УДК 514.762.5

СВЯЗНОСТИ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Б. Н. Шапуков

Современная трактовка понятия связности, берущая свое начало в работах В. В. Вагнера [8], [9] и Эресмана [112], использует конструкцию расслоенного пространства. Параллельное перенесение слоев, если речь идет об инфинитезимальной связности, достигается заданием дифференцируемого распределения в пространстве расслоения, трансверсального к слоям (горизонтальное распределение). В расслоениях со структурной группой на это распределение обычно накладывается еще условие инвариантности. Обстоятельный обзор работ по теории связностей в расслоенных пространствах до 1970 г. сделан Ю. Г. Лумисте [35]. Различные вопросы теории связностей затем неоднократно освещались в «Проблемах геометрии». Состояние теории на 1979 г. отражено в обзоре [13].

Рассматривая расслоенные многообразия, следует иметь в виду и еще один аспект теории связностей. Речь идет о связностях, заданных на пространстве расслоения. Мы будем называть их внешними в отличие от внутренних, упомянутых выше. Необходимость рассмотрения наряду с внутренней также и внешней связности часто появляется естественным образом. Например, при изучении расслоений римановых многообразий внешней является связность, порождаемая заданной метрикой. Аналогичная ситуация возникает на касательных расслоениях многообразий с линейной связностью. Последняя определяет не только внутреннюю связность этого расслоения, но и некоторую внешнюю связность, получаемую с помощью полного лифта базовой связности. Более общий пример представляют собой пространства опорных элементов. Отсчет здесь следует вести от работ П. Финслера, Л. Бервальда, Э. Картана и др. Последующее развитие этого направления в работах Б. Л. Лаптева [32], [33] и В. И. Близникаса [3] — [5] привело к созданию теории связностей пространств опорных элементов, построенной путем естественного обобщения операции ковариантного дифференцирования в «точечном» пространстве. Состояние этой теории на 1967 г. зафиксировано в обзоре В. И. Близникаса [6]. В свете всего вышесказанного возникает задача развития теории внешних связностей на дифференцируемых расслоениях общего вида. Реализации такого подхода посвящена работа автора [77]. Он же взят за основу и настоящего обзора. Это позволяет с единой точки зрения подойти к понятию связности на расслоениях различных специальных типов, обладающих дополнительными структурами. Редукция внешней связности к заданной структуре дает возможность выделять специальные их классы.

В соответствии с этим мы излагаем сначала некоторые вопросы теории внешних связностей на дифференцируемых расслоениях. При этом структурная группа расслоения не фиксируется. Другими словами, ею является группа всех диффеоморфизмов типового слоя. В § 2 дополнительно предполагается, что в расслоении задана внутренняя инфинитезимальная связность. В § 3 мы демонстрируем применение общего подхода к теории внешних связностей на примере векторных и тензорных расслоений. Некоторые другие типы расслоений рассмотрены в § 4, который имеет в основном обзорный характер. Чтобы остаться при этом в разумных рамках, мы не затрагивали теории внешних связностей на касательных расслоениях и в финслеровых пространствах, а также вопросов, связанных с теорией автоморфизмов связностей на расслоениях, поскольку соответствующие работы отражены в недавних обзорах А. П. Широкова [88], И. П. Егорова [23].

§ 1. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ И СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Мы будем рассматривать дифференцируемое класса C^∞ расслоение $(m+n)$-мерного многообразия E над m-мерной базой M, определяемое субмерсией $p: E\to M$. Предполагается его локальная тривиальность. Для $\hat{x}\in M$ слои $p^{-1}(\hat{x})\subset E$ есть n-мерные подмногообразия, являющиеся классами эквивалентности по отношению $x\sim y \Leftrightarrow p(x)=p(y)$. Дифференциал проекции p_*: $TE\to TM$ определяет морфизм касательных расслоений и возникает вертикальное подрасслоение $VE=\operatorname{Ker} p_*\subset TE$ такое, что распределение $x\to V_x$ инволютивно. Это значит, что подмодуль вертикальных векторных полей, т. е. сечений расслоения $VE\to E$, является подалгеброй Ли $V\mathfrak{X}(E)\subset\mathfrak{X}(E)$. С двойственной точки зрения мы имеем морфизм p^*: $T^*M\to T^*E$, определяемый кодифференциалом проекции, и подрасслоение горизонтальных 1-форм (ковекторов) $H^*E=\operatorname{Im} p^*\subset T^*E$, обращающихся в нуль на VE. Система $x\to H_x{}^*$ вполне интегрируема, а слои являются ее интегральными подмногообразиями.

Наличие указанных подрасслоений имеет существенные последствия. В касательных пространствах T_x, $x\in E$, выделяется подгруппа Ли $L\subset GL(m+n, R)$, для которой V_x являются инвариантными подпространствами. В $T_x{}^*$ действует ее контраградиентное представление с инвариантным подпространством $H_x{}^*$.

Вследствие этого для всякого тензорного расслоения $T_q{}^p(E)=$ $=\otimes^q T^*E\otimes^p TE$ над E возникают инвариантные относительно действия L подрасслоения вида $\otimes^q H^*E\otimes^p VE$ (с точностью до порядка сомножителей), сечения которых будем называть L-тензорами. Заметим, что в VE действует группа $GL(n)$ — сужение L на этом подрасслоении, а в H^*E контрагредиентно действует группа $GL(m)$. Поэтому L-тензоры преобразуются по тензорному представлению группы $GL(m)\times GL(n)$ соответствующего типа и являются связующими тензорами.

Более общим является следующее понятие. Рассматривая тензорное поле на E как полилинейную форму $T(X_1,\dots,X_q,$ $\xi^1,\dots,\xi^p)$ на модулях векторных и ковекторных полей, мы скажем, что оно горизонтально по векторному аргументу X_s, если $T=0$, как только этот аргумент вертикален. Аналогично, тензорное поле вертикально по ковекторному аргументу ξ^s, если $T=0$, как только это ковекторное поле горизонтально. Вместо этой несколько громоздкой терминологии можно говорить о тензорном поле, полубазовом по данному аргументу. Введенному классу тензоров можно дать также следующую интерпретацию. Рассмотрим для простоты ковариантный тензор T типа $(0,\ q)$ и определяемый им морфизм $TE\times\dots\times\hat{T}_1E\times\dots$ $\dots\times TE\to T^*E$ (крышка означает, что пропущен s-й сомножитель). Тогда T горизонтален по s-му аргументу тогда и только тогда, когда образ отображения принадлежит H^*E. Ясно, что тензоры указанного типа образуют L-подмодули в модуле $\mathfrak{X}_q{}^p(E)$ всех тензорных полей. В частности, L-тензоры — это тензоры, полубазовые по всем своим аргументам.

Рассмотрим расслоение реперов $\mathscr{R}(E)$. Репер (x, e_A), $A=$ $=1,\dots,m+n$, назовем допустимым, если $e_\alpha(x)\in V_x$, $\alpha=m+1,\dots$ $\dots,m+n$. Возникает главное подрасслоение $\mathscr{R}(E,L)$ допустимых реперов, определяемое интегрируемой L-структурой. Ему двойственно подрасслоение допустимых корепероов (x,θ^A), для которых $\theta^i(x)\in H_x{}^*$, $i=1,\dots,m$. Подгруппа L представляется теперь группой квазитреугольных матриц

$$f=\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $f_1\in GL(m)$, $f_2\in GL(n)$. Блок f_3^{-1} обратной матрицы однозначно определяется соотношением $f_3f_1^{-1}+f_2f_3^{-1}=0$.

Выбрав в окрестности $U\subset E$ поле допустимых реперов, рассмотрим уравнения структуры

$$[e_Ae_B]=R^C_{AB}e_C \tag{1.2}$$

или двойственные им уравнения

$$d\theta^C=-\frac{1}{2}R^C_{AB}\theta^A\wedge\theta^B. \tag{1.2$'$}$$

Из них следует, что указанные поля характеризуются свойством $R^i_{\alpha\beta}=0$, инвариантным относительно группы L. Выделенным выше классам тензорных полей в допустимом репере можно дать простую координатную характеристику. Так, векторное поле вертикально, если оно имеет координаты $(0, X^\alpha)$, а ковекторное поле горизонтально, если $(\xi_i, 0)$. Вообще, тензорное поле T горизонтально по X_s лишь тогда, когда его компоненты $T^{(A)}_{(B)}$ при $B_s=\alpha_s$ равны нулю. Аналогично, вертикальность по ξ^s означает, что равны нулю все его компоненты при $A_s=i_s$.

Всякая инфинитезимальная связность расслоения реперов $\mathscr{R}(E)$, т. е. линейная связность на E, может быть, как известно, задана 1-формой со значениями в алгебре Ли $gl(m+n, R)$, преобразующейся при правых сдвигах по определенному закону. Нам придется в дальнейшем иметь дело с ее локальной матричной 1-формой $\omega=\left(\omega^A_B\right)$, отнесенной к заданному полю допустимых реперов. При преобразовании этого поля $\omega'=$ $=f^{-1}(\omega f+df)$ и поэтому, полагая $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\omega_4\\ \omega_3\omega_2\end{pmatrix}$, будем иметь для различных блоков этой матрицы

$$\begin{gathered}\omega_1'=f_1^{-1}(\omega_1 f_1+df_1)+f_1^{-1}\omega_4 f_3,\quad \omega_4'=f_1^{-1}\omega_4 f_2,\\ \omega_2'=f_2^{-1}(\omega_2 f_2+df_2)+f_3^{-1}\omega_4 f_2,\\ \omega_3'=f_3^{-1}(\omega_1 f_1+df_1)+f_2^{-1}(\omega_2 f_3+\omega_3 f_1+df_3)+f_3^{-1}\omega_4 f_3.\end{gathered}\tag{1.3}$$

Связность ω назовем приводимой [72], [77], если она может быть приведена к связности подрасслоения $\mathscr{R}(E, L)$. Это значит, что в допустимом репере всякая приводимая связность характеризуется L-инвариантным свойством

$$\omega_4=\left(\omega^i_\alpha\right)=0.\tag{1.4}$$

Формулы (1.3) принимают в этом случае вид

$$\begin{gathered}\omega_1'=f_1^{-1}(\omega_1 f_1+df_1),\quad \omega_2'=f_2^{-1}(\omega_2 f_2+df_2),\\ \omega_3'=f_3^{-1}(\omega_1 f_1+df_1)+f_2^{-1}(\omega_2 f_3+\omega_3 f_1+df_3).\end{gathered}\tag{1.5}$$

Из структурных уравнений связности

$$\Omega^A=d\theta^A+\omega^A_B\wedge\theta^B,\quad \Omega^A_B=d\omega^A_B+\omega^A_C\wedge\omega^C_B,$$

тогда следует, что формы кручения и кривизны приводимой связности в допустимом репере удовлетворяют условиям

$$\Omega^i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V),\quad \Omega^i_\alpha=0.\tag{1.6}$$

Обращаясь к соотношениям (1.5), мы видим, что ω_1 и ω_2 являются формами некоторых линейных связностей. Более точно, ω_2 определяет связность в подрасслоении вертикальных реперов $\{x, e_\alpha\}$ на E и в присоединенном к нему подрасслоении VE

посредством редукции к подгруппе $GL(n)$. Естественно поэтому назвать ω_2 формой вертикальной связности. Что касается форм ω_1, то для их истолкования следует рассмотреть расслоение факторреперов над E, которое получается следующим образом. Зададим на $\mathcal{R}(E, L)$ отношение эквивалентности допустимых реперов условием $e'_A(x) - e_A(x) \in V_x$. Факторрепер в точке $x \in E$ есть класс эквивалентности, порождаемый из фиксированного допустимого репера преобразованием: $e_i' = e_i + f_i^\alpha e_\alpha$, $e'_\alpha = f_\alpha^\sigma e_\sigma$. Следовательно, расслоение факторреперов $\mathcal{F}\mathcal{R}(E)$ получается из $\mathcal{R}(E, L)$ факторизацией по нормальному делителю N: $f = \begin{vmatrix} I_1 & 0 \\ f_3 & f_2 \end{vmatrix}$, а так как L/N изоморфно группе $GL(m)$, то последняя является структурной группой этого главного расслоения. Рассматривая далее естественный гомоморфизм φ: $\mathcal{R}(E, L) \to \mathcal{F}\mathcal{R}(E)$ над E, при котором $\varphi(f) = f_1$, мы получим на $\mathcal{F}\mathcal{R}(E)$ однозначно определенную связность $\omega_1^{\mathcal{F}}$: $\varphi^* \omega_1^{\mathcal{F}} = \omega_1$.

Отметим некоторые свойства приводимых связностей, связанные с ковариантным дифференцированием. Непосредственно из формулы ковариантного дифференциала для тензорного поля на E

$$\nabla T^{(A)}_{(B)} = dT^{(A)}_{(B)} + \omega \overline{\,{*}\, T^{(A)}_{(B)}}$$

вытекает

Теорема 1.1. Линейная связность на E приводима тогда и только тогда, когда ковариантный дифференциал произвольного вертикального векторного поля вертикален.

