

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Repin, A posteriori estimates for the accuracy of variational methods for problems with nonconvex functionals, *Algebra i Analiz*, 1999, Volume 11, Issue 4, 151–182

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1067>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

May 25, 2025, 08:11:52



## АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

© С. И. Репин

В работе даны оценки разности точного и приближенного решений для невыпуклых вариационных задач, в которых полунепрерывная снизу регуляризация функционала может быть получена заменой интегранда его выпуклой оболочкой. Метод их получения основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления. В статье показано, что апостериорную оценку целесообразно строить не для исходной вариационной постановки или соответствующей релаксированной задачи, а для двойственной вариационной проблемы. Полученная мажоранта погрешности  $M^*$  определяется двумя величинами, которые характеризуют отклонение приближенного решения двойственной задачи от двух замкнутых подмножеств основного функционального пространства этой задачи. Последние состоят из функций, удовлетворяющих соответственно соотношениям двойственности и дифференциальному уравнению, которое вытекает из необходимых условий экстремума двойственной задачи. Доказано, что  $M^*$  стремится к нулю на любой последовательности функций, сходящихся к точному решению. Это позволяет обосновать конструктивный способ построения аппроксимации решения с любой заранее заданной точностью.

### §1. Введение

**1.1. Постановка задачи.** Рассматриваются вариационные задачи для интегральных функционалов

$$I(v) = \int_{\Omega} (g(\nabla v) - fv) dx, \quad (1.1)$$

где интегранд  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является невыпуклой функцией и задается в виде

$$g(\xi) = \min_{i=1,2} \{g_i(\xi)\}, \quad g_i(\xi) = \frac{1}{2} A_i (\xi - a_i) \cdot (\xi - a_i) + \beta_i. \quad (1.2)$$

*Ключевые слова:* вариационные методы, невыпуклые функционалы, апостериорные оценки.

Данная работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 96-0835.

В (1.2)  $A_1, A_2$  принадлежат пространству  $M_s^{n \times n}$  симметричных  $n \times n$ -матриц,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ , а  $\beta_1, \beta_2$  — некоторые вещественные числа. Здесь и далее  $\xi \cdot \eta$  обозначает скалярное произведение векторов  $\xi$  и  $\eta$ . Евклидова норма вектора  $\xi \in \mathbb{R}^n$  и норма матрицы  $A$  обозначаются соответственно  $|\xi|$  и  $|A|$ .

Предполагается, что  $a_1, a_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  заданы так, что функция  $g$  не может полностью совпадать с  $g_1$  или  $g_2$  и что матрицы  $A_i$  подчинены условиям

$$\nu_i |\xi|^2 \leq A_i \xi \cdot \xi \leq \mu_i |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

с некоторыми положительными постоянными  $\nu_i, \mu_i$ .

Вариационные проблемы с интеграндами типа (1.2) возникают в теории фазовых переходов твердых тел, когда удельная энергия задается невыпуклой функцией, соответствующей минимуму выпуклых энергий отдельных фаз (в этом случае аргументом  $g$  является тензор малых деформаций  $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$ ), а также в некоторых задачах оптимального управления (см., например, [11, 12, 20, 21, 24]).

Перейдем к формальной постановке исходной вариационной проблемы. Будем считать, что

$$f \in L_2(\Omega) \quad (1.4)$$

и что множеством допустимых функций является аффинное многообразие

$$V_0(\Omega) + u_0 = \left\{ v \in V(\Omega) := W_2^1(\Omega) \mid v = u_0 + w, w \in V_0(\Omega) \right\},$$

где  $V_0(\Omega) := \{v \in V(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ , а функция  $u_0$ , определяющая граничное условие, задана так, что

$$u_0 \in V(\Omega). \quad (1.5)$$

Задачу минимизации функционала  $I$  на множестве  $V_0(\Omega) + u_0$  будем далее называть задачей  $\mathcal{P}$ . Так как функция  $g$  невыпукла, то функционал  $I$  не является секвенциально слабо полунепрерывным снизу на пространстве  $V(\Omega)$  и, следовательно, в  $V_0(\Omega) + u_0$  может не существовать функции  $u$ , реализующей точную нижнюю грань в задаче  $\mathcal{P}$ . Поэтому для получения математически корректной вариационной постановки, сохраняющей точную нижнюю грань задачи  $\mathcal{P}$ , необходимо и достаточно построить соответствующую полунепрерывную снизу регуляризацию функционала  $I$ . Это приводит к так называемой релаксированной вариационной задаче.

Задача  $\mathcal{P}^{**}$ . Найти функцию  $u^{**} \in V_0(\Omega) + u_0$  такую, что

$$I^{**}(u^{**}) = \inf_{v \in V_0(\Omega) + u_0} I^{**}(v) := \inf \mathcal{P}^{**}, \quad (1.6)$$

где

$$I^{**}(v) := \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) - fv) dx.$$

Для задач (1.1), (1.2) со скалярной функцией  $v$  и для некоторых векторных задач  $g^{**}$  совпадает с выпуклой оболочкой функции  $g$ . Если

$$A_1 = A_2 = A,$$

то функция  $g^{**}$  может быть записана в явном виде (см., например, [24, 26, 27])

$$g^{**}(\xi) = \begin{cases} g_1(\xi), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) + t_*/2 < 0; \\ g_2(\xi), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) - t_*/2 > 0; \\ g_2(\xi) - \frac{1}{2t_*}(g_2(\xi) - g_1(\xi) + t_*/2)^2, & \\ \text{если } |g_1(\xi) - g_2(\xi)| \leq t_*/2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Постоянная  $t_*$  в этом равенстве равна

$$t_* = A(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_2).$$

Функция  $g^{**}$ , заданная в (1.7), непрерывно дифференцируема, и ее производная

$$\Delta \xi = \begin{cases} A(\xi - a_1), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) + t_*/2 < 0; \\ A(\xi - a_2), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) - t_*/2 > 0; \\ A(\xi - a_2) - t_*^{-1}A(a_1 - a_2)(g_2(\xi) - g_1(\xi) + t_*/2), & \\ \text{если } |g_1(\xi) - g_2(\xi)| \leq t_*/2. \end{cases}$$

В теории двойственности вариационного исчисления (см., например, [17]) каждой выпуклой вариационной задаче сопоставляется ее двойственная. Для задачи  $\mathcal{P}^{**}$  эта двойственная вариационная проблема имеет следующий вид.

**Задача  $\mathcal{P}^*$ .** Найти вектор-функцию  $p^* \in Y^*(\Omega)$  такую, что

$$I^*(p^*) = \sup_{q^* \in Y^*(\Omega)} I^*(q^*) := \sup \mathcal{P}^*. \quad (1.8)$$

В (1.8)  $Y^*(\Omega)$  совпадает с гильбертовым пространством  $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , состоящим из суммируемых с квадратом векторных функций. Норма в  $Y^*(\Omega)$  определяется обычным образом и обозначается  $\|\cdot\|_*$ . Функционал  $I^*(q^*)$  в (1.8) конечен и равен

$$\int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot q^* - g^*(q^*) - f u_0) dx$$

на тех функциях  $q^* \in Y^*(\Omega)$ , которые в обобщенном смысле удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{div} q^* + f = 0.$$

В остальных случаях  $I^*(q^*) = -\infty$ . Функция  $g^*$  является сопряженной к  $g^{**}$ , т.е.

$$g^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\xi \cdot \xi^* - g^{**}(\xi)\},$$

и определяется равенством

$$g^*(\xi) = \max\{g_1^*(\xi), g_2^*(\xi)\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.9)$$

где

$$g_i^*(\xi) = \frac{1}{2} B_i^* \xi \cdot \xi + \xi \cdot a_i - \beta_i, \quad (1.10)$$

а матрица  $B_i^*$  является обратной к  $A_i$  и удовлетворяет неравенствам, аналогичным (1.3):

$$\mu_i^{-1} |\xi|^2 \leq B_i^* \xi \cdot \xi \leq \nu_i^{-1} |\xi|^2, \quad i = 1, 2. \quad (1.11)$$

Используя (1.3) и (1.11), нетрудно установить, что для определенных таким образом функций  $g^*$  и  $g^{**}$  выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\mu_+} |\xi|^2 - \gamma_1 \leq g^*(\xi) \leq \frac{2}{\nu_-} |\xi|^2 + \gamma_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.12)$$

$$\frac{\nu_-}{4} |\xi|^2 - \gamma_2 \leq g^{**}(\xi) \leq \frac{\mu_+}{2} |\xi|^2 + \gamma_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

в которых

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \max\{\mu_1, \mu_2\}, & \mu_- &= \min\{\mu_1, \mu_2\}, \\ \nu_+ &= \max\{\nu_1, \nu_2\}, & \nu_- &= \min\{\nu_1, \nu_2\}, \\ \gamma_1 &= \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\mu_i}{2} |a_i|^2 + \beta_i \right\}, & \gamma_2 &= \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\nu_i}{4} |a_i|^2 - \beta_i \right\}. \end{aligned}$$

При помощи (1.12) и (1.13) устанавливается коэрцитивность функционалов  $-I^*$  и  $I^{**}$  на  $Y^*(\Omega)$  и  $V$  соответственно. Поэтому, используя известные теоремы вариационного исчисления (см. [17]), можно доказать следующее утверждение:

**Теорема 1.1.** *Задачи  $\mathcal{P}^*$  и  $\mathcal{P}^{**}$  имеют решения  $p^*$  и  $u^{**}$  соответственно. Решение задачи  $\mathcal{P}^*$  единственно и при любых  $v \in V_0(\Omega) + u_0$  и любых  $q^* \in Y^*$  выполняются соотношения*

$$I^*(q^*) \leq \sup \mathcal{P}^* = I^*(p^*) = I^{**}(u^{**}) = \inf \mathcal{P} \leq I^{**}(v) \leq I(v), \quad (1.14)$$

$$p^*(x) = \Lambda \nabla u^{**}(x) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad (1.15)$$

где  $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  обозначает производную Гато функции  $g^{**}$ .

