *Чеботарев А. М.*, Т-отображения и континуальные интегралы. Докл. АН СССР, 1975, 225, № 4, 763—766 (РЖМат, 1976, 5Б742)
83. —, О Т-отображении, связанном с уравнением типа Хартри. Мат. заметки, 1977, 21, № 5, 605—614 (РЖМат, 1977, 9Б633)
84. *Ченцов Н. Н.*, О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, 1, № 3, 418—424 (РЖМат, 1962, 1В181)
85. —, Псевдослучайные числа для моделирования марковских цепей. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, 7, № 3, 632—643 (РЖМат, 1968, 12В235)
86. *Четвериков В. М.*, Функция Грина пространственного осциллятора в переменном однородном электромагнитном поле. Изв. высш. учебн. заведений. Физика, 1975, № 3, 17—22
87. —, О континуальном интеграле в случае неаддитивного действия. Теор. и мат. физ., 1975, 24, № 2, 211—218 (РЖМат, 1976, 1Б444)
88. —, Усредненная функция Грина уравнения Шредингера со случайным потенциалом. Теор. и мат. физ., 1976, 28, № 3, 359—370
89. *Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь*, Интеграл, мера, производная на линейных пространствах. М., «Наука», 1967 (РЖМат, 1968, 3Б652К)
90. —, Гуревич Б. Л., Интеграл, мера, производная. М., «Наука», 1967
91. *Янович Л. А.*, Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск, Наук. и техн., 1976 (РЖМат, 1976, 10Б892К)
92. *Albeverio S., Hoegh-Krohn P.*, Mathematical theory of Feynman path integrals. Lect. Notes Math., 1976, 523, 139 pp. (РЖМат, 1977, 2Б985)
93. —, Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics. I. Invent. math., 1977, 40, № 1, 59—106 (РЖМат, 1977, 11Б761)

94. *Babbitt D. G.*, A summation procedure for certain Feynman integrals. Doct. diss. Univ. Michigan, 1962, 62 pp. Dissert. Abstrs, 1963, 23, № 9, 3392—3393 (PЖМат, 1964, 12Б14Д)
95. *Brush S. G.*, Functional integrals and statistical physics. Rev. Mod. Phys., 1961, 33, № 1, 79—92 (PЖМат, 1964, 3Б129)
96. *Buchholz D.*, *Tarski J.*, Integrable cylinder functionals for an integral of Feynman-type. Ann. Inst. H. Poincare, 1976, A24, № 3, 323—328 (PЖМат, 1976, 11Б973)
97. *Cameron R. H.*, The Ilstow and Feynman integrals. «Ирон леаналиса математит, J. analyse math.», 1962—1963, 10, 287—361 (PЖМат, 1964, 3Б188)
98. —, A family of integrals, serving to connect the Wiener and Feynman integrals. J. Math. and Phys., 1960, 39, № 2, 126—140 (PЖМат, 1962, 4Б406)
99. —, Approximation to certain Feynman integrals. J. analyse math., 1968, 21, 337—371
100. —, *Storvick D. A.*, An operator valued function space integral and a related integral equation. J. Math. and Mech., 1968, 18, № 6, 517—552 (PЖМат, 1969, 12Б736)
101. —, —, An integral equation related to the Schroedinger equation with an application to integration in function space. Problems in Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970, 175—193
102. —, —, An operator-valued function-space integral applied to integrals of functions of class L_1 . Proc. London, Math. Soc., 1973, 27, № 2, 345—360 (PЖМат, 1974, 2Б953)
103. —, —, An operator valued function space integral applied to integrals of class L_2 . J. Math. Anal. and Appl., 1973, 42, № 2, 330—372 (PЖМат, 1973, 10Б701)
104. —, —, An operator-valued function space integral applied to multiple integrals of functions of class L_1 . Nagoya Math. J., 1973, 51, 91—122
105. *Campbell W. B.*, *Finkler P.*, *Jones C. E.*, *Michetoff M. N.*, Path integrals with arbitrary generators and the engenfunction problems. Ann. Phys., 1976, 96, № 2, 286—302 (PЖМат, 1977, 1Б534)
106. *Choquard Ph.*, Traitment semiclassique des forces generales dans la representation de Feynman. Helv. phys. acta, 1955, 28, № 2—3, 89—157
107. *Cohen L.*, Hamiltonian operator via Feynman path integrals. J. Math. Phys., 1960, 4, № 11, 3296—3297
108. *Dashen R. F.*, *Hasslacher B.*, *Neven A.* Non-perturbation methods and extended-hadron models in field theory. 1. Semiclassical functional methods. Phys. Rev., 1974, D10, № 12, 4114—4129
109. *Davis H.*, Hamiltonian approach to the method of summation over Feynman historia. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1963, 59, 147—155
110. *Fradkin E. S.*, *Esposito V.*, *Termini S.* Functional techniques in physics. Riv. Nuovo cim., 1970, 2, 498—560
111. *Fridrichs K. O.*, *Shapiro N. W.*, Integration over Hilbert space and outer extensions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 4, 336—338 (PЖМат, 1958, 9026)
112. *Garczyński W.*, Stochastic pseudoprocesses and quantum theory. Acta Univ. wratisl., 1976, № 368, 242—325