Более того,

Теорема 1.2. Подмодули тензорных полей на E, полубазовых по некоторому аргументу, замкнуты относительно ковариантного дифференцирования тогда и только тогда, когда линейная связность приводима.

Заметим, что в классе приводимых связностей вертикальное распределение оказывается абсолютно параллельным. В частности, слои являются вполне геодезическими подмногообразиями в E. Другие классы связностей с точки зрения свойств параллельного перенесения рассматривал Е. К. Леонтьев [34].

Далее будет выделен один специальный случай приводимых связностей — проектируемые связности. Предварительно введем понятие проектируемого тензорного поля. Функция $\varphi(x)$ на E называется проектируемой, если она может быть представлена в виде $\varphi = \hat{\varphi} \circ p$, где $\hat{\varphi}$ — некоторая функция на базе. Говорят также, что φ есть вертикальный лифт от $\hat{\varphi}$. Проектируемая функция характеризуется тем, что она постоянна на слоях. Поэтому для любого вертикального векторного поля X имеем $X(\varphi) = 0$. В частности, если $(\hat{U}, \hat{\varkappa})$ есть карта на M с координатными функциями $\hat{x}^i$, то в некоторой окрестности $U \subset p^{-1}(\hat{U})$ могут быть введены допустимые координаты (x^i, x^α), для которых функции x^i проектируемы: $x^i = \hat{x}^i \circ p$. На пересечении двух таких окрестностей $U \cap U'$ переходные функции для базисных и слоевых координат имеют вид

$$x^i = f^i(x'^j), \quad x^\alpha = f^\alpha(x'^j, x'^\beta). \tag{1.7}$$

В таких координатах всякая проектируемая функция зависит лишь от базисных координат. Легко также видеть, что натуральные репер и корепер, определяемые допустимыми координатами, будут допустимыми, а при переходе к другому такому же реперу элементы матрицы (1.1) являются частными производными от функций (1.7).

Векторное поле X на E называется проектируемым, если существует такое векторное поле $\hat{X} = p_* X$ на M, что $X(\varphi) = (p_* X)\hat{\varphi}$ для всякой проектируемой функции. Для проектируемости поля X необходимо и достаточно, чтобы порождаемая им 1-параметрическая группа $x(t) = \operatorname{Exp}(tX)x$ сохраняла слои. Если поля X, Y проектируемы, то $p_*[XY] = [p_* X, p_* Y]$, и поэтому проектируемые векторные поля образуют подалгебру Ли в $\mathscr{X}(E)$. В частности, вертикальные векторные поля проектируемы и образуют идеал в алгебре проектируемых полей. Например, для поля допустимых реперов $p_* e_\alpha = 0$. Назовем его проектируемым, если $e_i(x)$ — также проектируемы. Таким является, в частности, натуральный репер допустимых координат: $p_* \dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}^i}$. Класс проектируемых реперов определяется группой (1.1), где элементы блока f_1 зависят лишь от базисных координат. Векторное поле X является проектируемым тогда и только тогда, когда его компоненты X^i в разложении $X = X^i e_i + X^\alpha e_\alpha$ по проектируемому реперу зависят лишь от базисных координат.

Линейная форма ξ на E проектируема, если для любого проектируемого векторного поля $\xi(X)$ есть проектируемая функция. Поэтому такая 1-форма может быть представлена в виде взаимного образа $\xi = p^* \hat{\xi}$ некоторой 1-формы на базе и, следовательно, горизонтальна. К их числу относятся, к примеру, 1-формы $dx^i = p^* d\hat{x}^i$ натурального корепера допустимых координат. Непосредственно из определения следует, что всякая проектируемая 1-форма в проектируемом репере имеет компоненты $(\xi_i, 0)$, где $\xi_i(x^k)$ есть функции лишь базисных координат. Теперь можно ввести понятие проектируемого тензорного поля на E любого типа: его значения на произвольных проектируемых аргументах являются проектируемыми функциями. Отсюда немедленно следует, что в проектируемом поле реперов

$$T^{(i)}_{(j)}(x^k), \quad T^{(i)}_{\beta_1 j_2 \ldots j_q} = 0, \ \ldots, \ T^{(i)}_{j_1 \ldots \beta_q} = 0, \ \ldots, \ T^{(i)}_{(\beta)} = 0. \tag{1.8}$$

Линейную связность на E назовем проектируемой, если для каждой пары проектируемых векторных полей ковариантная производная $\nabla_X Y$ есть проектируемое поле. Более того, справедлива

Теорема 1.3. Если связность проектируема, то для любых проектируемых тензорного поля T и векторного поля X тензорное поле $\nabla_X T$ проектируемо.

Так как в любом проектируемом поле реперов $\nabla_j Y^i$ есть функции лишь базисных координат, а $\nabla_\gamma Y^i = 0$, то отсюда вытекает, что, во-первых, всякая проектируемая связность является приводимой и, во-вторых, в дополнение к (1.4)

$$\omega_j{}^i = \Lambda^i_{jk}(x^m)\,\theta^k. \tag{1.9}$$

Таким образом, всякая проектируемая связность индуцирует на базе расслоения линейную связность с локальными формами $\hat{\omega}_j{}^i = \Lambda^i_{jk}\hat{\theta}^k$, где $p^*\hat{\theta}^k = \theta^k$.

Условия проектируемости связности можно записать в произвольном поле реперов. Для этого рассмотрим связующий аффинор $p_* = (p^i_A)$ и его смешанный ковариантный дифференциал относительно произвольной пары линейных связностей на E и базе M

$$\nabla p_* = dp_* + \hat{\omega} p_* - p_* \omega.$$

Тогда имеет место

Теорема 1.4. Линейная связность ω на E проектируется в связность $\hat{\omega}$ на M тогда и только тогда, когда $\nabla p_* = 0$. В проектируемом репере $p_* = (\delta_j{}^i, 0)$ и это условие сводится к (1.4), (1.9).

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ И СВЯЗНОСТЕЙ НА РАССЛОЕНИЯХ С ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Мы будем предполагать теперь, что на расслоении задана дополнительная структура — инфинитезимальная связность, которую, в отличие от внешней связности ω, назовем внутренней. Это можно сделать различными эквивалентными способами. Например, с помощью левого расщепления точной последовательности векторных расслоений над E

$$0 \to VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{p'} p^{-1}TM \to 0, \tag{2.1}$$

где i — вложение, а p' — проекция факторрасслоения, порождаемая дифференциалом $p_*: TE \to TM$. Такой подход, применявшийся им ранее для векторных расслоений, рассмотрел Вильмс [186] в связи с построением связности Бервальда на векторном расслоении $VE \to E$. Другая трактовка этого понятия дана в [159] (см. также [102], [104], [182]). Внутренняя связность определяется здесь как сечение расслоения $J^1E \to E$ 1-струй всех локальных сечений заданного расслоения. В любом случае дело сводится к заданию дифференцируемого горизонтального распределения, трансверсального к слоям. Локально в допустимых координатах

$$\theta^\alpha=\Gamma_i^\alpha(x)\,dx^i+dx^\alpha=0. \tag{2.2}$$

Условие инвариантности этого распределения при преобразовании допустимого репера приводит к следующему закону преобразования матрицы $\Gamma=(\Gamma_i{}^\alpha)$, составленной из коэффициентов внутренней связности

$$\Gamma'=f_2^{-1}(\Gamma f_1+f_3). \tag{2.3}$$

Такой подход указан еще В. В. Вагнером и в последнее время применялся, например, в работах [44], [72], [77]. Очень удобно, как мы увидим, задавать внутреннюю связность с помощью аффинора $F:F^2=I$, определяющего на E структуру почти произведения $\pi:TE=HE\oplus VE$ и двойственную ей структуру $\pi^*:T^*E=H^*E\oplus V^*E$, [76], [77], [97]. В натуральном репере

$$F=\begin{bmatrix} I_1, & 0 \\ -2\Gamma, & -I_2\end{bmatrix}.$$

С помощью этого аффинора условие горизонтальности векторного или ковекторного поля выражается в виде $FX=X$ и $\xi F=\xi$, в то время как для вертикальных полей $FX=-X$ и $\xi F=-\xi$ соответственно.

Вообще, тензорное поле T типа (p, q) на E назовем горизонтальным (вертикальным) по некоторому аргументу, если оно обращается в нуль, как только этот аргумент вертикален (горизонтален). Это определение обобщает понятие полубазовости, но зависит от выбора внутренней связности в расслоении. Если ввести в рассмотрение горизонтальный и вертикальный проекторы

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}(I+F),\quad \mathscr{V}=\frac{1}{2}(I-F)$$

со свойствами: $\mathscr{H}+\mathscr{V}=I$, $\mathscr{H}-\mathscr{V}=F$, $\mathscr{H}^2=\mathscr{H}$, $\mathscr{V}^2=\mathscr{V}$, $\mathscr{H}\circ\mathscr{V}=\mathscr{V}\circ\mathscr{H}=0$, то поле T будет горизонтально (вертикально) по некоторому аргументу лишь тогда, когда действие вертикального (горизонтального) проектора на этот аргумент обращает T в нуль. Это можно выразить и иначе: действие аффинора F не изменяет значения тензора или соответственно изменяет его знак на противоположный.

В общем случае мы можем разложить аргументы тензорного поля на горизонтальные и вертикальные составляющие. Тогда мы получим его представление в виде суммы 2^{p+q} тензорных полей того же типа, аргументы которых горизонтальны или вертикальны. Будем говорить, что произведено разложение тензора T на π-тензоры типа (p_1+p_2, q_1+q_2), где числа p_1 и p_2

$(p_1+p_2=p)$ указывают, сколько горизонтальных и вертикальных ковариантных аргументов содержится в соответствующем слагаемом. Аналогичный смысл имеет обозначение $q_1+q_2=q$. Если рассмотреть тензорное расслоение $T_q{}^p(E)$, то тензорное представление типа (p, q) группы $GL(m)\times GL(n)$ определяет разложение этого расслоения в прямую сумму подрасслоений, которые с точностью до порядка сомножителей имеют вид $\otimes^{p_1}HE\otimes^{p_2}VE \ \otimes^{q_1}H^*E\otimes^{q_2}V^*E$. Поля π-тензоров есть сечения этих подрасслоений. С этой точки зрения упоминавшиеся в § 1 L-тензоры имеют тип $(0+p_2, q_1+0)$. Наличие симметрии или косой симметрии тензора упрощает картину. Например, разложение внешней p-формы представляется в виде $\alpha=\alpha_{p,0}+$ $+\alpha_{p-1,1}+\ldots+\alpha_{0,p}$, где $\alpha_{p,0}$ — p-форма на горизонтальном, а $\alpha_{0,p}$ — p-форма на вертикальном подрасслоении. Напомним, что разложения подобного типа для тензорных полей на касательном расслоении рассматривал Ф. И. Каган [28], а затем для тензоров типа (1.1) и (0.2) Мок, Паттерсон и Вонг [138].

Наличие π-структуры позволяет сузить класс рассматриваемых реперов на E. А именно, допустимый репер назовем π-репером, если $e_i(x)\in H_x$. Ему дуален π-корепер, для которого $\theta^\alpha(x)\in V_x{}^*$. Тогда матрица структурного аффинора принимает канонический вид

$$F=\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Запас π-реперов в данной точке определяется группой $GL(m)\times$ $\times GL(n)$, которая представляется матрицами

$$f=\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}; \quad [Ff]=0. \tag{2.5}$$

π-тензоры в π-репере имеют компоненты вида

$$T^{(i)(\alpha)}_{(j)(\beta)}=T_{j_1\ldots j_{q_1}\beta_1\ldots\beta_{q_2}}^{i_1\ldots i_{p_1}\alpha_1\ldots\alpha_{p_2}},$$

которые при преобразованиях (2.5) изменяются по закону связующих тензоров.

Здесь уместно упомянуть о понятии Г-проектируемого тензорного поля, введенного К. М. Егиазаряном [21] для произвольного расслоения и первоначально возникшем в работах Яно и Исихара [193], [196] для расслоений с одномерными слоями (см. § 4). Ковекторное поле ξ на расслоении с внутренней связностью Г называется Г-проектируемым, если для любого проектируемого и горизонтального векторного поля X функция $\xi(X)$ проектируема. Тензорное поле T типа (p, q) на E называется Г-проектируемым, если при любом выборе горизонтальных проектируемых векторных полей $X_1, \ldots, X_q$ и горизонтальных Г-проектируемых ковекторных полей $\xi^1, \ldots, \xi^p$ проектируема функция $T(X_1, \ldots, X_q, \xi^1, \ldots, \xi^p)$. Отсюда следует, что в проектируемом π-репере горизонтальные компоненты $T_{(j)}^{(i)}$ тензорного поля зависят лишь от базисных координат и определяют тензорное поле того же типа на базе. Легко видеть, что для контравариантных тензорных полей Г-проектируемость не зависит на самом деле от выбора внутренней связности и сводится к проектируемости в обычном смысле. Г-проектируемые тензорные поля естественно возникают на главных расслоениях. Оказывается, что если Г — внутренняя G-инвариантная связность, то всякое G-инвариантное тензорное поле на главном расслоении является Г-проектируемым.