**1.2. Аппроксимация решений невыпуклых задач.** Перейдем к рассмотрению проблем, с которыми приходится сталкиваться при аппроксимации решений рассматриваемого класса задач. Пусть  $u$  — решение краевой задачи в вариационной форме

$$I(u) = \inf_{v \in U} I(v), \quad (1.16)$$

где  $U$  — выпуклое замкнутое множество рефлексивного банахова пространства  $V$ , а  $I$  — слабо полунепрерывный снизу и коэрцитивный на  $V$  функционал. В теории аппроксимации изучаются способы приближения  $u$  последовательностью простых (например, кусочно-полиномиальных) функций. При этом необходимо решить две основные проблемы:

1. Построить последовательность  $\{v_m\} \in U$ , сходящуюся к  $u$  в  $V$ . (A)

2. Получить вычисляемую оценку для  $\|v_m - u\|_V$ . (B)

Решение проблемы (A) связано с применением некоторого численного метода, а проблемы (B) с получением апостериорных оценок погрешности. В общем

случае такая оценка задается функционалом  $M$ , который должен удовлетворять трем основным условиям:

$$\|v - u\|_V \leq M(v), \quad v \in U, \quad (1.17)$$

$$M(v) = 0 \iff v = u, \quad (1.18)$$

$$M(v_m) \rightarrow 0, \quad \text{если } v_m \rightarrow u \text{ в } V. \quad (1.19)$$

Значение функционала  $M$  (мажоранты погрешности) определяется приближенным решением и данными задачи и должно давать практически вычислимые и реалистические оценки погрешности.

Проблема получения апостериорных оценок для эллиптических уравнений рассматривалась многими авторами (см. [3, 8–10, 22, 23, 25, 28, 31–33] и цитированную в этих работах литературу). В настоящее время для этой цели используется несколько методов, среди которых выделяется „метод невязок“ (residual method), опирающийся на вычисление слабой нормы невязки дифференциального уравнения. В [5, 29, 30] был предложен метод получения апостериорных оценок для вариационных задач с так называемыми сильно выпуклыми функционалами, который основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления. Для этого класса задач было получено представление апостериорной оценки в виде суммы ошибок в соотношении двойственности и в уравнении для двойственной переменной и показано, что многие методы (включая метод невязок) являются частными случаями двойственных апостериорных оценок.

Проблема получения апостериорных оценок для наиболее сложных классов вариационных задач, к которым, в частности, относятся задачи с невыпуклыми интеграндами, изучена мало (среди небольшого числа публикаций на эту тему упомянем работу [13]). Такое положение связано с принципиальными трудностями, которые возникают при аппроксимации решений невыпуклых вариационных задач. Дело в том, что ни одна из возможных вариационных формулировок ( $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^{**}$  или  $\mathcal{P}^*$ ) не обладает свойствами, необходимыми для эффективного решения задач  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  одновременно. Действительно, задача  $\mathcal{P}$  математически некорректна. Задача  $\mathcal{P}^{**}$ , которая обычно используется для построения аппроксимаций (см., например, [14, 16, 18]), имеет решение, а соответствующая минимизирующая последовательность может быть построена известными методами путем минимизации  $I^{**}$  на последовательности конечномерных подмножеств множества  $V_0(\Omega) + u_0$ . Однако функционал задачи  $\mathcal{P}^{**}$  не является строго выпуклым, что не позволяет гарантировать существование единственного предела у минимизирующей последовательности и получать апостериорные оценки погрешности.

Функционал  $-I^*$  является строго выпуклым, а решение  $p^*$  задачи  $\mathcal{P}^*$  существует и единственно (отметим, что в [6] установлена локальная  $W_2^1$  — регулярность этого решения). Как показано далее, функционал  $-I^*$  является также и сильно выпуклым, что позволяет применить подход, развитый в [5, 29, 30], и получить апостериорную оценку для двойственной задачи. Недостатком задачи  $\mathcal{P}^*$  является сложная структура множества, на котором функционал конечен. При построении аппроксимирующей последовательности здесь могут возникнуть большие трудности, связанные с необходимостью разыскивать экстремум недифференциального функционала  $I^*$  на множестве функций, точно удовлетворяющих уравнениям  $\operatorname{div} y^* + f = 0$ .

Подытожим вышесказанное. Релаксированная задача  $\mathcal{P}^{**}$  удобна для построения минимизирующей последовательности  $\{u_m\}$ , но отсутствие сильной выпуклости препятствует получению апостериорных оценок. Задача  $\mathcal{P}^*$  обладает прямо противоположными свойствами. Она весьма неудобна для построения аппроксимаций, но позволяет получить соответствующие апостериорные оценки.

Предлагаемый в статье подход естественным образом вытекает из такого положения вещей. Он основан на *одновременном* использовании сильных сторон релаксированной и двойственной задач. При этом задача  $\mathcal{P}^{**}$  используется для построения аппроксимаций, а задача  $\mathcal{P}^*$  — для получения апостериорной оценки погрешности.

**1.3. Основные результаты.** Главная идея данной работы состоит в том, что при аппроксимации минимайзеров невыпуклых функционалов две основные проблемы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  целесообразно решать не в пространстве  $V(\Omega)$ , а в пространстве  $Y^*(\Omega)$ . При этом  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  заменяются на следующие проблемы:

1. Построить последовательность  $\{y_m^*\}$ , сходящуюся к  $p^*$  в  $Y^*(\Omega)$ . (A\*)
2. Построить вычислительную оценку для  $\|y_m^* - p^*\|_*$ . (B\*)

Перейдем к формулировке основных результатов по этим двум направлениям.

**1.3.1. Получение апостериорной оценки.** В §2 для  $y^* \in Y^*(\Omega)$  получена мажоранта нормы  $\|y^* - p^*\|_*$ , которая обозначается  $M^*$ . Величина  $M^*(y^*)$  определяется расстояниями от элемента  $y^*$  до двух множеств  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\Lambda^*(\Omega)$  (см. 2.2). Первое состоит из функций  $y^* \in Y^*(\Omega)$  таких, что  $\operatorname{div} y^* + f = 0$ , а второе из тех функций  $y^* \in Y^*(\Omega)$ , для которых существует функция  $v \in V_0(\Omega) + u_0$  такая, что  $\nabla v$  и  $y^*$ , связаны соотношением двойственности

$$y^* = \Lambda \nabla v.$$



Теорема 2.1 утверждает, что пересечение множества  $Y_\Lambda^*(\Omega)$  и  $Y_f^*(\Omega)$  состоит из единственного элемента — решения задачи  $\mathcal{P}^*$  и что для любого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  имеется единственное представление в виде  $y^* = y_\Lambda^* + y_f^*$ , где  $y_f^* \in Y_f^*(\Omega)$  и  $y_\Lambda^* \in Y_\Lambda^*(\Omega)$ .

Для любого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  можно определить две неотрицательные величины  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  (см. (2.25), (2.26)). Первая из них является расстоянием между  $y^*$  и его проекцией на множество  $Y_f^*$ , а вторая характеризует отклонение  $y^*$  от множества  $Y_\Lambda^*(\Omega)$ . Общая форма апостериорной оценки для рассматриваемого класса задач дается в теореме 2.2, которая показывает, что мажоранта  $M^*$  определяется величинами  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ , а именно

$$M^*(y^*) := \left[ \sqrt{\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) + \alpha_1 \mathfrak{R}_f^2(y^*) + \alpha_2 \mathfrak{R}_f(y^*) + \alpha_3 \mathfrak{R}_f(y^*)} \right]^2.$$

Постоянные  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в этом выражении определяются данными задачи. При этом  $M^*$  удовлетворяет требованиям (1.17)–(1.19) в пространстве  $Y^*(\Omega)$ :

$$\Psi^*(y^* - p^*) \leq M^*(y^*), \quad y^* \in Y^*(\Omega), \quad (1.20)$$

$$M^*(y^*) = 0 \iff y^* = p^*, \quad (1.21)$$

$$M^*(y_m^*) \rightarrow 0, \quad \text{если } y_m^* \rightarrow p^* \text{ в } Y^*(\Omega), \quad (1.22)$$

где  $\Psi^*$  — неотрицательный функционал (см. 2.3).

В §3 получены вычисляемые оценки сверху для величин  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$ . В общем случае для функции  $y^* \in Y^*(\Omega)$  величина  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  оценивается нормой невязки уравнения  $\operatorname{div} y^* + f$  в пространстве  $H^{-1}$ , топологически сопряженном к пространству  $V_0$  (см. (3.7)). Вычисление такой нормы обычно сопряжено со значительными трудностями. Однако если функция  $y^* \in Q^*(\Omega)$ , где  $Q^*(\Omega)$  содержит функции из  $Y^*(\Omega)$ , обладающее суммируемой с квадратом дивергенцией, то для  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  можно получить оценку сверху через  $L_2$ -норму невязки (см. (3.9)). Таким образом, некоторое сужение класса  $Y^*(\Omega)$  приводит к существенному выигрышу при вычислении  $M^*$ . Поэтому элементы  $y_m^*$ , аппроксимирующие  $p^*$  с заданной точностью, оказывается целесообразным разыскивать именно в этом функциональном классе. Метод построения соответствующей последовательности  $y_m^*$  предлагается в следующем параграфе.