113. *Gutzwiller G.*, Phase-integral approximation in momentum space and the bound states of an atom. J. Math. Phys., 1967, 8, № 10, 1979—2000
114. *Ito K.*, Wiener integral and Feynman integral. Proc. 4th Berjekey Sympos. Math. Statist. and Probability, 1960, vol. 2, Berkeley-Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 227—238 (PЖМат, 1962, 11Б363)
115. —, Generalized uniform complex measures in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman integral. Proc. 5th. Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1965—1966, vol. 2. Part 1. Berkeley-Los Angeles, 1967, 145—161 (PЖМат, 1970, 3Б32)
116. *Jessen B.*, The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions. Acta. Math., 1934, 63, № 1—2, 249

117. *Johnson G. W., Skoug D. L.*, Feynman integrals of non-factorable finite-dimensional functionals. *Pacif. J. Math.*, 1973, 45, № 1, 257—267 (PJKMar, 1973, 10B702)
118. —, —, A Banach algebra of Feynman integrable functionals with application to an integral equation formally equivalent to Schrödinger's equation. *J. Functional anal.*, 1973, 12, № 2, 129—152 (PJKMar, 1973, 8B894)
119. —, —, The Cameron-Storvick functional space integral: The L_1 -theory. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1975, 50, № 3, 647—667
120. —, —, Cameron and Storvick's function space integral for certain Banach space of functionals. *J. London Math. Soc.*, 1974, 9, № 1, 103—117 (PJKMar, 1975, 6B1074)
121. *Kato T.*, Quasi-linear equations of evolution with application to partial differential equations. *Lect. Notes Math.*, 1975, 448, 25—70 (PJKMar, 1975, 11B879)
122. *Keller J. B., McLaughlin D. W.*, The Feynman integral. *Amer. Math. Mon.*, 1975, 82, № 5, 451—465 (PJKMar, 1976, 4B557)
123. *Kree P.*, Exemples d'utilisation de la théorie des distributions et des fonctionnelles linéaires sur les espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci.*, 1974, A278, № 5, 335—337 (PJKMar, 1974, 7B871)
124. *Kristensen P., Mejibo L., Poulsen E. T.*, On a Fourier transform in infinitely many dimensions. *Lect. Notes Math.*, 1967, 31, 187—196 (PJKMar, 1969, 2B589)
125. *Levy P.*, Théorie de l'addition des variables aleatoires. XX-388 pp., 1954, Paris, Gauthier-Villars; *Bibliogr. France*, 1954, 143, № 31—32, 726 (PJKMar, 1955, 2B22K)
126. *Maslov V. P.*, Operational methods. Moscow, «Mir», 1976
127. —, *Chebotaiev A. M.*, On the Monte-Carlo calculation of the feynmans paths integrals in the P -representation. *Proc. of the Second IMACS International symposium on computer methods for partial differential equations.* Lehigh Univ., Bethlehem. Pa. (U. S. A.), June 22—24, 1977
128. *McLaughlin D. M.*, Path integrals, asymptotics and singular perturbations. *J. Math. Phys.*, 1972, 13, № 5, 784—796 (PJKMar, 1972, 10B316)
129. —, Complex time, contour independent path integrals and barrier penetration *J. Math. Phys.*, 1972, 13, № 8, 1099—1108 (PJKMar, 1973, 2B517)
130. *Mizrahi M.*, The Weyl correspondence and path integrals. *J. Math. Phys.*, 1975, 16, № 11, 2201—2206 (PJKMar, 1976, 5B506)
131. *Montroll E. W.*, Markoff chains, Wiener integrals and quantum theory. *Comm. pure appl. Math.*, 1952, 5, 415—453
132. *Morette DeWitte C.*, L'intégral fonctionnel de Feynman. Un intraduction. *Ann. Inst. H. Poincaré, Ser. A.*, 1969, 153—206
133. —, Feynman's Path integral. Defenition without limiting procedure. *Comm. Math. Phys.*, 1972, 28, 47—67
134. —, Feynman Path integrals. *Comm. Math. Phys.*, 1974, 37, № 1, 63—81
135. —, Path integrals in Riemannian manifolds. *Loct. Notes Phys.*, 1975, 39, 535—542
136. *Nelson E.*, Feynman integrals and the Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 1964, 5, № 3, 332—343 (PJKMar, 1965, 3B636)
137. *Pao-Liu Chow*, Applications of function space integrals to problems in wave propagation in random media. *J. Math. Phys.*, 1972, 13, № 8, 1224—1236
138. *Schulman L. S.*, A path integral for spin. *Phys. Rev.*, 1968, 176, 1558—1569
139. *Tarski J.*, Defenitions and selected applications of Feynman-type integrals, in «Functional integration and applications», Oxford Univ. Press, London, 1975 (proceedings of the international conference held at Cuberland Lodge, Windsor Great Park, London in april 1974)
140. —, Recent results on Feynman-type integrals, Summer course in a complex analysis 21.5—3.8 1975. *Internat. centre Theor. Phys.*, 1975
141. *Testa F. J.*, Quantum operator ordering and the Feynman formulation. *J. Math. Phys.*, 1971, 12, № 8, 1471—1474 (PJKMar, 1972, 3B399)