Разложение, аналогичное вышеуказанному для тензоров, возникает и для других объектов, заданных на расслоении с внутренней связностью. При этом в ряде случаев компоненты разложения могут представлять собой самостоятельные π-объекты. Например, объект неголономности распадается на шесть π-объектов, один из которых, как мы видели в § 1, равен нулю для всякого допустимого поля реперов: $R^{i}_{\alpha\beta}=0$. Для проектируемого π-репера, когда $e_i(x)$ есть горизонтальные лифты некоторого базисного поля реперов, $[e_j e_\gamma]\in V$ и поэтому $R^{i}_{j\gamma}=0$. Такой π-репер использовал М. О. Рахула в работе [44]. Там же выяснен геометрический смысл остальных компонент разложения. В частности, R_{ij}^{α} образуют π-тензор, называемый тензором кривизны внутренней связности. Его геометрический смысл с помощью базисных циклов рассматривался также автором [77]. Если, в частности, $R^{\alpha}_{ij}=0$, то горизонтальное распределение является инволютивным. Отметим в связи с этим работу [95], где в случае риманова расслоения определена алгебра Ли ограниченной группы голономии в предположении, что последняя является группой Ли. Получен аналог теоремы Амброза — Зингера.

Иногда для упрощения счета удобно использовать адаптированный репер. Это специальный случай проектируемого репера, образованный горизонтальными лифтами натурального поля реперов $\left\{\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right\}$ на базе и натуральным вертикальным репером

$$e_i=\partial_i-\Gamma^{\alpha}_{i}\partial_\alpha,\quad e_\alpha=\partial_\alpha. \tag{2.6}$$

Ему дуален адаптированный корепер, образованный вертикальными 1-формами (2.2) и горизонтальными 1-формами $\theta^i=dx^i$. Они определены с точностью до преобразований (2.5), где блоки образованы частными производными: $f_1=(\partial_j f^i)$, $f_2=(\partial_\beta f^\alpha)$. Рассмотрение структурных уравнений поля адаптированных реперов показывает, что отличными от нуля будут лишь следующие компоненты объекта неголономности

$$\frac{1}{2}R^{\alpha}_{ij}=\partial_{[j}\Gamma^{\alpha}_{i]}-\Gamma^{\sigma}_{[j}\partial_{|\sigma|}\Gamma^{\alpha}_{i]},\quad R^{\alpha}_{i\beta}=\partial_\beta\Gamma^{\alpha}_{i}. \tag{2.7}$$

Пусть T — тензорное поле и ω — произвольная внешняя связность. Относя их к некоторому полю π-реперов, заданному в окрестности $U \subset E$, рассмотрим ковариантный дифференциал. Коэффициенты разложения

$$\nabla T\{^{(A)}_{(B)}\} = \nabla_k T\{^{(A)}_{(B)}\}\theta^k + \nabla_\gamma T\{^{(A)}_{(B)}\}\theta^\gamma$$

будем называть, следуя терминологии Б. Л. Лаптева, ковариантными производными первого и второго рода. Положив

$$\omega^A_B = \Lambda^A_{Bk}\theta^k + \Lambda^A_{B\gamma}\theta^\gamma \tag{2.8}$$

и сделав аналогичное разложение для дифференциалов

$$dT\{^{(A)}_{(B)}\} = \overset{\theta}{\partial}_k T\{^{(A)}_{(B)}\}\theta^k + \overset{\theta}{\partial}_\gamma T\{^{(A)}_{(B)}\}\theta^\gamma,$$

получим

$$\nabla_k T\{^{(A)}_{(B)}\} = \overset{\theta}{\partial}_k T\{^{(A)}_{(B)}\} + \overline{\Lambda^{*}_{*k} T\{^{(A)}_{(B)}\}}, \quad \nabla_\gamma T\{^{(A)}_{(B)}\} = \overset{\theta}{\partial}_\gamma T\{^{(A)}_{(B)}\} + \overline{\Lambda^{*}_{*\gamma} T\{^{(A)}_{(B)}\}}. \tag{2.9}$$

Объект связности распадается в π-репере на восемь π-объектов, законы преобразования которых вытекают непосредственно из общей формулы преобразования коэффициентов связности. Учитывая (2.5), получим, что компоненты Λ^α_{jk}, $\Lambda^i_{\beta k}$ и $\Lambda^\alpha_{j\gamma}$, Λ^i_{β}, образуют π-тензоры. Чтобы выяснить их геометрический смысл рассмотрим ковариантный дифференциал горизонтального проектора. В π-репере $\nabla\mathscr{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_4 \\ \omega_3 & 0 \end{pmatrix}$, откуда

$$\nabla_k \mathscr{H}^\alpha_j = \Lambda^\alpha_{jk}, \quad \nabla_k \mathscr{H}^i_\beta = -\Lambda^i_{\beta k}, \quad \nabla_\gamma \mathscr{H}^\alpha_j = \Lambda^\alpha_{j\gamma}, \quad \nabla_\gamma \mathscr{H}^i_\beta = -\Lambda^i_{\beta\gamma}.$$

Остальные соотношения удовлетворяются тождественно. Так как $\nabla\mathscr{H} + \nabla\mathscr{V} = 0$, то ковариантное дифференцирование вертикального проектора не дает ничего нового. Из этих соотношений следует, что указанные π-тензоры с точностью до знаков совпадают с аффинорами кривизны горизонтального и вертикального распределений в смысле Схоутена и Стройка. Что касается остальных π-объектов, то Λ^l_{jk} и $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ преобразуются по закону связностей и определяют параллельное перенесение в горизонтальном и вертикальном распределениях, индуцированное внешней связностью ($X^\alpha = 0$, $Y^l = 0$)

$$\overset{H}{\nabla}_k X^l = \overset{\theta}{\partial}_k X^l + \Lambda^l_{jk}X^j, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma Y^\alpha = \overset{\theta}{\partial}_\gamma Y^\alpha + \Lambda^\alpha_{\beta\gamma}Y^\beta,$$

а $\Lambda^l_{j\gamma}$ и $\Lambda^\alpha_{\beta k}$ образуют линейные объекты следующего типа

$$\Lambda'^l_{j\gamma} = \overset{-1}{f}_k{}^l(\Lambda^k_{m\sigma}f_j{}^m f^\sigma_\gamma + \overset{\theta}{\partial}_\gamma f_j{}^k), \quad \Lambda'^\alpha_{\beta k} = \overset{-1}{f}{}^\alpha_\sigma(\Lambda^\sigma_{\tau m} f^\tau_\beta f_k{}^m + \overset{\theta}{\partial}_k f^\sigma_\beta)$$

и позволяют определить вертикальное ковариантное дифференцирование горизонтальных векторных полей, а также горизонтальное ковариантное дифференцирование вертикальных полей. Заметим, что в более узком классе проектируемых реперов $f_j{}^i = f_j{}^i(x^k)$, и поэтому $\Lambda^i_{j\gamma}$ становится π-тензором.

Тождества Риччи

$$2\nabla_{[P}\nabla_{Q]}T^{(A)}_{(B)} = K^{*}{}_{*PQ}T^{(A)}_{(B)} + S^{C}_{PQ}\nabla_C T^{(A)}_{(B)}$$

распадаются на три группы тождеств, определяющих законы коммутирования ковариантных производных первого и второго рода. При этом тензор кручения распадается в общем случае на шесть π-тензоров, а тензор кривизны на двенадцать. Например,

$$\frac{1}{2}K^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = \overset{\theta}{\partial}_{[\lambda}\Lambda^{\alpha}_{|\beta|\mu]} + \Lambda^{\alpha}_{s[\lambda}\Lambda^{s}_{|\beta|\mu]} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma[\lambda}\Lambda^{\sigma}_{|\beta|\mu]} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\beta\sigma}R^{\sigma}_{\lambda\mu}.$$

Для приводимой связности в силу (1.4) $\Lambda^i_{\beta k} = 0$, $\Lambda^i_{\beta\gamma} = 0$, а в силу (1.6)

$$S^i_{\beta\gamma} = 0, \quad K^i_{\beta PQ} = 0. \tag{2.10}$$

Существенно упрощаются выражения и для других π-тензоров кручения и кривизны. В частности, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ становятся компонентами тензора кривизны вертикальной связности.

Специальным случаем приводимой связности является вполне приводимая связность [72], [77]. Рассмотрим подрасслоение π-реперов. Так как алгебра Ли группы (2.5) распадается в прямую сумму двух идеалов $gl(m)\oplus gl(n)$, то всякая инфинитезимальная связность этого расслоения определяется матричной 1-формой

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Внешнюю связность на E назовем вполне приводимой, если она может быть редуцирована к указанной связности, т. е. в π-репере

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0. \tag{2.12}$$

Формы

$$\omega_j{}^i = \Lambda^i_{jk}\theta^k + \Lambda^i_{j\gamma}\theta^{\gamma}, \quad \omega^{\alpha}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\beta k}\theta^k + \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma}$$

определяют инфинитезимальные связности на расслоениях горизонтальных и вертикальных реперов со структурными группами $GL(m)$ и $GL(n)$ соответственно, а также горизонтальную и вертикальную линейные связности на подрасслоениях HE и VE. Обратно, задание этих 1-форм однозначно определяет вполне приводимую связность на E.

Теорема 2.1. Необходимым и достаточным признаком вполне приводимой связности является условие

$$\nabla F = 0. \tag{2.13}$$

Справедлива также

Теорема 2.2. Для того, чтобы связность была вполне приводимой, необходимо и достаточно, чтобы ковариантный дифференциал вертикального или горизонтального векторного поля был также вертикален или горизонтален соответственно.

Таким образом, в классе вполне приводимых связностей не только вертикальное, но и горизонтальное распределение оказывается абсолютно параллельным. Имеет место и более общее утверждение:

Теорема 2.3. *Линейная связность на E вполне приводима тогда и только тогда, когда подмодули тензорных полей, вертикальных или горизонтальных по какому-либо аргументу, замкнуты относительно ковариантного дифференцирования.*

Заметим, что формула ковариантного дифференцирования имеет теперь вид

$$\nabla T^{(i)(\alpha)}_{(j)(\beta)} = dT^{(i)(\alpha)}_{(j)(\beta)} + \overline{\underset{1}{\omega}_* {}^* T^{(i)}_{(j)}}{}^{(\alpha)}_{(\beta)} + T^{(i)}_{(j)}\overline{{}^{(\alpha)}_{(\beta)}\underset{2}{\omega}_*{}^*}. \qquad (2.14)$$

Для вполне приводимой связности $\Omega^\alpha_i = 0$, и поэтому $K^\alpha_{iPQ} = 0$. Отличными от нуля остаются поэтому лишь следующие компоненты тензора кривизны: K^i_{jPQ}, $K^\alpha_{\beta PQ}$.

Специальным случаем приводимой связности является вполся понятие φ-связности [75]. В группе (2.5) рассмотрим подгруппы Ли $GL(m)$ и $GL(n)$, определяемые условиями $f_2 = I_2$ и $f_1 = I_1$. Пусть $\varphi : GL(m) \to GL(n)$ — некоторый гомоморфизм и φ_* — соответствующий гомоморфизм алгебр Ли. Тогда в (2.5) определяется подгруппа Ли $G(\varphi) : f_2 = \varphi(f_1)$ и на E возникает порождаемая этой подгруппой φ-структура с φ-связностью типа

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \varphi_* \omega_1 \end{bmatrix}, \qquad (2.15)$$

которая однозначно задается своей горизонтальной 1-формой. В § 3 мы увидим, что такая структура естественно появляется на всяком тензорном расслоении.

Понятие Г-проектируемой связности было введено первоначально Яно и Исихара [196] на расслоениях с одномерными слоями. Затем Опройу [153] рассматривал это понятие в случае касательных расслоений. Общая конструкция Г-проектируемой связности дана К. М. Егиазаряном [20]. Внешняя связность на расслоении с внутренней связностью называется Г-проектируемой, если для любой пары X, Y проектируемых и горизонтальных векторных полей на E векторное поле $\nabla_X Y$ проектируемо. Оказывается, что связность является Г-проектируемой тогда и только тогда, когда ее горизонтальные компоненты $\Lambda_{ij}{}^h$ относительно проектируемого поля реперов не зависят от слоевых координат. В этом случае на базе возникает линейная связность $\hat{\omega}$, определяемая условием

$$\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}=p_*(\nabla_X Y),$$

где $\hat{X}$, $\hat{Y}$ — произвольная пара векторных полей на M, а X, Y — их горизонтальные лифты.