**1.3.2. Построение сходящихся аппроксимаций.** Так как вычисление апостериорной оценки наиболее просто для элементов множества  $Q^*(\Omega)$ , то при аппроксимации решения  $p^*$  с заранее заданной точностью целесообразно было бы использовать функции из этого класса. Это по существу означает, что необходимо указать способ построения последовательности  $\{y_m^*\} \in Q^*(\Omega)$ , сходящейся к  $p^*$  в  $Q^*(\Omega)$ . Для этой цели предлагается использовать минимизирующую последовательность  $\{u_m\}$  задачи  $\mathcal{P}^{**}$ , которая вследствие выпуклости

и дифференцируемости функционала  $I^{**}$  может быть получена при помощи хорошо известных методов. В §4 обосновывается следующий простой способ построения  $\{y_m^*\}$ . Пусть  $\{Q_m^*(\Omega)\}$  — последовательность конечномерных подпространств, вложенных в  $Q^*(\Omega)$  и обладающих в  $Q^*(\Omega)$  свойством предельной плотности. Для каждой функции  $u_m$  единственным образом определяется функция  $y_{\lambda m}^*$  такая, что

$$G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) = \inf_{q^* \in Q_m^*(\Omega)} G^*(\lambda, u_m; q^*), \quad (1.23)$$

где  $\lambda$  — число из интервала  $(0, 1)$ , а

$$\begin{aligned} G^*(\lambda, v; y^*) &:= \lambda \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*) dx \\ &+ (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div} y^* + f|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отметим, что функционал  $G^*$  представляет собой взвешенную сумму двух величин, которые отвечают двум составляющим погрешности  $\mathfrak{R}_{\Lambda}(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$ , а задача (1.24) связана с минимизацией функционала квадратичного роста на конечномерном подпространстве  $Q_m^*(\Omega)$ , не содержащем никаких дифференциальных связей. Эта задача значительно проще задачи  $\mathcal{P}^*$ .

Теорема 4.1 утверждает, что последовательность  $\{y_{\lambda m}^*\}$  сходится к  $p^*$  и что по  $u_m, y_{\lambda m}^*$  можно определить числовую последовательность  $M_m^*$  такую, что

$$\|y_{\lambda m}^* - p^*\|_* \leq M_m^*,$$

причем  $M_m^*$  стремится к нулю при стремлении  $m$  к бесконечности. Таким образом, эта теорема указывает конструктивный путь построения аппроксимаций решения  $p^*$ , для которых погрешность контролируется величиной  $M_m^*$ .

## §2. Общая форма апостериорной оценки для задачи $\mathcal{P}^*$

**2.1. Свойства функционалов  $I^*$  и  $I^{**}$ .** Прежде всего мы установим, что функционал двойственной задачи  $\mathcal{P}^*$  принадлежит к особому классу так называемых *сильно выпуклых* функционалов, и установим некоторые его свойства.

**Определение 1.** Пусть  $Y$  — банахово пространство. Выпуклый собственный функционал  $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$  называется сильно выпуклым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует неотрицательный коэрцитивный функционал  $\Phi_\varepsilon : Y \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что для любых двух элементов  $y_1, y_2$ , принадлежащих шару  $B_\varepsilon := \{y \in Y \mid \|y\|_Y < \varepsilon\}$ , выполняется неравенство

$$J\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \Phi_\varepsilon(y_1 - y_2) \leq \frac{1}{2}(J(y_1) + J(y_2)). \quad (2.1)$$

**Замечание 2.1.** Для некоторых классов выпуклых функционалов неравенства (2.1) с  $\Phi_\varepsilon$  вида  $\phi_\varepsilon(\|y_1 - y_2\|_Y)$ , где  $\phi_\varepsilon$  — вещественная строго монотонная функция, установлены в [4, 7].

**Замечание 2.2.** Если дополнительно предполагается дифференцируемость по Гато функционала  $J$ , то из (2.1) следует, что для любых  $y_1, y_2 \in B_\varepsilon$  имеют место неравенства

$$J(y_2) \geq J(y_1) + \langle J'(y_1), y_2 - y_1 \rangle + 2\Phi_\varepsilon(y_2 - y_1), \quad (2.2)$$

$$\langle J'(y_2) - J'(y_1), y_2 - y_1 \rangle \geq 2\Phi_\varepsilon(y_2 - y_1). \quad (2.3)$$

Функционал  $J$ , удовлетворяющий (2.2) или (2.3), иногда называют *равномерно выпуклым* (см., например, [19]).

Нетрудно проверить, что для функций  $g_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , определенных в (1.10), выполняются неравенства

$$g_i^*\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) + \psi_i^*(\xi_2 - \xi_1) \leq \frac{1}{2}(g_i^*(\xi_1) + g_i^*(\xi_2)), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

где

$$\psi_i^*(\xi) = \frac{1}{8}B_i^* \xi \cdot \xi, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому каждая из этих функций является сильно выпуклой. Сильная выпуклость функции максимума конечного числа равномерно выпуклых функций вытекает из следующего утверждения.

**Утверждение 2.1.** Пусть

$$g^*(\xi) = \max_{i=1,2,\dots,N} \{g_i^*(\xi)\}$$

и для каждой функции  $g_i^*$  имеет место неравенство (2.4) с функцией  $\psi_i^*$ . Тогда

$$g^*\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) + \psi^*(\xi_2 - \xi_1) \leq \frac{1}{2}(g^*(\xi_1) + g^*(\xi_2)), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

где  $\psi^*(\xi) = \min_{i=1,2,\dots,N} \{\psi_i^*(\xi)\}$ .

**Доказательство.** Неравенство (2.5) следует из (2.4) и определения функции  $g^*$ :

$$\begin{aligned} g^*\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) &= \max_{i=1,2,\dots,N} \left\{ g_i^*\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \right\} \\ &\leq \max_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \frac{1}{2}g_i^*(\xi_1) + \frac{1}{2}g_i^*(\xi_2) - \psi_i^*(\xi_1 - \xi_2) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \max_{i=1,2,\dots,N} \{g_i^*(\xi_1)\} + \max_{i=1,2,\dots,N} \{g_i^*(\xi_2)\} \right) \\ &\quad + \max_{i=1,2,\dots,N} \{-\psi_i^*(\xi_1 - \xi_2)\} \\ &= \frac{1}{2}(g^*(\xi_1) + g^*(\xi_2)) - \min_{i=1,2,\dots,N} \{\psi_i^*(\xi_1 - \xi_2)\}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Утверждение 2.1 показывает, что функционал  $-I^*$  строго выпуклый в любом шаре.

Докажем некоторые утверждения, которые окажутся необходимыми в дальнейшем.

На множестве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  определим *составной* функционал

$$D(\xi, \xi^*) := g^{**}(\xi) + g^*(\xi^*) - \xi \cdot \xi^*. \quad (*)$$

Так как

$$g^{**}(\xi) = \sup_{\xi^* \in \mathbb{R}^n} \{\xi \cdot \xi^* - g^*(\xi^*)\} \geq \xi \cdot \xi^* - g^*(\xi^*), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то функционал  $D$  неотрицателен:  $D(\xi, \xi^*) \geq 0$  для любых  $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^n$ . Отметим, что, как следует из известных результатов выпуклого анализа,  $D(\xi, \xi^*) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\xi$  принадлежит субдифференциалу  $\partial g^*(\xi^*)$  (или  $\xi^* \in \partial g^{**}(\xi)$ ).

**Утверждение 2.2.** Для любых  $\eta, \tau, \eta^*, \tau^* \in \mathbb{R}^n$  и любых положительных  $\lambda_1, \lambda_2$  таких, что  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , справедливо неравенство

$$(\eta - \tau) \cdot (\eta^* - \tau^*) \leq \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, \eta^*) + \frac{1}{\lambda_2} D(\eta, \eta^*) + (\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*), \quad (2.6)$$

где  $\kappa_1 \in \partial g^*(\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^* + (\eta^* - \tau^*))$ , а  $\kappa_2 \in \partial g^*(\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*)$ .