§ 3. ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Векторные расслоения занимают среди других особое место, являясь непосредственным обобщением касательных. Рассмотрим те особенности теории связностей, которые здесь возникают. При этом следует иметь в виду, что преобразования допустимых координат имеют теперь специальный вид

$$x^i=f^i(x'^j),\quad x^\alpha=f^\alpha_\beta(x'^j)\,x'^\beta. \tag{3.1}$$

Существенные результаты по теории внутренних связностей векторных расслоений получил Тонг [175]—[177]. Итоги исследований подведены в работе [178]. Здесь построена операция внутреннего ковариантного дифференцирования следующим образом. Использована особенность векторных расслоений, которая заключается в существовании канонического морфизма $(VE,\ \bar{p},\ E)\to(E,\ p,\ M)$, сужение которого на слоях является линейным изоморфизмом. Поэтому любое сечение $s:M\to E$ векторного расслоения можно отождествить с вертикальным векторным полем s^v на E (вертикальный лифт). Возникает канонический изоморфизм $VE\to E\times_M E$ над M, который вместе с проекцией на второй сомножитель дает отображение $VE\to E$. Если поэтому на векторном расслоении задана внутренняя связность, то композиция вертикальной проекции и этого отображения дает морфизм $D:TE\to E$, называемый отображением связности. Это позволяет построить внутреннее ковариантное дифференцирование на модуле сечений векторного расслоения: сечению s и базисному векторному полю $\hat{X}$ сопоставляется новое сечение по формуле

$$D_{\hat{X}}s=D(s_*(\hat{X})).$$

Такая же конструкция излагается Паттерсоном [154]. Если E_α — базис модуля сечений, то в локальных координатах

$$D_{\hat{X}}s=\hat{X}^i(\partial_i s^\alpha+\Gamma^\alpha_i(x^k,\ s))\,E_\alpha.$$

Сандовичи [162] называет сечение рекуррентным, если на M существует такая 1-форма $\hat{\theta}$, что $D_{\hat{X}}s=\hat{\theta}(\hat{X})\,s$. В терминах группы голономии ею установлены необходимые и достаточные условия существования такого сечения. Операция ковариантного дифференцирования в свою очередь может быть положена в основу определения внутренней связности [24].

Внутренняя связность называется линейной*, если при параллельном перенесении вдоль произвольной базисной кривой отображение слоев является линейным изоморфизмом. Отсюда следует следующее строение коэффициентов связности

$$\Gamma_i^\alpha(x)=\Gamma_{\beta i}^\alpha(x^k)\,x^\beta$$

и вследствие этого формулы (2.7) дают

$$R_{ij}^\alpha=R_{\beta ij}^\alpha(x^k)\,x^\beta,\quad R_{i\beta}^\alpha=\Gamma_{\beta i}^\alpha.$$

Полагая $\theta_\beta^\alpha=\Gamma_{\beta i}^\alpha dx^i$, получим для оператора кривизны

$$R_\beta^\alpha=d\theta_\beta^\alpha+\theta_\sigma^\alpha\wedge\theta_\beta^\sigma.$$

Он связан с ковариантным дифференцированием формулой

$$R(\hat{X},\hat{Y})\,s=D_{\hat{X}}D_{\hat{Y}}s-D_{\hat{Y}}D_{\hat{X}}s-D_{[\hat{X}\hat{Y}]}s.$$

Задание линейной связности в E определяет линейную связность в дуальном векторном расслоении E^* с ковариантной производной

$$\overset{*}{D}_{\hat{X}}\sigma=\hat{X}^i(\partial_i\sigma_\alpha-\Gamma_{\alpha i}^\beta\sigma_\beta)\,E^\alpha.$$

Более того, если заданы линейные связности в расслоениях E_1 и E_2, то определяются также линейные связности в их прямой сумме, тензорных произведениях и внешних степенях.

Пусть $G\subset GL(n)$ — подгруппа Ли. Говорят, что на векторном расслоении задана внутренняя G-структура, если задана G-структура в ассоциированном с ним главном расслоении слоевых реперов. В этом случае появляется возможность редукции линейной внутренней связности к G-связности, матричная 1-форма которой $\theta=(\theta_\beta{}^\alpha)$ в соответствующем репере принимает значения в подалгебре $g\subset gl(n)$.

Такого типа структуры изучались в ряде работ последнего времени. Так, Годюшон [118] изучал голоморфные векторные расслоения с эрмитовой слоевой метрикой. Гриюб и Петри [119], рассматривая голоморфное векторное расслоение ранга два и присоединенное к нему расслоение эрмитовых квадратичных форм, показали, что на последнем возникает слоевая метрика сигнатуры (+ — — —). Векторное расслоение со слоевой метрикой рассматривал также А. П. Норден [41]. Н. Д. Александров [1] изучал векторное расслоение, на котором задано регулярное представление ассоциативной и унитальной алгебры. Внутренняя связность, совместная с такой структурой, характеризуется ковариантным постоянством структурных аффиноров. Он же изучал слоевые аффинорные структуры произвольного типа [2]. К этому кругу вопросов близки также работы [130], [164]. Сака [161] и Каррер [127] использовали

* Заметим, что этот термин употребляется также в другом смысле [35].

векторное расслоение с алгеброй Клифорда в качестве типового слоя. Дуади и Лазар [111], рассматривая расслоение на алгебры Ли, показали, что с ним однозначно ассоциируется расслоение на односвязные группы Ли. Векторное расслоение со слоевой структурой тройной системы Ли изучалось в работе П. И. Ковалева [30].

Пусть A — ассоциативная унитальная алгебра и $A \to \mathfrak{A}$ — некоторое ее представление в типовом слое векторного расслоения, превращающее последний в левый A-модуль. Рассмотрим коммутаторную алгебру $\overline{\mathfrak{A}}$ и обозначим через $Q \subset \overline{\mathfrak{A}}$ максимальную группу ее обратимых элементов. Это группа Ли. Тогда на векторном расслоении возникает внутренняя Q-структура, определяемая заданным представлением. Так как алгебра Ли группы Q совпадает с $\overline{\mathfrak{A}}$, то внутренняя Q-связность характеризуется ковариантным постоянством всех аффиноров, принадлежащих представлению.

Такая ситуация возникает, например, в случае тензорных расслоений $T_q{}^p(M)$ [75], [78]. Рассмотрим прямое произведение симметрических групп $S_{p,q} = S_p \times S_q$ и определим действие этой группы в тензорном пространстве $T_q{}^p$, поставив в соответствие элементу $S = (\sigma, \tau)$ линейный оператор

$$S w (X_1, \ldots, X_q, \xi^1, \ldots, \xi^p) = \\ = w (X_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, X_{\tau^{-1}(q)}, \xi^{\sigma(1)}, \ldots, \xi^{\sigma(p)}).$$

Полученное представление продолжим по линейности до представления групповой алгебры $A = RS_{p,q}$ — ассоциативной, унитальной и полупростой. Элементы алгебры $\mathfrak{A}$ имеют вид $\sum\limits_{s} \lambda(s) S$ и называются по Г. Вейлю [11] операторами симметрии. Тем самым $T_q{}^p$ превращается в левый A-модуль, который в силу теоремы Машке [31] вполне приводим. Вполне приводимой поэтому оказывается и коммутаторная алгебра $\mathfrak{A}$. Это приводит к разложению тензорного расслоения в прямую сумму $\mathfrak{A}$-неприводимых (а следовательно, и Q-неприводимых) компонент. Возникает вопрос: будут ли эти компоненты также неприводимыми относительно структурной группы $G(\varphi)$ тензорного расслоения, образованной операторами $f_2 = \otimes^p f_1 \otimes^q f_1{}^*$. Ответ оказывается утвердительным при $p=0$ или $q=0$ вследствие известной теоремы Г. Вейля [11]: в пространстве контра- или ковариантных тензоров коммутаторная алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ совпадает с обертывающей алгеброй $RG(\varphi)$. Тем самым отыскание $G(\varphi)$-неприводимых компонент сводится к разложению алгебры A в прямую сумму минимальных идеалов. Особенно простая ситуация возникает в случае расслоений тензоров типа (2.0) или (0.2). Однако для расслоений смешанных тензоров, как показано автором в [78], это уже не имеет места. Причина заключается в том, что при $p>0$, $q>0$, алгебра $RG(\varphi)$ оказывается нетривиальной подалгеброй в $\bar{\mathfrak{A}}$. Вопрос об отыскании $G(\varphi)$-неприводимых тензорных подрасслоений в общем случае остается открытым. В качестве примера можно привести аффинорное расслоение $T_1{}^1(M)$, обладающее, кстати, слоевой структурой матричной алгебры. Здесь $Q=GL(m^2)$ и легко видеть, что оно Q-неприводимо. С другой стороны, тензорное представление группы $GL(m)$ в данном случае изоморфно $SL(m)$. Относительно ее действия $T_1{}^1(M)$ вполне приводимо и распадается в прямую сумму линейного расслоения скалярных аффиноров и расслоения аффиноров с нулевым следом.

Отметим, что указанное расслоение недавно рассматривал Кручану [99], [100]. Им найдены векторные, (1.1)-тензорные поля и 1-формы на многообразии $T_1{}^1(M)$, инвариантные относительно слоевых эндоморфизмов.

Объект линейной внутренней связности тензорных расслоений имеет вид $\Gamma^{\alpha}_{\beta k}=\Gamma^{a_1\ldots a_p j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_q b_1\ldots b_p k}$ и под названием тензорной связности рассматривался в работах Коссу, Мастроджакомо, Фава и др. (см. обзор [35]). В последнее время изучались, как правило, более частные вопросы. Так, Ди Комите [106], обобщая один результат Коссу, показал, что с тензорной связностью типа (p, q) можно связать серию тензорных связностей типа $(mp+nq,\ np+mq)$, где m, n — произвольные натуральные числа. Тамасси и Нгуен [171]—[173] рассматривали тензорные связности типа $(p, 0)$, приводимые к p-векторным связностям, изучали плоские тензорные связности. Оказывается, что существуют не плоские векторные связности, порождающие плоскую тензорную связность. Марино [133] понятие тензорной связности рассмотрел с точки зрения внутренней связности векторного расслоения. Здесь следует также упомянуть работу [170], в которой Шибяк, рассматривая пространство Вейля, использовал расслоение псевдотензоров типа (2.0). Ряд работ посвящен расслоениям p-векторов. Якубович [125], продолжая свои прежние исследования, рассматривал тензор кривизны бивекторной связности и его комитанты, установил условия существования ковариантно постоянных бивекторов. В работах Формелла [116] и Штейнера [169] вновь поднимается вопрос об условиях индуцируемости тензорной связности в расслоении p-векторов линейной связностью базы. Следует отметить также серию работ Хаубица и Бартела [93], [120]—[122] по теории связностей в расслоении простых p-векторов, а также работы [129], [168], [174], в которых расслоения бивекторов и p-векторов применяются для исследования римановой кривизны и ее обобщений.

Перейдем к внешним связностям и тем структурам, которые возникают на векторных расслоениях. Заметим прежде всего, что если на векторном расслоении задана внешняя связность, то в расслоении определяется, вообще говоря, некоторая внутренняя связность. Действительно, рассмотрим поле слоевой гомотетии и отождествим его с вертикальным векторным полем $(0, x^\alpha)$. Его ковариантный дифференциал относительно внешней связности имеет координаты $(\omega_\alpha{}^i x^\alpha,\ dx^\alpha + \omega_\beta{}^\alpha x^\beta)$. Если поэтому связность ω приводимая, то 1-формы

$$\nabla x^\alpha = dx^\alpha + \omega^\alpha_\beta x^\beta$$

определяют на E дифференцируемое распределение, инвариантное относительно действия группы L. Полагая $\omega^\alpha_\beta = \Lambda_{\beta i} dx^i + \Lambda^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma$, и замечая, что на векторном расслоении коэффициенты $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ образуют слоевой тензор, получим условие, при котором это распределение дополнительно к вертикальному, заключается в невырожденности слоевого аффинора

$$P^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\gamma + \Lambda^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta.$$

Приводимая связность, удовлетворяющая этому условию, была рассмотрена автором в [72] и названа регулярной. Таким образом справедлива

Теорема 3.1. Всякая регулярная связность на векторном расслоении индуцирует линейную внутреннюю связность с коэффициентами

$$\Gamma^\alpha_i = \overset{-1}{P}{}^\alpha_\sigma \Lambda^\sigma_{\beta i} x^\beta.$$

Если же $\det \tilde{P} = 0$, то указанное распределение пересекается с вертикальным по нулевой области аффинора P, и мы получим обобщенную внутреннюю связность. Такие обобщения понятия внутренней связности начались с работ Вонга и Молино (см. обзор [35]) и затем с различных точек зрения изучались в работах [92], [98], [105], [107]—[110], [113], [134], [139], [183], [188]. Общую конструкцию обобщенной связности в векторных расслоениях предложил В. Л. Спесивых [51], [53], задавая ее с помощью аффинора. В работе [52] понятия квазисвязности и псевдосвязности им даны для дифференцируемых расслоений общего вида как соответственно правый или левый встречный E-гомоморфизм точной последовательности (2.1).