**Доказательство.** Согласно определению функционала  $D$ , для любых  $\xi_1, \xi_2, \xi_1^*, \xi_2^* \in \mathbb{R}^n$  имеем

$$\begin{aligned} & \lambda_1 D(\xi_1, \lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) + \lambda_2 D(\xi_2, \lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) \\ &= \lambda_1 g^{**}(\xi_1) + \lambda_2 g^{**}(\xi_2) \\ & \quad + g^*(\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) - (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) \cdot (\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) \\ & \geq \lambda_1 (\xi_1 \cdot \xi_1^* - g^*(\xi_1^*)) + \lambda_2 (\xi_2 \cdot \xi_2^* - g^*(\xi_2^*)) \\ & \quad + g^*(\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) - (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) \cdot (\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (\xi_1 - \xi_2) \cdot (\xi_1^* - \xi_2^*) + \lambda_1 (g^*(\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) - g^*(\xi_1^*)) \\ & \quad + \lambda_2 (g^*(\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^*) - g^*(\xi_2^*)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим здесь  $\xi_1 = \eta, \xi_2 = \tau, \xi_1^* = \eta^* + \lambda_2(\eta^* - \tau^*), \xi_2^* = \lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*$ . Тогда

$$\lambda_1 \xi_1^* + \lambda_2 \xi_2^* = \eta^*, \quad \xi_1^* - \xi_2^* = \eta^* - \tau^*,$$

и, переходя к новым переменным, получаем

$$\begin{aligned} & \lambda_1 D(\eta, \eta^*) + \lambda_2 D(\tau, \eta^*) \\ & \geq \lambda_1 \lambda_2 (\eta - \tau) \cdot (\eta^* - \tau^*) \\ & \quad + \lambda_1 (g^*(\eta^*) - g^*(\eta^* + \lambda_2(\eta^* - \tau^*))) + \lambda_2 (g^*(\eta^*) - g^*(\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*)) \\ & \geq \lambda_1 \lambda_2 (\eta - \tau) \cdot (\eta^* - \tau^*) - \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поделив обе части (2.8) на  $\lambda_1, \lambda_2$ , получаем (2.6). •

**Следствие 2.1.** Если  $g^*$  соответствует (1.9), то для любых  $\eta, \tau, \eta^*, \tau^* \in \mathbb{R}^n$  верно неравенство

$$\begin{aligned} & (\eta - \tau) \cdot (\eta^* - \tau^*) \\ & \leq \frac{1}{\lambda_2} D(\eta, \eta^*) + \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, \tau^*) \\ & \quad + (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) |\eta^* - \tau^*|^2 + 2|B_{\ominus}^*| |\eta^*| |\eta^* - \tau^*| \\ & \quad + 2\lambda_1 |B_{\ominus}^*| |\eta^* - \tau^*|^2 + |a_1 - a_2| |\eta^* - \tau^*|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$B_{\oplus}^* = \frac{1}{2}(B_1^* + B_2^*), \quad B_{\ominus}^* = \frac{1}{2}(B_1^* - B_2^*).$$

**Доказательство.** Для  $i, j = 1, 2$  и любых  $\xi_1^*, \xi_2^* \in \mathbb{R}^n$  верна оценка

$$\begin{aligned} & |g_i^*(\xi_1^*) - g_j^*(\xi_2^*)| \\ & \leq (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) |\xi_1^* - \xi_2^*| + 2|B_{\ominus}^*| |\xi_2^*| + |a_1 - a_2|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & (\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*) \\ & \leq (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) |\eta^* - \tau^*|^2 \\ & \quad + 2|B_{\ominus}^*| |\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*| |\eta^* - \tau^*| + |a_1 - a_2| |\eta^* - \tau^*|, \end{aligned}$$

где  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  определены также, как в неравенстве (2.6). Так как  $|\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*| \leq |\eta^*| + \lambda_1 |\eta^* - \tau^*|$ , то

$$\begin{aligned} & (\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*) \\ & \leq (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) |\eta^* - \tau^*|^2 + 2|B_{\ominus}^*| |\eta^*| |\eta^* - \tau^*| \\ & \quad + 2\lambda_1 |B_{\ominus}^*| |\eta^* - \tau^*|^2 + |a_1 - a_2| |\eta^* - \tau^*|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь (2.9) следует из (2.6) и (2.11). •

**Утверждение 2.3.** При любых  $\xi^*$ ,  $\xi_1^*$ ,  $\xi_2^* \in \mathbb{R}^n$  и  $\delta \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство

$$\psi^*(\xi_1^* - \xi^*) \leq (1 + \delta^2)\psi^*(\xi_1^* - \xi_2^*) + (1 + \delta^{-2})\theta^2|\xi_2^* - \xi^*|^2, \quad (2.12)$$

где  $\theta = (2\sqrt{2\nu_-})^{-1}$ .

**Доказательство.** Так как для  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$  и  $\delta \in \mathbb{R}$

$$B_i^*(\delta\xi - \eta/\delta) \cdot (\delta\xi - \eta/\delta) = \delta^2 B_i^*\xi \cdot \xi + \frac{1}{\delta^2} B_i^*\eta \cdot \eta - 2B_i^*\xi \cdot \eta \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

то

$$\begin{aligned} & B_i^*(\xi_1^* - \xi^*) \cdot (\xi_1^* - \xi^*) \\ & \leq (1 + \delta^2)B_i^*(\xi_1^* - \xi_2^*) \cdot (\xi_1^* - \xi_2^*) + (1 + \delta^{-2})B_i^*(\xi_2^* - \xi^*) \cdot (\xi_2^* - \xi^*) \\ & \leq (1 + \delta^2)B_i^*(\xi_1^* - \xi_2^*) \cdot (\xi_1^* - \xi_2^*) + \frac{1 + \delta^{-2}}{\nu_-} |\xi_2^* - \xi^*|^2. \end{aligned}$$

Теперь для  $\psi^*(\xi_1^* - \xi^*)$  получаем оценку

$$\begin{aligned} \psi^*(\xi_1^* - \xi^*) &= \min_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{8} B_i^*(\xi_1^* - \xi^*) \cdot (\xi_1^* - \xi^*) \right\} \\ &\leq (1 + \delta^2)\psi^*(\xi_1^* - \xi_2^*) + \frac{1 + \delta^{-2}}{8\nu_-} |\xi_2^* - \xi^*|^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

которая приводит к (2.12). •

**2.2. Представление функций пространства  $Y^*(\Omega)$ .** В пространстве  $Y^*(\Omega)$  определим множество

$$Y_\Lambda^*(\Omega) := \left\{ y^* \in Y^*(\Omega) \mid \exists v \in V_0(\Omega) + u_0 : \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx = 0 \right\},$$

где  $D$  — составной функционал (см. (2.6)) и множество

$$Y_f^*(\Omega) := \left\{ y^* \in Y^*(\Omega) \mid \forall v \in V_0(\Omega) : \int_{\Omega} (y^* \cdot \nabla v - fv) dx = 0 \right\}.$$

Свойства этих множеств устанавливает следующая

**Теорема 2.1.** Множества  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\lambda^*(\Omega)$  представляют собой непустые замкнутые множества в  $Y^*(\Omega)$ , пересечение которых состоит из единственного элемента — решения задачи  $\mathcal{P}^*$ . Для любого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  единственным образом определяются элементы  $y_f^* \in Y_f^*(\Omega)$  и  $y_\lambda^* \in Y_\lambda^*(\Omega)$  такие, что

$$y^* = y_\lambda^* + y_f^*. \quad (2.14)$$

**Доказательство.** Покажем замкнутость  $Y_\lambda^*(\Omega)$ . Пусть  $\{y_m^*\}$  — последовательность в  $Y_\lambda^*(\Omega)$  такая, что  $y_m^* \rightarrow y^*$  в  $Y^*(\Omega)$ . Тогда найдется последовательность  $\{v_m\} \in V_0(\Omega) + u_0$ , для которой

$$\int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v_m) + g^*(y_m^*) - \nabla v_m \cdot y_m^*) dx = 0. \quad (2.15)$$

Используя (1.12), (1.13) и это равенство, получаем, что последовательность  $\{v_m\}$  ограничена в  $V(\Omega)$ . Следовательно, переходя, если требуется, к подпоследовательности, получаем, что  $v_m$  слабо сходится в  $V$  к функции  $v \in V_0(\Omega) + u_0$ . Переходя к пределу в (2.15), с учетом полунепрерывности снизу функционала  $\int_{\Omega} g^{**}(\nabla v_m) dx$  получаем

$$\int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx = \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*) dx \leq 0. \quad (2.16)$$

Вследствие неотрицательности  $D$  неравенство (2.16) означает, что  $y^* \in Y_\lambda^*(\Omega)$ .

Замкнутость  $Y_f^*(\Omega)$  следует непосредственно из определения этого множества.

Покажем, что  $Y_\lambda^*(\Omega) \cap Y_f^*(\Omega) = \{p^*\}$ . Пусть  $y^*$  одновременно принадлежит  $Y_\lambda^*(\Omega)$  и  $Y_f^*(\Omega)$ . Используем следующее тождество

$$\int_{\Omega} D(\nabla w, y^*) = I^{**}(w) - I^*(y^*) + \int_{\Omega} (p^* - y^*) \cdot \nabla(w - u_0) dx, \quad w \in V_0(\Omega) + u_0.$$

Так как  $y^* \in Y_f^*(\Omega)$ , то интеграл в правой части равен нулю и, следовательно,

$$\inf_{w \in V_0(\Omega) + u_0} \int_{\Omega} D(w, y^*) dx = \inf_{w \in V_0(\Omega) + u_0} I^{**}(w) - I^*(y^*) = \inf \mathcal{P}^{**} - I^*(y^*).$$



С другой стороны, поскольку  $y^* \in Y_\Lambda^*(\Omega)$ , то величина инфимума в левой части равна нулю. Тогда  $I^*(y^*) = \inf \mathcal{P}^{**} = \sup \mathcal{P}^*$ , т.е.  $y^*$  является решением двойственной задачи.

Покажем, что для любого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  существует единственное представление в виде  $y_f^* + y_\Lambda^*$ , где  $y_f^* \in Y_f^*(\Omega)$ , а  $y_\Lambda^* \in Y_\Lambda^*(\Omega)$ . Существование  $y_f^*$  и  $y_\Lambda^*$  вытекает из существования минимайзера  $\bar{v}$  вариационной задачи

$$\inf_{v \in V_0(\Omega) + u_0} \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) - y^* \cdot \nabla v + f v) dx,$$

который удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера

$$\int_{\Omega} (y^* - \Lambda \nabla \bar{v}) \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} f w dx, \quad w \in V_0(\Omega).$$

Последнее означает, что  $y^* - \Lambda \nabla \bar{v} \in Y_f^*(\Omega)$ . Так как  $\Lambda \nabla \bar{v} \in Y_\Lambda^*(\Omega)$ , то тем самым существование элементов  $y_f^*$  и  $y_\Lambda^*$  доказано. Установим единственность такого разложения  $y^*$ . Предположим, что в  $Y_f^*(\Omega)$  существуют два различных элемента  $y_{1f}^*$  и  $y_{2f}^*$  такие, что

$$\begin{aligned} y^* - y_{1f}^* &\in Y_\Lambda^*(\Omega), \\ y^* - y_{2f}^* &\in Y_\Lambda^*(\Omega). \end{aligned}$$

Тогда в  $V_0(\Omega) + u_0$  найдутся две функции  $v_1$  и  $v_2$ , для которых

$$\int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v_1) + g^*(y^* - y_{1f}^*)) dx = \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot (y^* - y_{1f}^*) dx, \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v_2) + g^*(y^* - y_{2f}^*)) dx = \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot (y^* - y_{2f}^*) dx. \quad (2.18)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot (y^* - y_{if}^*) dx &= \int_{\Omega} (\nabla v_i \cdot y^* - \nabla u_0 \cdot y_{if}^* - y_{if}^* \cdot \nabla(v_i - u_0)) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v_i \cdot y^* - \nabla u_0 \cdot y_{if}^* - f(v_i - u_0)) dx, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два положительных числа таких, что  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Умножая (2.17) на  $\lambda_1$ , (2.18) на  $\lambda_2$  и учитывая (2.19), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda_1 g^{**}(\nabla v_1) + \lambda_2 g^{**}(\nabla v_2) + \lambda_1 g^*(y^* - y_{1f}^*) + \lambda_2 g^*(y^* - y_{2f}^*)) dx \\ & + \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot (\lambda_1 y_{1f}^* + \lambda_2 y_{2f}^*)) dx + \int_{\Omega} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - u_0) dx \\ & = \int_{\Omega} (\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2) \cdot y^* dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Заметим, что  $\hat{v} := \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_0(\Omega) + u_0$ , а  $\hat{y}^* := \lambda_1 y_{1f}^* + \lambda_2 y_{2f}^* \in Y_f^*(\Omega)$ , так что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - u_0) dx \\ & = \int_{\Omega} (\lambda_1 y_{1f}^* + \lambda_2 y_{2f}^*) \cdot (\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2 - \nabla u_0) dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Функция  $g^{**}$  выпукла, а  $g^*$  строго выпукла. Поэтому

$$\begin{aligned} & \lambda_1 g^*(y^* - y_{1f}^*) + \lambda_2 g^*(y^* - y_{2f}^*) \\ & > g^*(y^* - \lambda_1 y_{1f}^* - \lambda_2 y_{2f}^*) = g^*(y^* - \hat{y}^*), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 g^{**}(\nabla v_1) + \lambda_2 g^{**}(\nabla v_2) \\ & \geq g^{**}(\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2) = g^{**}(\nabla \hat{v}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Теперь из (2.20) — (2.23) следует строгое неравенство

$$\int_{\Omega} (g^{**}(\nabla \hat{v}) + g^*(y^* - \hat{y}^*) - (y^* - \hat{y}^*) \cdot \nabla \hat{v}) dx < 0. \quad (2.24)$$

Однако подинтегральное выражение (2.24) неотрицательно, и мы приходим к противоречию, которое показывает, что исходное предположение о неединственности  $y_f^*$  неверно. Теорема доказана. •

**Замечание 2.3.** При доказательстве теоремы 2.2 конкретный вид функций  $g^*$  и  $g^{**}$  нигде не использовался. Поэтому она носит общий характер и применима

не только к рассматриваемому классу вариационных задач. В частности, если  $g$  и  $g^*$  заданы квадратичными положительно определенными формами (при этом  $g^{**}$  и  $g$  совпадают), то множества  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\Lambda^*(\Omega)$  представляют собой линейные многообразия. Так, например, если  $g(\nabla v) = \frac{1}{2}|\nabla v|^2$ ,  $u_0 = 0$  и  $f = 0$ , то  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\Lambda^*(\Omega)$  соответствуют множеству всех соленоидальных вектор-функций и множеству градиентов всех однозначных функций в  $\Omega$ , обращающихся в нуль на границе. Как хорошо известно, эти два множества являются взаимно ортогональными подпространствами в  $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  (см. [1]).

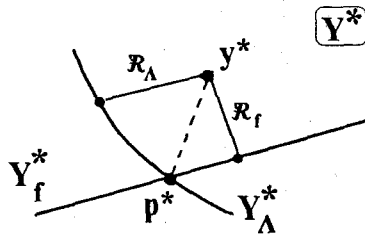
Определим две величины  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  следующими равенствами:

$$\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) := \inf_{v \in V_0(\Omega) + u_0} \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx, \quad (2.25)$$

$$\mathfrak{R}_f^2(y^*) := \inf_{q^* \in Y_f^*(\Omega)} \int_{\Omega} |y^* - q^*|^2 dx. \quad (2.26)$$

Величина  $D(\xi, \xi^*)$  неотрицательна, причем  $D(\xi, \xi^*) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\xi^* = \Lambda \xi$ . Поэтому  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  равно нулю только на функциях множества  $Y_\Lambda^*(\Omega)$ . Действительно, если  $y^*(x) = \Lambda \nabla v(x)$  для п.в.  $x \in \Omega$ , то  $\int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) = 0$ . Пусть, наоборот, для некоторого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  выполнено  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*) = 0$ . Так как функционал  $w \mapsto \int_{\Omega} D(\nabla w, y^*)$  выпукл, непрерывен и коэрцитивен на  $V_0(\Omega) + u_0$ , то найдется элемент  $v \in V_0(\Omega) + u_0$ , реализующий значение инфимума, и, следовательно,  $y^* \in Y_\Lambda^*(\Omega)$ . Ясно также, что  $\mathfrak{R}_f(y^*) = 0$  только для  $y^* \in Y_f^*(\Omega)$ .

Таким образом,  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  можно рассматривать как *меры расстояний* от функции  $y^* \in Y^*(\Omega)$  до множеств  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\Lambda^*(\Omega)$  соответственно (см. рисунок).



Множества  $Y_f^*(\Omega)$  и  $Y_\Lambda^*(\Omega)$ .

### 2.3. Апостериорная оценка. Функционал

$$\Psi^*(y^* - p^*) = \int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx,$$

где  $\psi^*(\xi) = \min_{i=1,2} \{ \frac{1}{8} B_i^* \xi \cdot \xi \}$ , неотрицателен и обращается в нуль при  $y^* = p^*$ . Величина этого функционала характеризует отклонение  $y^*$  от точного решения двойственной задачи. Покажем, что его мажоранта определяется величинами  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$ .

**Теорема 2.2.** Пусть условия (1.3), (1.4) и (1.5) выполнены. Тогда для любого  $y^* \in Y^*(\Omega)$  справедливо неравенство

$$\Psi^*(y^* - p^*) \leq M^*(y^*) := \left[ \sqrt{\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) + \alpha_1 \mathfrak{R}_f^2(y^*) + \alpha_2 \mathfrak{R}_f(y^*) + \alpha_3 \mathfrak{R}_f(y^*)} \right]^2, \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |B_\oplus^*| + |B_\ominus^*|, \\ \alpha_2 &= 2|B_\ominus^*| \cdot \|y_m^*\|_* + |a_1 - a_2|, \\ \alpha_3 &= \theta. \end{aligned}$$

Мажоранта  $M^*$  обладает следующими свойствами:

$$M^*(y^*) = 0 \iff y^* = p^*, \quad (2.28)$$

$$M^*(y_m^*) \rightarrow 0, \text{ если } \|y_m^* - p^*\|_* \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

**Доказательство.** Пусть  $q^* \in Y_f^*(\Omega)$ , тогда вследствие (2.5) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi^*(q^* - p^*) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} g^*(q^*) + \frac{1}{2} g^*(p^*) - g^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right) \right) dx \\ & = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (g^*(q^*) - \nabla u_0 \cdot q^*) + \frac{1}{2} (g^*(p^*) - \nabla u_0 \cdot p^*) \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \nabla u_0 \cdot (p^* + q^*) - g^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right) \right) dx \\ & = I^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right) - \frac{1}{2} I^*(p^*) - \frac{1}{2} I^*(q^*). \end{aligned}$$

Поскольку

$$I^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right) \leq I^*(p^*),$$

это неравенство приводит к оценке

$$\int_{\Omega} \psi^*(q^* - p^*) dx \leq \frac{1}{2} [I^*(p^*) - I^*(q^*)]. \quad (2.30)$$

Для оценки левой части (2.30) используем неравенство (2.12). Из (2.30) следует, что

$$\int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx \leq \frac{1 + \delta^2}{2} [I^*(p^*) - I^*(q^*)] + (1 + \delta^{-2})\theta^2 \|y^* - q^*\|_*^2, \quad (2.31)$$