Если на расслоении с внутренней связностью задана некоторая внутренняя G-структура, то вместе с ней возникает и внешняя структура, подчиненная π-структуре и определяемая группой $GL(m)\times G$. Вернемся, например, к рассмотренному выше A-модульному расслоению и заменим алгебру $\mathfrak{A}$ изоморфной ей алгеброй $\mathfrak{A}^v$, поставив в соответствие каждому оператору представления S оператор, матрица которого в π-репере имеет вид $S^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}^v$ реализует вырожденное представление исходной алгебры A в касательном расслоении TE и задает на E почти алгебраическую структуру, определяемую алгеброй $\tilde{\mathfrak{A}}$ [83]. Внешняя структура получается теперь следующим образом. Рассмотрим множество π-реперов, относительно которых матрицы аффиноров S^v остаются постоянными. Они образуют главное расслоение над E со структурной группой $GL(m)\times Q$, где Q — упоминавшаяся выше максимальная группа Ли, содержащаяся в $\bar{\mathfrak{A}}$. Назовем почти алгебраической всякую вполне приводимую связность на E, порожденную инфинитезимальной связностью этого расслоения реперов.

Теорема 3.2. Почти алгебраическая связность есть наиболее общая связность на векторном расслоении, относительно которой аффиноры S^v ковариантно постоянны.

Векторные расслоения со слоевой аффинорной структурой с этой точки зрения изучал Н. Д. Александров [2]. Показано, что они представляют собой вещественные реализации векторных расслоений над некоторой алгеброй, определяемой аффинором.

Обращаясь к случаю тензорных расслоений, имеем следующий результат:

Теорема 3.3. $\bar{\mathfrak{A}}$-неприводимые тензорные подрасслоения замкнуты относительно ковариантного дифференцирования в любой почти алгебраической связности.

Рассмотрим редукцию этой связности к подгруппе $GL(m)\times \times G(\varphi)$, где $G(\varphi)\subset Q$ — структурная группа тензорного расслоения. Мы хотим обратить внимание на то, что группа $G(\varphi)$ может быть не изоморфна $GL(m)$ даже локально. А именно, как показано в [74], справедлива

Теорема 3.4. Тензорное представление группы $GL(m)$ в пространстве тензоров типа (p, q) изоморфно

1) группе $GL(m)$, если $p-q$ нечетно,

2) группе $GL(m)/N$, $N=\{I_1, -I_1\}$, если $p-q\neq 0$ и четно,

3) группе $SL(m)$, если $p-q=0$.

Формула $\omega_2=\varphi_*\omega_1$ принимает в рассматриваемом случае вид

$$\omega_2=\left(\sum_1^p I_1\otimes\ldots\otimes\omega_1\otimes\ldots\otimes I_1\right)\otimes^q I_1- \\ -\otimes^p I_1\otimes\left(\sum_1^q I_1\otimes\ldots\otimes\omega_1\otimes\ldots\otimes I_1\right) \qquad (3.2)$$

и дает на тензорном расслоении φ-связность типа (2.15), которую мы называем связностью Б. Л. Лаптева. Покажем, что она действительно определяет на $T_q^p(M)$ внешнее ковариантное дифференцирование, введенное Б. Л. Лаптевым [32], и дадим ее инвариантный признак.

Чтобы применить формулу (2.14) в рассматриваемом случае, отождествим тензорное расслоение с векторным ранга $n= =m^{p+q}$, задав изоморфизм $h: T_q^p(M)\to E$ над M. В координатах

$$x^i=x^i, \quad x^\alpha=h^{\alpha(i)}_{(a)}w^{(a)}_{(i)},$$

где (a), (b) будут означать наборы из p индексов, а (i), (j) — из q индексов. Компоненты $h^{\alpha(i)}_{(a)}$ практически определяются выбором нумерации компонент опорного тензора w или их простейших линейных комбинаций и постоянны при преобразованиях группы $GL(m)\times G(\varphi)$. Рассматривая их как компоненты связующего π-тензора типа $(q+1,\ p+0)$ и применяя формулу (2.14), получим

Теорема 3.5. Вполне приводимая связность на тензорном расслоении есть связность Б. Л. Лаптева тогда и только тогда, когда π-тензор h ковариантно постоянен:

$$\nabla h=0.$$

Чтобы получить ковариантную производную Б. Л. Лаптева, надо в формулу (2.14) подставить выражение (3.2). Кроме того, следует учесть, что в тензорном расслоении горизонтальное тензорное поле типа (p, q) можно рассматривать как вертикальное векторное поле (и наоборот)

$$X^{\alpha}=h^{\alpha(i)}_{(a)}T^{(a)}_{(i)}.$$

Вертикальный ковектор аналогичным образом отождествляется с горизонтальным тензором типа (q, p). Вообще, π-тензору типа $(p_1+p_2,\ q_1+q_2)$ на E соответствует горизонтальный тензор типа $(\bar p, \bar q)$, где $\bar p=p_1p+q_1q+p_2$, $\bar q=p_1q+q_1p+q_2$. В итоге (2.14) сводится к формуле

$$\nabla T^{(\bar i)}_{(\bar j)}=dT^{(\bar i)}_{(\bar j)}+\omega_{\underset{1}{*}}{}^{*}T^{(\bar i)}_{(\bar j)}.$$

§ 4. СВЯЗНОСТИ НА ДРУГИХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Этот параграф посвящен обзору работ, в которых исследовались или в той или иной степени использовались внешние связности на расслоениях различного вида. При этом мы не будем касаться касательных расслоений и финслеровых пространств, а также вопросов, связанных с автоморфизмами внешних связностей по причинам, уже объясненным во введении.

Отметим прежде всего случай тривиального расслоения, когда $E=M\times F$. Тогда существует каноническая внутренняя связность, горизонтальное распределение которой инволютивно и совпадает с семейством подмногообразий $M\times\{y\}$, $y\in F$. Другими словами, расслоение допускает вторую проекцию $q: E\to F$. π-репер можно выбрать натуральным и поэтому $R^{A}_{BC}=0$. Он определен с точностью до преобразований

$$x^{i}=f^{i}(x'^{j}),\quad x^{\alpha}=f^{\alpha}(x'^{\beta}).$$

Теория внешних связностей на произведении многообразий изучалась в последнее время А. П. Норденом и его учениками в рамках теории композиций. Основные результаты изложены в обзоре [41]. Заметим, что компоненты $\Lambda^i_{j\gamma}$ и $\Lambda^\alpha_{\beta k}$ внешней связности становятся теперь π-тензорами, а в случае вполне приводимой связности без кручения отличными от нуля будут лишь компоненты Λ^i_{jk}, $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$. Это пространство декартовой композиции.

Говоря о расслоениях со структурной группой, представляет интерес разыскание внешних связностей, инвариантных относительно действия этой группы. Яно и Исихара [194] рассматривали пространство с линейной связностью, допускающей 1-параметрическую группу аффинных преобразований, и образующее главное расслоение с одномерными слоями — траекториями этой группы. Эта ситуация была обобщена К. М. Егиазаряном следующим образом [14], [20]. Пусть ω — внешняя связность главного расслоения, для которой структурная группа G является группой ее аффинных преобразований. Тогда оказывается, что эта связность Г-проектируема относительно G-инвариантной внутренней связности. Более того, если K — группа аффинных преобразований связности ω, сохраняющая слои и внутреннюю связность, то спроектированная связность $\hat{\omega}$ инвариантна относительно действия группы K на базе расслоения. Обратно, если в описанной ситуации на базе имеется K-инвариантная связность, то можно построить ее канонический лифт, являющийся K-инвариантной внешней связностью на главном расслоении. Применение этого результата к теории однородных редуктивных пространств дает универсальный способ получения инвариантных связностей пространства K/G путем проектирования K-инвариантных групповых связностей [15].

Насколько эффективен указанный подход, показывает также следующий пример. В 1976 г. Э. Г. Нейфельд [40] рассмотрел нормализацию грассманова многообразия, задавая дифференцируемое соответствие между его плоскостями и дополнительными плоскостями. Им показано, что тогда на грассмановом многообразии определяется связность без кручения, которая является проективно-евклидовой над алгеброй матриц. При этом возникает нормализация поверхности Грассмана в смысле А. П. Нордена, а указанная связность может быть истолкована как внутренняя связность первого рода этой поверхности. Кроме того, если дополнительные плоскости зависят от максимального числа параметров, то становится возможной двойственная конструкция. Как показано в [19], связность Э. Г. Нейфельда можно получить следующим образом. Рассмотрим главное расслоение k-реперов $E \to G_{n,h}$ над грассмановым многообразием. Пространство E является открытым подмногообразием в R^{nh}. Задавая инвариантную внутреннюю связность, можно спроектировать естественную евклидову связность многообразия E, для которой преобразования структурной группы $GL(k)$ являются аффинными, в некоторую связность на $G_{n,k}$, которая совпадет со связностью Нейфельда.

Если на пространстве расслоения задана метрика g, то на нем возникает внешняя риманова связность. С другой стороны, если изотропные конусы не касаются слоев, то на них индуцируется невырожденная слоевая метрика и в расслоении определяется каноническая внутренняя связность с коэффициентами

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_i^{\alpha}=g^{\alpha\beta}g_{\beta i},$$

горизонтальное распределение которой ортогонально слоям. Всякая другая внутренняя связность отличается от нее на тензорное поле типа (0+1, 1+0). Некоторые вопросы римановых расслоений рассматривал еще в 1952 г. Муто (Muto Y., Sci. Rep. Iokohama Nat. Univ., 1952, № 1, 1—14). Затем ими занимались Нагано [141], Яно и Окубо [197]. Работы Яно и Исихара [195], [196] положили начало изучению одномерных (в смысле размерности слоя) римановых расслоений: $V_{m+1}\to V_m$. Ими рассмотрены различные классы метрик, в частности, $\overset{\circ}{\Gamma}$-проектируемые метрики и метрики, допускающие контактную структуру. Сиозаки [165] показал, что если в V_{m+1} с одномерным распределением и метрикой $ds^2=g_{00}\theta^0\theta^0+g_{ij}dx^idx^j$ интегральные линии изометричны, то V_{m+1} является расслоением с инвариантной относительно вертикального векторного поля метрикой. Окумура [151], рассматривая инвариантную относительно единичного вертикального векторного поля метрику и ее проекцию на базу, показал, что сужение проекции на ортогональные к слоям подпространства есть изометрия. Одномерные римановы расслоения использовались также в работах [114], [115], [157]—[159]. Многие свойства одномерных расслоений были затем обобщены для римановых расслоений общего вида. Например, О'Нейлл [152] рассмотрел риманову субмерсию, сохраняющую длины $\overset{\circ}{\Gamma}$-горизонтальных векторов, и ввел тензоры, аналогичные второй фундаментальной форме погружения. Проектируемые метрики и интересные примеры таких метрик изучали В. Г. Подольский и А. П. Широков [42], [43]. К. М. Егиазарян [20], [21] показал, что если метрика g является $\overset{\circ}{\Gamma}$-проектируемой, то риманова связность также $\overset{\circ}{\Gamma}$-проектируема, а ее проекция на базу $\hat{\omega}$ есть риманова связность спроектированной метрики. Это обобщает результат Яно и Исихара [194]. Отметим также работы [103], [104], [123], [140], [145], [181], [199], [200].

На главных расслоениях метрика возникает часто следующим образом. Пусть $E\to V_m$ — главное расслоение над римановым пространством с метрикой $\hat{g}$. Енсен показал [126], что если структурная группа допускает положительно определенную инвариантную метрику $\bar{g}$, то в E можно ввести риманову метрику по теореме Пифагора

$$g(X, Y)=\hat{g}(p_*X, p_*Y)+\lambda^2\bar{g}(\mathscr{V}X, \mathscr{V}Y),$$

где $\lambda=\mathrm{const}$. В частности, такой способ введения метрики в расслоении реперов использован в работах [147], [136], [142]. Кернер [128] и Хо [96] для геометрической интерпретации теории Янга—Миллса рассматривали главное расслоение над пространством—временем с компактной полупростой группой Ли и при построении метрики g использовали метрику Киллинга.