где  $y^* \in Y^*(\Omega)$ . Поскольку

$$I^{**}(v) \geq I^*(p^*), \quad v \in V_0(\Omega) + u_0,$$

то (2.31) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx \leq \frac{1 + \delta^2}{2} [I^{**}(v) - I^*(q^*)] + (1 + \delta^{-2})\theta^2 \|y^* - q^*\|_*^2. \quad (2.32)$$

Оценка (2.32) справедлива для любых  $v \in V_0(\Omega) + u_0$ ,  $q^* \in Y_f^*(\Omega)$  и  $\delta \in \mathbb{R}$ . Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.32).

$$\begin{aligned} I^{**}(v) - I^*(q^*) &= \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - f(v - u_0) - y^* \cdot \nabla u_0) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (g^*(q^*) - g^*(y^*) + \nabla u_0 \cdot (y^* - q^*)) dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поскольку  $q^* \in Y_f^*(\Omega)$ , то

$$\int_{\Omega} q^* \cdot \nabla(v - u_0) dx = \int_{\Omega} f(v - u_0) dx,$$

и равенство (2.33) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 I^{**}(v) - I^*(q^*) &= \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot (y^* - q^*) dx + \int_{\Omega} (g^*(q^*) - g^*(y^*)) dx. \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (g^*(q^*) - g^*(y^*)) dx &\leq \int_{\Omega} \eta \cdot (q^* - y^*) dx \\
 &= \int_{\Omega} (\eta - \tau) \cdot (q^* - y^*) dx + \int_{\Omega} \tau \cdot (q^* - y^*) dx, \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

где  $\eta \in \partial g^*(q^*)$ , а  $\tau \in \partial g^*(y^*)$ . Теперь (2.34) и (2.35) приводят к оценке

$$\begin{aligned}
 I^{**}(v) - I^*(q^*) &\leq \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx + \int_{\Omega} (\nabla v - \tau) \cdot (y^* - q^*) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\eta - \tau) \cdot (q^* - y^*) dx. \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого используем (2.9).

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} (\nabla v - \tau) \cdot (y^* - q^*) dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\lambda_2} D(\nabla v, y^*) + \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, y^*) \right) dx + (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) \|y^* - q^*\|_*^2 \\
 &\quad + 2|B_{\ominus}^*| \|y^*\|_* \|y^* - q^*\|_{2,\Omega} + 2\lambda_1 |B_{\oplus}^*| \|y^* - q^*\|_*^2 \\
 &\quad + |a_1 - a_2| \|y^* - q^*\|_*. \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Используя (2.10) и то, что  $\tau \in \partial g^*(y^*)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 I^{**}(v) - I^*(q^*) &\leq \int_{\Omega} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_2} \right) D(\nabla v, y^*) dx + 2(|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) \|y^* - q^*\|_*^2 \\
 &\quad + 4|B_{\ominus}^*| \|y^*\|_* \|y^* - q^*\|_* + 2(1 - \lambda_2) |B_{\oplus}^*| \|y^* - q^*\|_*^2 \\
 &\quad + 2|a_1 - a_2| \|y^* - q^*\|_*. \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Теперь из (2.33) и (2.38) при  $\lambda_2 \rightarrow 1$  следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx \\ & \leq (1 + \delta^2) \left[ \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx + (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) \|y^* - q^*\|_*^2 \right. \\ & \quad \left. + 2|B_{\ominus}^*| \|y^*\|_* \|y^* - q^*\|_* + |a_1 - a_2| \|y^* - q^*\|_* \right] \\ & \quad + (1 + \delta^{-2}) \theta^2 \|y^* - q^*\|_*^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Неравенство (2.39) верно для любого  $v \in V_0(\Omega) + u_0$  и любого  $q^* \in Y_f^*$ . Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx \\ & \leq (1 + \delta^2) \inf_{v \in V_0(\Omega) + u_0} \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx \\ & \quad + \inf_{q^* \in Y_f^*} \{ (1 + \delta^2) [(|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) \|y^* - q^*\|_*^2 \\ & \quad + 2|B_{\ominus}^*| \cdot \|y^*\|_* \cdot \|y^* - q^*\|_* \\ & \quad + |a_1 - a_2| \cdot \|y^* - q^*\|_*] + (1 + \delta^{-2}) \theta^2 \|y^* - q^*\|_*^2 \}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi^*(y^* - p^*) dx \\ & \leq (1 + \delta^2) [\mathfrak{R}_{\Lambda}^2(y^*) + (|B_{\oplus}^*| + |B_{\ominus}^*|) \mathfrak{R}_f^2(y^*) \\ & \quad + 2|B_{\ominus}^*| \cdot \|y^*\|_* \mathfrak{R}_f(y^*) + |a_1 - a_2| \mathfrak{R}_f(y^*)] \\ & \quad + (1 + \delta^{-2}) \theta^2 \mathfrak{R}_f^2(y^*), \end{aligned} \quad (2.41)$$

что после вычисления инфимума по  $\delta$  дает (2.27).

Как следует из теоремы 2.1,  $\mathfrak{R}_{\Lambda}(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  равны нулю тогда и только тогда, когда  $y^* = p^*$ . Поэтому  $M^*(y^*) = 0$  только, если  $y^* = p^*$ , и (2.28) выполнено.

Покажем справедливость (2.29). Пусть  $\{y_m^*\}$  — последовательность, сходящаяся к  $p^*$  в  $Y^*(\Omega)$ . Так как  $\mathfrak{R}_f(y_m^*) \leq \|y_m^* - p^*\|_*$ , то  $\mathfrak{R}_f(y_m^*) \rightarrow 0$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\Lambda^2(y_m^*) &= \inf_{v \in V_0(\Omega) + u_0} \int_{\Omega} D(\nabla v, y_m^*) dx \\ &\leq \int_{\Omega} D(\nabla u, y_m^*) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} D(\nabla u, p^*) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

то  $\mathfrak{R}_\Lambda(y_m^*)$  также стремится к нулю. Таким образом, (2.29) следует из (2.27). •

**Замечание 2.4.** Если  $A_1 = A_2 = A$ , то  $B_1^* = B_2^* = B^*$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $B_\oplus^* = B^*$ ,  $B_\ominus^*$  — нулевая матрица и в оценке (2.27) следует положить

$$\alpha_1 = |B^*|, \quad \alpha_2 = |a_1 - a_2|, \quad \alpha_3 = \theta.$$

§3. Мажоранты величин  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  и  $\mathfrak{R}_f(y^*)$

**3.1. Оценка  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ .** Верхняя граница величины  $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$  строится достаточно просто. Согласно определению (см. (2.25)),

$$\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) \leq \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx, \quad v \in V_0(\Omega) + u_0. \quad (3.1)$$

Покажем, что если  $\{v_m\}$  — минимизирующая последовательность в задаче  $\mathcal{P}^{**}$ , а последовательность  $\{y_m^*\}$  сходится к  $p^*$  в  $Y^*(\Omega)$ , то

$$\int_{\Omega} D(v_m, y_m^*) dx \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Для этого преобразуем правую часть (3.1).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx &= \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*) dx \\ &= \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) - f v) dx - \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot y^* - g^*(y^*) - f u_0) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} f(v - u_0) dx - \int_{\Omega} \nabla(v - u_0) \cdot y^* dx \\ &= \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) - f v) dx - \inf \mathcal{P}^{**} + I^*(p^*) \\ &\quad + \int_{\Omega} (p^* - y^*) \cdot \nabla(v - u_0) dx - \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot y^* - g^*(y^*) - f u_0) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$



Поэтому для любых  $v \in V_0(\Omega) + u_0$  и  $y^* \in Y^*(\Omega)$  выполняется тождество

$$\int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx = I^{**}(v) - \inf \mathcal{P}^{**} + \int_{\Omega} (g^*(y^*) - g^*(p^*) + (p^* - y^*) \cdot \nabla v) dx. \quad (3.4)$$

Положим здесь  $v = v_m$ ,  $y^* = y_m^*$ . При этом  $I^{**}(v_m) \rightarrow \inf \mathcal{P}^{**}$ , последовательности  $\{\nabla v_m\}$  и  $\{y_m^*\}$  ограничены в  $Y^*(\Omega)$ . Так как

$$\begin{aligned} g^*(y_m^*) - g^*(p^*) &\leq \max_{i=1,2} \{g_i^*(y_m^*) - g_i^*(p^*)\} \\ &= \max_{i=1,2} \left\{ \left( \frac{1}{2} B_i^*(y_m^* + p^*) + a_i \right) \cdot (y_m^* - p^*) \right\} \\ &= \max_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{2} B_i^*(y_m^* - p^*) \cdot (y_m^* - p^*) + (B_i^* p^* + a_i) \cdot (y_m^* - p^*) \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

то разность  $g^*(y_m^*) - g^*(p^*)$  может быть оценена через  $|y_m^* - p^*|$ . Поэтому правая часть (3.4) стремится к нулю, что дает (3.2).

**3.2. Оценка  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  для  $y^* \in Y^*(\Omega)$ .** Определим величину

$$\|\operatorname{div} y^* + f\|_{-1} = \sup_{\substack{w \in V_0(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} (\nabla w \cdot y^* - fw) dx}{(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx)^{1/2}}, \quad (3.6)$$

которая представляет собой норму в пространстве  $H^{-1}$ , топологически сопряженном к  $V_0(\Omega)$ . Покажем, что

$$\mathfrak{R}_f(y^*) \leq \|\operatorname{div} y^* + f\|_{-1}. \quad (3.7)$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{2} \mathfrak{R}_f^2(y^*) = \inf_{q^* \in Y_f^*(\Omega)} \frac{1}{2} \|q^* - y^*\|_*^2 = \inf_{q^* \in Y_f^*(\Omega)} \sup_{w \in V_0(\Omega)} \mathcal{L}(w, q^*),$$

где

$$\mathcal{L}(w, q^*) = \int_{\Omega} \left( \nabla w \cdot q^* - fw + \frac{1}{2} |q^* - y^*|^2 \right) dx.$$

Лагранжиан  $\mathcal{L}$  определен на множестве  $V_0(\Omega) \times Y^*(\Omega)$ , причем функция  $w \mapsto \mathcal{L}(w, q^*)$  линейна при любом  $q^* \in Y^*(\Omega)$ , а функция  $q^* \mapsto \mathcal{L}(w, q^*)$  выпукла и непрерывна при любом  $w \in V_0(\Omega)$ . Кроме того,  $\mathcal{L}(0, q_k^*) \rightarrow +\infty$  для любой последовательности  $\{q_k^*\}$  такой, что  $\|q_k^*\|_* \rightarrow +\infty$ . Поэтому, используя известные в теории минимаксных задач теоремы (см., например, [17]), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathfrak{R}_f^2(y^*) &= \inf_{q^* \in Y^*(\Omega)} \sup_{w \in V_0(\Omega)} \mathcal{L}(w, q^*) \\ &= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \inf_{q^* \in Y^*(\Omega)} \int_{\Omega} \left( \nabla w \cdot (\eta^* + y^*) - fw + \frac{1}{2} |\eta^*|^2 \right) dx \\ &= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \left[ - \sup_{q^* \in Y^*(\Omega)} \int_{\Omega} \left( -\nabla w \cdot q^* - \frac{1}{2} |q^*|^2 \right) dx + \int_{\Omega} (\nabla w \cdot y^* - fw) dx \right] \\ &= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \nabla w \cdot y^* - fw \right) dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot y^* - fw) dx \leq \| \operatorname{div} y^* + f \|_{-1} \| \nabla w \|_*, \quad w \in V_0(\Omega),$$

то

$$\frac{1}{2} \mathfrak{R}_f^2(y^*) \leq \sup_{w \in V_0(\Omega)} \left( \| \operatorname{div} y^* + f \|_{-1} \| \nabla w \|_* - \frac{1}{2} \| \nabla w \|_*^2 \right) \leq \frac{1}{2} \| \operatorname{div} y^* + f \|_{-1}^2.$$

Таким образом, если  $y^*$  — произвольный элемент  $Y^*(\Omega)$ , то определение  $\mathfrak{R}_f(y^*)$  связано с вычислением нормы невязки уравнения  $\operatorname{div} y^* + f$  в пространстве  $H^{-1}$ . В общем случае эта задача является весьма сложной, хотя для некоторых типов аппроксимаций соответствующие методы известны (см., например, [32]).

### 3.3. Оценка $\mathfrak{R}_f(y^*)$ для $y^* \in Q^*(\Omega)$ . Пусть

$$y^* \in Q^*(\Omega) := \{y^* \in Y^*(\Omega) \mid \operatorname{div} y^* \in L_2(\Omega)\}.$$

Множество  $Q^*(\Omega)$  образует линейное подпространство в  $Y^*(\Omega)$ . Оно всюду плотно в  $Y^*(\Omega)$  и само является банаховым пространством относительно нормы

$$\|y^*\|_{Q^*} := \left( \int_{\Omega} (|y^*|^2 + |\operatorname{div} y^*|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Если  $y^* \in Q^*(\Omega)$ , то

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (y^* \cdot \nabla w - fw) dx \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} y^* w + fw) dx \leq C_{\Omega} \|\operatorname{div} y^* + f\| \|\nabla w\|_*, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $C_{\Omega}$  — постоянная в неравенстве Фридрихса—Пуанкаре, а  $\|\cdot\|$  обозначает норму в пространстве  $L_2(\Omega)$ . В этом случае из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\mathfrak{A}_f(y^*) \leq C_{\Omega} \|\operatorname{div} y^* + f\|. \quad (3.9)$$

Таким образом, для  $y^* \in Q^*(\Omega)$  величина  $\mathfrak{A}_f(y^*)$  пропорциональна  $L_2$ -норме невязки уравнения  $\operatorname{div} y^* + f = 0$ .

**Замечание 3.1.** Точное значение  $C_{\Omega}$  в (3.9) можно заменить на оценку сверху. В ряде случаев, например для задачи с условиями Дирихле, такая оценка  $C_{\Omega}$  может быть легко построена (см., например, [5]). Другой способ получения оценок  $C_{\Omega}$  следует из мультипликативных неравенств (см. [2]).

#### §4. Построение последовательности, сходящейся к решению задачи $\mathcal{P}^*$

Задача  $\mathcal{P}^{**}$  связана с минимизацией выпуклого дифференцируемого функционала, поэтому последовательность  $\{u_m\}$  такая, что

$$I^{**}(u_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \inf \mathcal{P}^{**}, \quad (4.1)$$

может быть построена при помощи хорошо известных методов. Для этого надо задать последовательность конечномерных аффинных множеств  $\{V_m(\Omega)\} \subset V_0(\Omega) + u_0$ , размерность которых стремится к  $+\infty$  при  $m \rightarrow +\infty$ , и таких, что для любого  $v \in V_0(\Omega) + u_0$

$$\inf_{w \in V_m(\Omega)} \|w - v\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.2)$$

Решая на  $\{V_m\}$  конечномерные задачи, получим минимизирующую последовательность  $\{u_m\}$ . Сама эта последовательность может и не сходитьсся ни к какому элементу  $V_0(\Omega) + u_0$ , однако, как показано ниже, используя функции  $u_m$ ,

можно построить последовательность  $\{y_m^*\} \in Q^*(\Omega)$ , сходящуюся к  $p^*$  по норме  $Q^*(\Omega)$ , и оценить норму разности  $y_m^* - p^*$ .

Пусть  $\lambda$  — вещественное число из интервала  $(0, 1)$ , а  $v$  — некоторая функция из множества  $V_0(\Omega) + u_0$ . На элементах множества  $Q^*(\Omega)$  зададим функционал

$$G^*(\lambda, v; y^*) := \lambda \int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div} y^* + f|^2 dx. \quad (4.3)$$

Пусть  $\{Q_m^*(\Omega)\}$  — последовательность конечномерных подпространств, вложенных в  $Q^*(\Omega)$ , и таких, что для любой функции  $y^* \in Q^*(\Omega)$

$$\inf_{q^* \in Q_m^*(\Omega)} \|q^* - y^*\|_{Q^*} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.4)$$

Определим  $y_{\lambda m}^*$ , как минимайзер следующей вариационной проблемы.

**Задача  $\mathcal{P}_{\lambda m}^*$ .** Найти  $y_{\lambda m}^* \in Q_m^*(\Omega)$  такой, что

$$G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) = \inf_{y^* \in Q_m^*(\Omega)} G^*(\lambda, u_m; y^*). \quad (4.5)$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $u_m$  — минимизирующая последовательность в задаче  $\mathcal{P}^{**}$ , а  $\lambda$  — число из интервала  $(0, 1)$ . Тогда при любом  $m$  существует единственное решение  $y_{\lambda m}^*$  задачи  $\mathcal{P}_{\lambda m}^*$ . Для последовательности  $y_{\lambda m}^*$  выполняются предельные соотношения

$$\int_{\Omega} D(\nabla u_m, y_{\lambda m}^*) dx \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

$$y_{\lambda m}^* \rightarrow p^* \text{ в } Q^*(\Omega), \quad (4.7)$$

и имеет место оценка

$$\Psi^*(y_{\lambda m}^* - p^*) \leq M_m^*, \quad (4.8)$$

где числовая последовательность  $M_m^*$  определяется равенствами

$$M_m^* := \left( \sqrt{\rho_{\lambda m}^2 + \alpha_1 \rho_{f m}^2 + \alpha_2 \rho_{f m} + \alpha_3 \rho_{f m}} \right)^2, \quad (4.9)$$

$$\rho_{\lambda m}^2 = \int_{\Omega} D(\nabla u_m, y_m^*) dx, \quad \rho_{f m}^2 = C_{\Omega}^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div} y_m^* + f|^2 dx \quad (4.10)$$

и стремится к нулю при  $m \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** Используя (1.12), нетрудно установить, что

$$\int_{\Omega} D(\nabla v, y^*) dx \geq \frac{1}{4\mu_+} \|y^*\|_*^2 - \bar{\gamma}_1 + \int_{\Omega} g^{**}(\nabla v) dx - \mu_+ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Поэтому

$$G^*(\lambda, v; y^*) \geq \frac{\lambda}{4\mu_+} \|y^*\|_*^2 + \frac{1-\lambda}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} y^*|^2 dx + c_0(\lambda, v), \quad (4.11)$$

где

$$c_0(\lambda, v) = \lambda \int_{\Omega} (g^{**}(\nabla v) - \mu_+ |\nabla v|^2) dx - \lambda \bar{\gamma}_1 - (1-\lambda) \int_{\Omega} |f|^2 dx, \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 \operatorname{meas} \Omega.$$

Это неравенство показывает, что функционал  $G^*(\lambda, v; \cdot)$  коэрцитивен на пространстве  $Q^*(\Omega)$ . Кроме того,  $G^*(\lambda, v; \cdot)$  является непрерывным и строго выпуклым на  $Q^*(\Omega)$ . Поэтому при любом  $v \in V_0(\Omega) + u_0$  существует единственный минимайзер этого функционала на всяком выпуклом замкнутом подмножестве в  $Q^*(\Omega)$ .