Еще в 1965 г. Огиуе [146] рассматривал многообразие E_{2k+1} с почти контактной структурой (φ, X, ξ) и в регулярном случае, когда интегральные кривые поля X гомеоморфны, а φ и ξ инвариантны при действии 1-параметрической группы G, порожденной полем X, установил, что E является главным расслоением со структурной группой G и инвариантной связностью ξ. Более того, на базе индуцируется почти комплексная структура, интегрируемость которой вместе с инволютивностью ξ равносильны интегрируемости исходной структуры. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах [155], [166], [167]. Оказывается, например, что почти контактная метрическая структура проектируется в почти эрмитову. Если же фундаментальная 2-форма в E замкнута, то любое квазикиллингово векторное поле проектируется в киллингово на базе. В этой связи напомним о работе Ёкоте [198], который рассматривал одномерные расслоения и показал, что если на базе задана почти контактная или почти комплексная структура, то на расслоении определяется почти комплексная или соответственно почти контактная структура. Если же на базе имеется почти греева или почти эрмитова структура, то на расслоении возникает соответственно почти эрмитова или почти греева структура. Почти комплексные, почти эрмитовы и почти келеровы структуры на расслоениях рассматривались также в работах [94], [124], [135], [148], [149], [163], [190]. Рассматривались также почти комплексные структуры, возникающие в тензорных расслоениях при условии, что такая структура имеется на базе [117], [131].

Наконец, еще одна группа работ связана с расслоениями дифференциально-геометрических объектов (пространства опорных элементов). Как мы уже упоминали, основы теории внешних связностей на этих многоообразиях заложены Б. Л. Лаптевым и В. И. Близникасом. Эта теория непосредственно вытекает из результатов, изложенных в предыдущих параграфах. Отметим, что связность, введенная В. И. Близникасом, является вполне приводимой.

Из работ, появившихся после обзора [6], отметим статью А. П. Урбонаса [54], в которой результаты Б. Л. Лаптева по теории дифференциальных инвариантов в пространствах тензорных опорных элементов обобщены для произвольных пространств опорных элементов. Введя нормальные координаты и операцию расширения, он доказал соответствующие теоремы о замене и приведении. Аналогичные вопросы для пространств опорных линеаров рассматривал Ю. И. Шинкунас [79], [80]. Им изучены некоторые специальные типы таких пространств, в частности, пространство опорных линеаров с заданной метрической функцией [81], а также [82] построена теория связностей и ковариантного дифференцирования в пространстве опорных сверхвекторов p-го порядка (при $p=1$ получается пространство гиперплоских элементов). Пространства гиперплоских элементов продолжала изучать И. Х. Медведевайте [37]—[39]. В метрическом случае для кривых и поверхностей этих пространств получен аналог формул Френе, введено понятие нормальной кривизны поверхности, найден класс поверхностей, для которых справедливы теоремы Эйлера и Гаусса. Связности в пространстве центральных пункторов исследовала С. П. Жяукене [25], [26]. Различные вопросы теории связностей в пространствах линейных, гиперплоских и тензорных опорных элементов рассматривал Э. И. Хмелевский [68]—[71]. Д. М. Яблоков [89], [90] продолжил свои исследования пространств пар линейных элементов. Отметим также работы А. Э. Саттарова [47]—[50], который изучал пространства опорных векторных и ковекторных плотностей. Им доказано, в частности, что задавая метрическую функцию, можно однозначно определить евклидову связность. Большой цикл работ выполнил А. С. Ферзалиев, исследуя проективные отображения пространств тензорных опорных элементов и аналоги проективно-евклидовых пространств. Более детально эти вопросы изучены им для пространств линейных и гиперплоских элементов [55] — [57], [60] — [67]. В работах [58], [59] он рассматривал также аналоги пространств Вейля и пространств эквиаффинной связности.

Упомянутые работы существенно обогатили и конкретизировали общую теорию. Нам представляется, что дальнейшее ее развитие требует привлечения аппарата расслоенных пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров Н. Д.*, О G-структуре на векторном расслоении, определяемой регулярным представлением алгебры. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1980, № 12, 5—19 (РЖМат, 1981, 7А659)
2. —, Аффинорные структуры на векторных расслоениях. I. Изв. вузов. Мат., 1979, № 12, 56—61 (РЖМат, 1980, 5А639)
3. *Близникас В. И.*, К теории кривизны пространства опорных элементов. Лит. мат. сб., 1965, *5*, № 1, 9—24 (РЖМат, 1966, 2А548)
4. —, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. Лит. мат. сб., 1966, *6*, № 2, 141—208 (РЖМат, 1967, 12А600)

5. —, О некоторых связностях расслоенных пространств. Лит. мат. сб., 1967, *7*, № 1, 5—16 (РЖМат, 1968, 10А529)
6. —, Пространства Финслера и их обобщения. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 73—125 (РЖМат, 1970, 2А634)
7. —, О секущих поверхностях пространств опорных элементов. Тр. семинара каф. геометрии. Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 16—40 (РЖМат, 1976, 2А825)
8. *Вагнер В. В.*, Абсолютная производная поля локального геометрического объекта в составном многообразии. Докл. АН СССР, 1943, *40*, № 3, 99—102
9. —, Теория составного многообразия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, *8*, 11—72
10. *Ведерников В. И.*, Инфинитезимальные псевдосвязности. Изв. вузов. Мат., 1972, № 1, 3—11 (РЖМат, 1972, 5А655)
11. *Вейль Г.*, Классические группы, их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947, 408 с.
12. *Евтушик Л. Е.*, О голономии нелинейных связностей и связностях в псевдогрупповых и однородных расслоениях. Сиб. мат. ж., 1973, *14*, № 3, 536—548 (РЖМат, 1973, 9А665)
13. —, *Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР Пробл. геометрии, 1979, *9*, 247 с. (РЖМат, 1980, 1А800К)
14. *Егиазарян К. М.*, О проектировании инвариантных связностей на главных расслоенных пространствах. Изв. вузов. Мат., 1978, № 7, 97—101 (РЖМат, 1979, 3А591)
15. —, Об инвариантных связностях на редуктивных однородных пространствах. Изв. вузов. Мат., 1979, № 1, 79—82 (РЖМат, 1979, 8А677)
16. —, О структуре аффинных связностей и тензорных полей на касательном расслоении высшего порядка. Докл. АН СССР, 1979, *246*, № 4, 797—801 (РЖМат, 1979, 10А509)
17. —, Об инвариантных аффинных связностях на алгебре Ли группы Ли. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1979, № 11, 21—28 (РЖМат, 1980, 3А543)
18. —, Многообразия аффинной связности почти произведения. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1979, № 11, 29—55 (РЖМат, 1980, 7А665)
19. —, Аффинные связности на грассмановом многообразии. Изв. вузов. Мат., 1980, № 5, 76—78 (РЖМат, 1980, 11А769)
20. —, Спроектированные инвариантные аффинные связности. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1980, № 12, 27—37 (РЖМат, 1981, 7А660)
21. —, G-проектируемые тензорные поля на расслоениях. Изв. вузов. Мат., 1981, № 8, 27—31 (РЖМат, 1982, 1А866)
22. —, *Широков А. П.*, Проектирование связностей в расслоениях и его приложения к геометрии пространств над алгебрами. Дифференц. геометрия (Саратов), 1979, № 4, 132—140 (РЖМат, 1980, 6А765)
23. *Егоров И. П.*, Автоморфизмы в обобщенных пространствах. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии, 1978, *10*, 147—191 (РЖМат, 1979, 5А658)
24. *Ермаков Ю. И.*, Линейные связности в гладких векторных расслоениях. Дифференц. геометрия (Саратов), 1979, № 4, 140—150 (РЖМат, 1980, 6А728)
25. *Жяукене С. П.*, Связности в пространстве центральных пункторов. Лит. мат. сб., 1971, *11*, № 4, 795—808 (РЖМат, 1972, 4А796)
26. —, О дифференциальных инвариантах пространства центральных пункторов. Лит. мат. сб., 1974, *14*, № 2, 195—197
27. *Израйлевич В. Л.*, Некоторые вопросы теории связностей в расслоенных многообразиях. В сб. «Исслед. по алгебре». Вып. 3. Саратов, Саратов. ун-т, 1973, 20—24 (РЖМат, 1974, 7А805)
28. *Каган Ф. И.*, К теории лифтов для тензорных полей из многообразия в его касательный пучок. Изв. вузов. Мат., 1969, № 9, 37—46 (РЖМат, 1970, 4А629)

29. —, Аффинные связности на касательном расслоении. Изв. вузов. Мат., 1975, № 2, 31—42 (РЖМат, 1975, 10А543)
30. *Ковалев П. И.*, Об одном обобщении «структуры кривизны». Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, 22—30 (РЖМат, 1975, 2А707)
31. *Кэртис Ч., Райнер И.*, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., «Наука», 1969, 669 стр. (РЖМат, 1969, 6А210К)
32. *Лаптев Б. Л.*, Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов. Уч. зап. Казан. ун-та, *109*, № 4, 1949, 187—216
33. —, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов. Уч. зап. Казан. ун-та, 1958, *118*, № 4, 75—147 (РЖМат, 1962, 1А422)
34. *Леонтьев Е. К.*, Классификация специальных связок и композиций многомерных пространств. Изв. вузов. Мат., 1967, № 5, 40—51 (РЖМат, 1967, 11А492)
35. *Лумисте Ю. Г.*, Теория связностей в расслоенных пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 123—168 (РЖМат, 1971, 10А1К)
36. —, Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности. Тр. геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, № 4, 285—307 (РЖМат, 1974, 5А756)
37. *Медведевайте И. Х.*, О гиперповерхностях метрического пространства гиперплоских элементов. Лит. мат. сб., 1969, *8*, № 4, 777—785 (РЖМат, 1971, 1А635)
38. —, О некоторых внутренних тензорных структурах касательного пучка пространства гиперплоских элементов. Лит. мат. сб., 1970, *10*, № 3, 639
39. —, Метрическое пространство гиперплоских элементов постоянной кривизны. Лит. мат. сб., 1972, *12*, № 2, 149—151
40. *Нейфельд Э. Г.*, Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. Изв. вузов. Мат., 1976, № 11, 48—55 (РЖМат, 1977, 6А540)
41. *Норден А П.*, Теория композиций. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). Пробл. геометрии, 1978, *10*, 117—145 (РЖМат, 1979, 5А638)
42. *Подольский В. Г., Широков А. П.*, О некоторых типах римановых расслоений. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 10—11, Казань, Казан. ун-т, 1975(1976), 232—236 (РЖМат, 1977, 10А480)
43. —, —, Об одном четырехмерном римановом расслоении. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 10—11, Казань, Казан. ун-т, 1975(1976), 108—112 (РЖМат, 1977, 10А488)
44. *Рахула М. О.*, Инфинитезимальная связность в расслоении. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). Пробл. геометрии, 1977, *8*, 163—182 (РЖМат, 1978, 1А630)
45. —, Ортогональные инварианты иммерсии и субмерсии. Укр. геометр. сб., 1978, № 21, 111—120 (РЖМат, 1978, 10А534)
46. —, Морфизмы расслоений со связностями. Изв. вузов. Мат., 1981, № 10, 76—78 (РЖМат, 1982, 3А761)
47. *Саттаров А. Э.*, Экстремали метрического пространства опорных векторных плотностей. Изв. вузов. Мат., 1977, № 9, 119—121 (РЖМат, 1978, 7А884)
48. —, Тензоры кривизны в метрическом пространстве векторных опорных плотностей. НИИ мат. и мех. Казан. ун-та. Казань, 1976. 9 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 июня 1976 г., № 2407—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 11А810 ДЕП.)
49. —, Аффинная связность в метрическом пространстве векторных опорных плотностей. НИИ мат. и мех. Казан. ун-та. Казань, 1976. 12 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 14 июня 1976 г., № 2134—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 11А811 ДЕП.)
50. —, Некоторые вопросы теории гиперповерхностей метрических пространств опорных ковекторных и векторных плотностей. НИИ мат. и мех. Казан. ун-та. Казань, 1978. 14 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 6 мая 1978 г., № 1539—78. ДЕП.) (РЖМат, 1978, 8А709 ДЕП.)