В силу (3.1) и (3.9)

$$\mathfrak{R}_{\lambda}(y_m^*) \leq \rho_{\Lambda m}, \quad \mathfrak{R}_f(y_m^*) \leq \rho_{f m},$$

поэтому при любом  $m$

$$M^*(y_m^*) \leq M_m^*. \quad (4.12)$$

Обозначим  $\pi_m : Y^*(\Omega) \rightarrow Q_m^*(\Omega)$  — ортогональный проектор на подпространство  $Q_m^*(\Omega)$ , так что

$$\|\pi_m y^*\|_{Q^*} = \inf_{q^* \in Q_m^*} \|q^* - y^*\|_{Q^*}.$$

Поскольку  $y_{\lambda m}^*$  является минимайзером задачи  $\mathcal{P}_{\lambda m}^*$ , а  $\pi_m p^* \in Q_m^*(\Omega)$ , то

$$\begin{aligned} G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) &\leq G^*(\lambda, u_m; \pi_m p^*) \\ &= \lambda \int_{\Omega} D(\nabla u_m, \pi_m p^*) dx + (1-\lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\pi_m p^*) + f|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

При помощи тождества (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
 G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) & \leq \lambda (I^{**}(u_m) - \inf \mathcal{P}^{**}) + \lambda \int_{\Omega} (g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*) + (p^* - \pi_m p^*) \cdot \nabla u_m) dx \\
 & + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\pi_m p^* - p^*)|^2 dx. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Оценивая разность  $g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*)$  тем же способом, что и в (3.5), имеем

$$\begin{aligned}
 |g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*)| & \leq \left| \max_{i=1,2} \left\{ \left( \frac{1}{2} B_i^* (\pi_m p^* - p^*) \cdot (\pi_m p^* - p^*) + (B_i^* p^* + a_i) \cdot (\pi_m p^* - p^*) \right) \right\} \right| \\
 & \leq \frac{1}{2\nu_-} |\pi_m p^* - p^*|^2 + |B_i^* p^* + a_i| \cdot |\pi_m p^* - p^*|.
 \end{aligned}$$

Вследствие (4.4)  $\|\pi_m p^* - p^*\|_{Q^0} \rightarrow 0$ , поэтому правая часть (4.14) стремится к нулю и

$$G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) = \lambda \int_{\Omega} D(\nabla u_m, y_{\lambda m}^*) dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div} y_{\lambda m}^* + f|^2 dx \rightarrow 0. \tag{4.15}$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} D(\nabla u_m, y_{\lambda m}^*) dx \rightarrow 0 \tag{4.16}$$

и

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div}(y_{\lambda m}^* - p^*)|^2 dx \rightarrow 0. \tag{4.17}$$

Соотношения (4.16) и (4.17) показывают, что

$$\rho_{\lambda m} \rightarrow 0, \quad \rho_{f m} \rightarrow 0. \tag{4.18}$$

Теперь из теоремы 2.2 и из (4.9), (4.12), (4.18) вытекает, что

$$\Psi^*(y_{\lambda m}^* - p^*) \leq M_m^* \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

Так как

$$\Psi(y_{\lambda m}^* - p^*) \geq \gamma_3 \int_{\Omega} |y_{\lambda m}^* - p^*|^2 dx, \quad (4.20)$$

где  $\gamma_3 = \frac{1}{8} \min\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}\}$ , то из этой оценки и (4.17), (4.19) следует (4.7). •

**Замечание 4.1.** Так как гладкие функции плотны в пространстве  $Q^*(\Omega)$ , то соответствующую последовательность подпространств  $Q_m^*(\Omega)$ , удовлетворяющих условию (4.4), легко построить при помощи кусочно-аффинных непрерывных функций.

Теорема 4.1 показывает, что для построения элементов последовательности  $y_m^*$ , сходящейся к  $p^*$ , надо для каждого  $m$  решить задачи минимизации выпуклых функционалов квадратичного роста  $I^{**}$  и  $G^*$  на конечномерных множествах  $\{V_m(\Omega)\} \subset V_0(\Omega) + u_0$  и  $\{Q_m^*(\Omega)\} \subset Q^*(\Omega)$ . При этом норма разности  $y_m^* - p^*$  контролируется мажорантой  $M^*(y_m^*)$ , которая стремится к нулю при  $m \rightarrow +\infty$ . Поэтому при любом  $\varepsilon > 0$  аппроксимация  $y_\varepsilon^*$  такая, что  $\|y_\varepsilon^* - p^*\|_* \leq \varepsilon$ , будет построена за конечное число шагов.

#### Список литературы

- [1] Ладыженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-ое изд., перераб., Наука, М., 1973.
- [3] Михлин С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, 2-ое изд., перераб. и доп., Наука, М., 1970.
- [4] Мосолов П. П., Мясников В. П., *Механика жесткопластических сред*, Наука, М., 1981.
- [5] Репин С. И., *Апостериорные оценки погрешности приближенных решений вариационных задач с сильно выпуклыми функционалами*, Пробл. мат. анализ, вып. 17, СПбГУ, СПб., 1997, сс. 199–226.
- [6] Серегин Г. А., *О регулярности решений вариационных задач теории фазовых переходов в упругом теле*, Алгебра и анализ 7 (1995), № 6, 153–187.
- [7] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.
- [8] Ainsworth M., Oden J. T., *A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods*, Numer. Math. 65 (1993), no. 1, 23–50.
- [9] Aubin J. P., Burchard H. G., *Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems*, Numerical Solution of Partial Differential Equations, II (SYNSPADE 1970)

- (Proc. Sympos., Univ. Maryland, College Park, 1970), Academic Press, New York, 1971, pp. 1-67.
- [10] Babushka I., Rheinboldt W. C., *Error estimates for adaptive finite element computations*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), no. 4, 736-754.
- [11] Ball J. M., James R. D., *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rational Mech. Anal. **100** (1987), no. 1, 13-52.
- [12] Bauman P., Phillips D., *A nonconvex variational problem related to change of phase*, Appl. Math. Optim. **21** (1990), 113-138.
- [13] Carstensen C., Plecháč P., *Numerical solution of the scalar double-well problem allowing microstructure*, Math. Comp. **66** (1997), 997-1026.
- [14] Chipot M., *Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems*, Numer. Math. **59** (1991), 747-767.
- [15] Ciarlet P., *The finite element method for elliptic problems*, Stud. Math. Appl., vol. 4, North-Holland, Amsterdam etc., 1978.
- [16] Collins Ch., Luskin M., *Optimal-order error estimates for the finite element approximation of the solution of a nonconvex variational problem*, Math. Comp. **57** (1991), no. 196, 621-637.
- [17] Ekeland I., Temam R., *Convex analysis and variational problems*, Stud. Math. Appl., vol. 1, North-Holland, Amsterdam-Oxford, 1976.
- [18] French D. A., *On the convergence of finite-element approximations of a relaxed variational problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), no. 2, 419-436.
- [19] Glowinski R., *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.
- [20] Goodman J., Kohn R. V., Reyna L., *Numerical study of a relaxed variational problem from optimal design*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **57** (1986), 107-127.
- [21] Gurtin M. E., Temam R., *On the antiplane shear problem in finite elasticity*, J. Elasticity **11** (1981), 197-206.
- [22] Johnson C., Hansbo P., *Adaptive finite element methods in computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **101** (1992), 143-181.
- [23] Kelly D. W., *The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **20** (1984), no. 1, 1491-1506.
- [24] Kohn R. V., *The relaxation of a double-well energy*, Contin. Mech. Thermodyn. **3** (1991), no. 3, 193-236.
- [25] Ladevèze P., Leguillon D., *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), no. 3, 485-509.
- [26] Lur'e K. A., Cherkaev A. V., *On a certain variational problem of phase equilibrium*, Material Instabilities in Continuum Mechanics (Edinburgh, 1985-1986), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1988, pp. 257-268.
- [27] Pipkin A. C., *Elastic materials with two preferred states*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **44** (1991), 1-15.
- [28] Pousin J., Rappaz J., *Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov-Galerkin methods applied to nonlinear problems*, Numer. Math. **69** (1994), no. 2, 213-231.
- [29] Repin S., *A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory*, Зап. науч. семин. ПОМИ **243** (1997), 201-214.



- [30] Repin S. I., *A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growth functionals*, Зап. науч. семин. ПОМИ 249 (1997), 244-255.
- [31] Repin S. I., *A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals*, Math. Comp. (в печати).
- [32] Repin S. I., *A posteriori error estimates for the Stokes problem*, Зап. науч. семин. ПОМИ 259 (в печати).
- [33] Verfürth R., *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, John Wiley and Sons, Chichester; Teubner, Stuttgart, 1996.
- [34] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 24 (1987), 337-357.

С.-Петербургский государственный  
технический университет

Поступило 16 июня 1998 г.