51. *Спесивых В. Л.*, Обобщенная связность в векторном расслоении. Укр. мат. ж., 1978, *30*, № 5, 685—689 (РЖМат, 1979, 2А535)
52. —, Квазисвязность и псевдосвязность в дифференцируемом расслоении. Изв. вузов. Мат., 1978, № 10, 105—107 (РЖМат, 1979, 5А641)
53. —, Обобщение понятия связности в векторном расслоении. Изв. вузов. Мат., 1979, № 6, 74—77 (РЖМат, 1980, 3А520)
54. *Урбонас А. П.*, О дифференциальных инвариантах пространства опорных элементов. Уч. зап. Казан. ун-т, 1968, *128*, № 3, 115—133 (РЖМат, 1969, 8А521)
55. *Ферзалиев А. С.*, О некоторых аналогах проективно-евклидовых пространств тензорных опорных элементов. Тр. семинара кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1971, вып. 6, 89—102 (РЖМат, 1972, 6А669)
56. —, Геодезические отображения и аналоги проективно-евклидовых пространств линейных элементов аффинной связности. Изв. вузов. Мат., 1973, № 12, 78—90 (РЖМат, 1974, 6А795)
57. —, Проективно-евклидовы пространства линейных элементов, являющиеся аналогом симметрических. Изв. вузов. Мат., 1974, № 4, 84—87 (РЖМат, 1974, 11А799)
58. —, Эквиаффинные пространства линейных элементов. Изв. вузов. Мат., 1974, № 9, 81—85 (РЖМат, 1975, 2А724)
59. —, Пространства Вейля линейных элементов аффинной связности. Изв. вузов. Мат., 1974, № 10, 75—83 (РЖМат, 1975, 4А770)
60. —, Проективное отображение и специальные типы пространств гиперплоскостных элементов общей связности. Тр. семинара кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1974, вып. 7, 128—139 (РЖМат, 1975, 6А822)
61. —, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов. Изв. вузов. Мат., 1975, № 1, 126—130 (РЖМат, 1975, 9А521)
62. —, Проективное отображение пространства линейных элементов с опорным касательным вектором к аффинным путям. Тр. семинара каф. геометрии. Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 95—108 (РЖМат, 1976, 2А828)
63. —, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов общей связности. I. Изв. вузов. Мат., 1975, № 12, 87—91 (РЖМат, 1976, 12А791). II. Изв. вузов. Мат., 1976, № 2, 114—118 (РЖМат, 1976, 11А809)
64. —, Обобщенные аффинные пути и аналоги геодезического отображения. Пенз. инж.-строит. ин-т. Пенза, 1979. 16 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 17 дек. 1979 г., № 4280—79 Деп.) (РЖМат, 1980, 4А714 ДЕП.)
65. —, О некоторых замечательных классах пространств гиперплоскостных элементов. Пензен. инж.-строит. ин-т. Пенза, 1979, 29 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 марта 1980 г., № 804—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 7А668 ДЕП.)
66. —, Проективное отображение пространства m-протяжений. Редкол. ж. Изв. вузов. Мат., Казань, 1980. 12 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 5 мая 1980 г., № 1768—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 8А620 ДЕП.)
67. —, Теория отображения аффинных путей пространств гиперплоскостных элементов. Пензен. инж.-строит. ин-т. Пенза, 1980, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 окт. 1980 г., № 4555—80 Деп.) (РЖМат, 1981, 2А720 ДЕП.)
68. *Хмелевский Э. И.*, Символ Б. Л. Лаптева, его свойства и применения. «Сб. аспирантск. работ. Казанск. ун-т. Точн. науки. Матем. Мех. Физ.» Казань, 1969, 105—123 (РЖМат, 1969, 11А525)
69. —, Поправка к выводу тождеств Бианки в пространстве тензорных опорных элементов. Изв. вузов. Мат., 1970, № 5, 107—108 (РЖМат, 1970, 12А561)
70. —, Тождества Бианки в пространстве гиперплоскостных элементов. В сб. «Ленинск. теория и практика соц. хозяйствования. 2». Алма-Ата, 1971, 282—287 (РЖМат, 1972, 3А670)
71. —, О нормальных координатах в пространстве линейных элементов. «Сб. по вопр. мат. и мех. Казахск. ун-т», 1971, вып. 3, 41—49 (РЖМат, 1973, 9А668)

72. *Шапуков Б. Н.*, Линейные связности векторного расслоения. Тр. семинара каф. геометрии. Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 118—131 (РЖМат, 1976, 2А829)
73. —, Теория кривизны векторного расслоения. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1976, вып. 9, 118—137 (РЖМат, 1977, 2А725)
74. —, О структуре тензорного пространства. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1978, вып. 10, 97—107
75. —, Структура тензорных расслоений. I. Изв. вузов. Мат., 1979, № 5, 63—73 (РЖМат, 1980, 1А802)
76. —, О структуре почти произведения на векторном расслоении. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1979, № 11, 100—110 (РЖМат, 1980, 3А523)
77. —, Связности на дифференцируемом расслоении. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1980, № 12, 97—111 (РЖМат, 1981, 7А661)
78. —, Структура тензорных расслоений. II. Изв. вузов. Мат., 1981, № 9, 56—63 (РЖМат, 1982, 3А760)
79. *Шинкунас Ю. И.*, Нормальные координаты и расширения в пространстве опорных линеаров линеарной связности. Лит. мат. сб., 1969, *9*, № 2, 386—387 (РЖМат, 1970, 4А646)
80. —, О дифференциальных инвариантах пространства опорных линеаров. Лит. мат. сб., 1970, *10*, № 3, 611—637 (РЖМат, 1971, 5А749)
81. —, О пространстве опорных линеаров финслеровой структуры. Лит. мат. сб., 1972, *12*, № 1, 221—227 (РЖМат, 1972, 11А545)
82. —, О связностях пространства опорных сверхвекторов p-го порядка. Тр. геометр. семинара Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 132—144 (РЖМат, 1976, 2А830)
83. *Широков А. П.*, Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами. Тр. геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, *1*, 425—456 (РЖМат, 1967, 6А383)
84. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 127—188 (РЖМат, 1970, 2А629)
85. —, Расслоенные пространства инволюций. Изв. вузов. Мат., 1972, № 12, 116—123 (РЖМат, 1973, 5А686)
86. —, Замечание о структурах в касательных расслоениях. Тр. геометр. семинара. Всес. ин-т научн. и техн. информ., 1974, № 5, 311—318 (РЖМат, 1975, 1А781)
87. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. II. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 153—207 (РЖМат, 1974, 11А795)
88. —, Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии, 1981, *12*, 61—95 (РЖМат, 1981, 10А546)
89. *Яблоков Д. М.*, Пространство пар линейных элементов аффинной связности, допускающей абсолютный параллелизм направлений. Горьк. с.-х. ин-т. Горький, 1981. 10 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22 янв. 1982 г., № 310—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 5А645 ДЕП.)
90. —, К теории кривизны пространства пар линейных элементов аффинной связности. Горьк. с.-х. ин-т. Горький, 1981. 22 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22 янв. 1982 г., № 309—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 5А644 ДЕП.)
91. *Apreutesei C.*, Connexions induites et structures presque-produit associées. An. şti. Univ. Iaşi, 1969, Sec. 1a, *15*, № 2, 441—447 (РЖМат, 1970, 11А522)
92. —, Sur les connexions généralisées. An. şti. Univ. Iaşi, 1970, Sec. 1a, *16*, № 1, 127—135 (РЖМат, 1971, 4А703)
93. *Barthel W.*, *Haubitz I.*, Zur metrischen Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten mit p-Areal und nichtlinearem Zusammenhang für einfache p-Vektoren. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1973, *75*, № 1, 9—41 (РЖМат, 1974, 1А681)

94. *Calabi E.*, Métriques Kählériennes et fibrés holomorphes. Ann. Sci. Ec. norm. Super., 1979, *12*, № 2, 269—294 (РЖМат, 1980, 2А678)
95. *Cheng Koun-Ping*, The horizontal holonomy group of a fibre bundle space. Kodai Math. J., 1979, *2*, № 3, 362—370 (РЖМат, 1980, 5А641)
96. *Cho Y. M.*, Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. J. Math. Phys., 1975, *16*, № 10, 2029—2035 (РЖМат, 1976, 4А784)
97. *Cruceanu V.*, Sur la structure presque-produit associée à une connexion sur un espace fibré. An. şti. Univ. Iaşi, 1969, Sec. 1a, *15*, № 1, 159—167 (РЖМат, 1970, 4А640)
98. —, Sur certaines espèces de quasi-connexions. Boll. Unione mat. ital., 1975, *12*, № 3, 271—278 (РЖМат, 1977, 1А665)
99. —, Le fibré des tenseurs de type (1,1) sur une variété différentiable. An. şti. Univ. Iaşi, 1982, Sec. 1a, *28*, № 1, 45—54 (РЖМат, 1982, 12А717)
100. —, Objets géométriques invariants sur le fibré des tenseurs de type (1,1). An şti. Univ. Iaşi, 1982, Sec. 1a, *28*, № 1, 55—62 (РЖМат, 1982, 12А718)
101. *Dekrét A.*, On a horizontal strukture on differentiable manifolds. Math. Slovaca (ČSSR), 1977, *27*, № 1, 25—32 (РЖМат, 1977, 11А614)
102. —, Horizontal structures of fibre manifolds. Math. Slovaca (ČSSR), 1977, *27*, № 3, 257—265 (РЖМат, 1978, 9А656)
103. —, On forms and connections on fibre bundles. Čas. pestov. mat., 1980, *105*, № 1, 73—80 (РЖМат, 1980, 6А729)
104. —, On quasi-Riemannian fiber manifold. Czech. Mat. J., 1981, *31*, № 2, 229—240 (РЖМат, 1981, 12А726)
105. *Di Comite C.*, Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe C^{∞}. Ann. mat. pura ed appl., 1969, *83*, 133—152 (РЖМат, 1970, 9А531)
106. —, Una osservazione suller connessioni tensoriali di specie qualunque. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1970, *49*, № 1—2, 52—56 (РЖМат, 1972, 1А1060)
107. —, Pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale. Ann. mat. pura ed appl., 1973, *96*, 155—173 (РЖМат, 1974, 7А807)
108. —, Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale. Ann. mat. pura ed appl., 1974, *99*, 109—141 (РЖМат, 1975, 1А777)
109. —, Sulla curvatura delle pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale differenziabile. Rend. Accad. naz. XL, 1973—1974(1975), *24—25*, 83—99 (РЖМат, 1976, 11А778)
110. —, Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile. Matematiche, 1975(1976), *30*, № 2, 320—338 (РЖМат, 1977, 10А467)
111. *Douady A., Lazard M.*, Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes. Invent. math., 1966, *1*, № 2, 133—151 (РЖМат, 1967, 4А447)
112. *Ehresmann C.*, Les connections infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950, 29—55
113. *Farinola A., Leuci M.*, Sulle pseudoconnessioni di prima specie su uno spazio fibrato principale differenziabile. Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. e arti Napoli, 1979(1980), *46*, 63—74 (РЖМат, 1981, 2А677)
114. *Flaherty F. J.*, Comersions and 1-connectedness. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1977, *81*, № 1, 143—147 (РЖМат, 1977, 10А491)
115. *Folland G. B.*, Weyl manifolds. J. Different. Geom., 1970, *4*, № 2, 145—153 (РЖМат, 1971, 4А734)
116. *Formella S.*, On the inducibility of tensor connection and the connection of k-vectors. Demonstr. math., 1973, *6*, № 2, 593—611 (РЖМат, 1975, 2А734)
117. *Gauchman H.*, On the construction of an almost complex structure on a fibre space of tensors. Tensor, 1975, *29*, № 2, 205—208 (РЖМат, 1976, 4А729)
118. *Gauduchon P.*, Sur les formes à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété kählérienne. C. r. Acad. sci., 1971, *273*, № 9, А398—А401 (РЖМат, 1972, 2А895)

119. *Greub W., Petry H. R.,* Spinor structures. Lect. Notes Math., 1982, *905*, 170—185 (РЖМат, 1982, 12A716)
120. *Haubitz I.,* Nichtlineare Zusammenhänge in Bündeln von Grassmann-Kegeln. Tensor, 1972, *24*, 123—160 (РЖМат, 1974, 1A661)
121. —, Zur metrischen Differentialgeometrie auf den Bündeln der einfachen p-Vektoren und $(n-p)$-Vektoren. Ann. mat. pura ed appl., 1976, № 109, 89—115 (РЖМат, 1977, 7A637)
122. —, Metrische Zusammenhänge und Torsion bei einfachen p-Vektoren. Manuscr. math., 1977, *22*, № 3, 271—287 (РЖМат, 1978, 4A571)
123. *Ichijyo Yoshihiro,* Almost complex projective connections. J. Math. Tokushima Univ., 1972, *6*, 1—15 (РЖМат, 1973, 6A748)
124. *Ishihara Shigeru, Konishi Mariko,* Fibred Riemannian space with triple of Killing vectors. Kodai Math. Semin. Repts, 1973, *25*, № 2, 175—189 (РЖМат, 1974, 2A647)
125. *Jakubowicz A.,* On certain concomitants of the curvature tensor of the space with an affine connection of bivectors. Tensor, 1972, *24,* 211—216 (РЖМат, 1974, 1A727)
126. *Jensen G. R.,* Einstein metrics on principal fibre bundles. J. Different. Geom., 1973, *8*, № 4, 599—614 (РЖМат, 1975, 1A797)
127. *Karrer G.,* Darstellung von Cliffordbündeln. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1973, Ser. AI, № 521, 34 S. (РЖМат, 1973, 8A426)
128. *Kerner R.,* Sur les équations invariantes sur un espace fibré principal. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 11, A760—A762 (РЖМат, 1971, 10A495)
129. *Kulkarni Ravindra S.,* On the Bianchi identities. Math. Ann., 1972, *199*, № 3, 175—204 (РЖМат, 1973, 5A688)
130. *Lavandier J.,* Tenseur de structure d'une G-structure définie par une 1-forme vectorielle 0-déformable. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 6, A385—A388 (РЖМат, 1977, 10A471)
131. *Ledger A. J., Yano K.,* Almost complex structures on tensor bundles. J. Different. Geom., 1967, *1*, № 4, 355—368 (РЖМат, 1969, 3A547)
132. *Lumiste Ü.,* Connections in associated fibre bundles. Czech. Mat. J., 1981, *31*, № 3, 421—432 (РЖМат, 1982, 2A771)
133. *Marino V.,* Applicazioni armoniche e connessioni tensoriali secondo Bompiani. Rend. mat., 1978, *11*, № 3, 405—411 (РЖМат, 1979, 8A707)
134. *Marinosci R. A.,* Applicazioni pseudoaffini tra varietà differenziabili e loro proprietà. Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. e arti Napoli, 1978(1979), 215—226 (РЖМат, 1980, 1A850)
135. *Millman R. S.,* Complex structures on real product bundles with applications to differential geometry. Doct. diss. Cornell Univ., 1971, 69 pp. Ref. «Diss. Abstrs Int.», 1971, *B32*, № 1, 436 (РЖМат, 1972, 4A794D)
136. *Mok Kam-Ping,* On the differential geometry of frame bundles of Riemannian manifolds. J. reine und angew. Math., 1978, *302*, 16—31 (РЖМат, 1979, 4A753)
137. —, Lifts of vector fields to tensor bundles. Geom. dedic., 1979, *8*, № 1, 61—67 (РЖМат, 1979, 10A491)
138. —, *Patterson E. M., Wong Yung-Chow,* Structure of symmetric tensors of type (0,2) and tensors of type (1,1) on the tangent bundle. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *234*, № 1, 253—275 (РЖМат, 1978, 8A684)
139. *Mozgawa W.,* Quasi-connections in the semiholonomic frame bundle of second order and their differential invariants. An. şti. Univ. Iaşi, 1981, Sec. 1a, *27*, № 2, 297—316 (РЖМат, 1982, 5A642)
140. *Mutō Yosio,* Riemannian submersion and the Laplace-Beltrami operator. Kodai Math. J., 1978, *1*, № 3, 329—338 (РЖМат, 1979, 8A708)
141. *Nagano Tadashi,* On fibred Riemann manifolds. Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1960, *10*, № 1, 17—27 (РЖМат, 1962, 11A358)
142. *Nagy P. T.,* On the orthonormal frame bundle of a Riemannian manifold. Publ. math., 1979, *26*, № 3—4, 275—280 (РЖМат, 1980, 6A763)
143. *Nguyen Van Tu,* On affine reducible tensorial connections. Period. math. hung., 1975, *6*, № 3, 245—253 (РЖМат, 1976, 7A871)

144. —, Additive decomposition of the curvature tensor of a reducible tensorial connection. Publs. math., 1974, *21*, № 3—4, 273—283 (РЖМат, 1976, 8A918)
145. *Nomizu Katsumi*, On the spaces of generalized curvature tensor fields and second fundamental forms. Osaka J. Math., 1971, *8*, № 1, 21—28 (РЖМат, 1972, 2A886)
146. *Ogiue Koichi*, On fiberings of almost contact manifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1965, *17*, № 1, 53—62 (РЖМат, 1966, 3A435)
147. *Okubo Tanjiro*, On the differential geometry of frame bundles. Ann. mat. pura ed appl., 1966, *2*, 29—44 (РЖМат, 1967, 7A472)
148. —, Fibred space with Kaehlerian metric whose base space admits contact metric structure. Rend. mat., 1968(1969), *1*, № 3—4, 427—450 (РЖМат, 1969, 11A583)
149. —, Fibred spaces with almost Hermitian metrics whose base spaces admit almost contact metric structures. Math. Ann., 1969, *183*, № 4, 290—322 (РЖМат, 1970, 7A667)
150. —, On fibred spaces with invariant equiform connection and torseforming structure vector field. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1975, *58*, № 2, 163—171 (РЖМат, 1977, 1A666)
151. *Okumura Masafumi*, Submanifolds of real codimension of a complex projective space. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1975, *58*, № 4, 544—555 (РЖМат, 1977, 2A733)
152. *O'Neill B.*, The fundamental equations of a submersion. Mich. Math. J., 1966, *13*, № 4, 459—469 (РЖМат, 1967, 10A527)
153. *Oproiu V.*, Some remarkable structures and connexions defined on the tangent bundle. Rend. mat., 1973(1974), *6*, № 3, 503—540 (РЖМат, 1975, 12A654)
154. *Patterson L.-N.*, Connexions and prolongations. Can. J. Math., 1975, *27*, № 4, 766—791 (РЖМат, 1976, 7A872)
155. *Petre S.*, Some properties of the *F*-structure. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1975(1977), *19*, № 3—4, 371—374 (РЖМат, 1978, 1A638)
156. *Popovici I.*, Propriétés relativistes d'une métrique de type sasakien. Rev. roum. math. pures et appl., 1974, *19*, № 4, 477—491 (РЖМат, 1974, 11A805)
157. —, Contribution à l'étude des espaces fibrés à metrique invariante. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 5, 775—800 (РЖМат, 1979, 12A745)
158. —, Sur la structure des espaces fibrés à métrique invariante. Lucr. Conf. nat. spaţii neolonome, Iaşi, 1976. Bucureşti, 1979, 140—148 (РЖМат, 1980, 6A761)
159. *Pradines J.*, Suites exactes vectorielles doubles et connections. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 25, 1587—1590 (РЖМат, 1975, 3A721)
160. *Rizzo S.*, Pseudoconnessioni lineari di specie (r, s). Boll. Unione mat. ital., 1977, *B14*, № 2, 535—546 (РЖМат, 1978, 4A599)
161. *Saka K.*, A generalization of Cauchy-Riemann equations on a Riemannian symmetric space and the H^p-space theory. Proc. Jap. Acad., 1979, *A55*, № 7, 255—260 (РЖМат, 1980, 3A537)
162. *Sandovici P.*, Secţiuni recurente ale unui fibrat vectorial în raport cu o lege de derivare. I. Stud. Univ. Babeş—Bolyai Mat., 1975, *20*, 21—25 (РЖМат, 1976, 12A761). II. Stud. Univ. Babeş—Bolyai. Mat., 1976, *21*, 19—22 (РЖМат, 1976, 12A762)
163. *Seino Masaru*, Some considerations on fibred spaces with certain almost complex structures. Hokkaido Math. J., 1978, 7, № 2, 198—205 (РЖМат, 1979, 4A737)
164. *Sen R. N.*, Bundle representations and their applications. Lect. Notes Math., 1978, *676*, 151—160 (РЖМат, 1979, 5A639)
165. *Shiozaki Keizo*, Fibering in a foliated Riemannian manifold. TRU Math., 1968, *4*, 21—28 (РЖМат, 1970, 1A643)
166. *Stavre P.*, On fiberings and *F*-structures. Bull. mat. Soc. sci. mat. RSR, 1971(1973), *15*, № 4, 497—499 (РЖМат, 1974, 5A705)

167. —, On the existence of η-semi-symmetric connections in a principal G-bundle V_n over V_m. Bull. math. Soc. sci. mat. RSR, 1981, *25*, № 1, 83—87 (РЖМат, 1982, 3А762)
168. *Stehney A.*, Extremal sets of p-th sectional curvature. J. Different. Geom., 1973, *8*, № 3, 383—400 (РЖМат, 1974, 9А829)
169. *Steiner S.*, Lineare Zusammenhänge auf $\Lambda^p M$. Geom. dedic., 1975, *4*, № 2—4, 159—164 (РЖМат, 1976, 11А779)
170. *Szybiak A.*, A contribution to the connection of V. Hlavatý. Ann. pol. mat., 1973, *28*, № 2, 141—151 (РЖМат, 1974, 5А755)
171. *Tamássy L.*, On nonlinear tensorial connexions. Publs math., 1969, *16*, № 1—4, 193—197 (РЖМат, 1971, 6А702)
172. —, On extension and reduction of non-linear connections. Tensor, 1972, *24*, 7—13 (РЖМат, 1974, 1А663)
173. —, *Nguyen Van Tu*, Absolute parallelism in non-linear reducible tensorial connections. Tensor, 1975, *29*, № 1, 93—97 (РЖМат, 1976, 3А821)
174. *Thorpe J. A.*, The zeroes of nonnegative curvature operators. J. Different. Geom., 1971, *5*, № 1—2, 113—125 (РЖМат, 1972, 1А1091)
175. *Tong Van Duc*, Connexions et structures particulières sur les fibres vectoriels. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 10, A661—A664 (РЖМат, 1970, 11А518)
176. —, Connexions, structures particuliéres et équations de structure sur les fibrés vectoriels. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 7, A543—A546 (РЖМат, 1973, 8А548)
177. —, Connexions non linéaires et équations de structure. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, *18*, № 8, 1269—1274 (РЖМат, 1974, 4А545)
178. —, Sur la géométrie différentielle des fibres vectoriels. Kodai Math. Semin. Repts, 1975, *26*, № 4, 349—408 (РЖМат, 1976, 5А657)
179. —, Fibrés vectoriels feuilletés. Boll. Unione mat. ital., 1978, *A15*, № 1, 52—60 (РЖМат, 1978, 11А644)
180. —, Espaces de nullite du tenseur de courbure sur les fibres principaux. J. Different. Geom., 1980, *15*, № 3, 355—363 (РЖМат, 1982, 1А869)
181. *Trautman A.*, Riemannian bundles. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1970, *18*, № 11, 667—672 (РЖМат, 1971, 5А731)
182. *Vassiliou E.*, On related connections and 1-jet principal fibre bundle. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarus. unit., 1977, № 7, 17 pp. (РЖМат, 1978, 5А654)
183. *Verona A.*, Connexions généralisées. Rev. roum. math. pures et appl., 1968, *13*, № 6, 891—896 (РЖМат, 1969, 3А530)
184. —, Bundles over manifolds of maps and connections. Rev. roum. math. pures et appl., 1970, *15*, № 7, 1097—1112 (РЖМат, 1971, 3А571)
185. *Vilms J.*, Nonlinear and direction connections. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *28*, № 2, 567—572 (РЖМат, 1972, 6А655)
186. —, On the existence of Berwald connections. Tensor, 1972, *26*, 118—120 (РЖМат, 1974, 2А611)
187. *Virsik J.*, Concerning connections on associated bundles. Mat. čas., 1970, *20*, № 1, 27—37 (РЖМат, 1970, 11А514)
188. —, Skew connections in vector bundles and their prolongations. J. Austral. Math. Soc., 1972, *13*, № 3, 343—353 (РЖМат, 1972, 11А528)
189. *Walczak P. G.*, Riemannian metrics of nonnegative curvature on fibre bundles. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1976 (1977), *24*, № 11, 987—991 (РЖМат, 1977, 10А481)
190. *Watson B.*, *Vanhecke L.*, The structure equation of an almost semi-Kähler submersion. Houston J. Math., 1979, *5*, № 2, 295—305. (РЖМат, 1980, 6А747)
191. *Wong Yung-Chow*, Linear connections and quasi-connections on a differentiable manifold. Tohoku Math. J., 1962, *14*, № 1, 48—63 (РЖМат, 1964, 12А425)
192. *Yano Kentaro*, *Davies E. T.*, On some local properties of fibred spaces. Kodai Math. Semin. Repts, 1959, *11*, № 4, 158—177 (РЖМат, 1961, 2А372)

193. —, *Ishihara Shigeru,* Fibred spaces and projectable tensor fields. Perspectives geom. and relativity. Bloomington—London, Indiana Univ. Press, 1966, 468—481 (РЖМат, 1968, 5А617)
194. —, —, Differential geometry of fibred spaces. Kodai Math. Semin. Repts, 1967, *19*, № 3, 257—288 (РЖМат, 1968, 7А600)
195. —, —, Fibred spaces with invariant Riemannian metric. Kodai Math. Semin. Repts, 1967, *19*, № 3, 317—360 (РЖМат, 1968, 10А520)
196. —, —, Fibred spaces with projectable Riemannian metric. J. Different. Geom., 1967, *1*, № 1, 71—88 (РЖМат, 1968, 12А543)
197. —, *Okubo Tanjiro,* Fibred spaces and non-linear connections. Ann. mat. pura ed appl., 1961, *55*, 203—243 (РЖМат, 1962, 9А320)
198. *Yokote Ichiro,* On a foliated manifold with 1-dimensional distribution. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1965, *A9*, № 202—208, 1—23 (РЖМат, 1966, 8А537)
199 —, On some properties of curvatures of foliated Riemannian structures. Kodai Math. Semin. Repts, 1970, *22*, № 1, 1—29 (РЖМат, 1970, 11А533)
200. —, A certain derivative in fibred Riemannian spaces and its applications to vector fields. Kodai Math. Semin. Repts, 1978, *29*, № 3, 211—232 (РЖМат, 1979, 9А667)