А. Я. Казаков, О принципе максимума в линейной теории переноса, *Докл. АН СССР*, 1985, том 280, номер 1, 78–79

А.Я. КАЗАКОВ

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 IV 1984)

Настоящая работа посвящена уточнению принципа максимума линейной теории переноса излучения [1]. В обозначениях мы следуем этой работе.

Пусть $G \subset R^3$ – ограниченная область, причем ∂G – кусочно-гладкая, Ω – единичная сфера в R^3. Мы полагаем, что G – обобщенно-выпуклая, т.е. любая прямая $P_{\mathbf{x}\omega}$, проходящая через точку $\mathbf{x} \in G$ в направлении $\omega \in \Omega$, пересекает ∂G лишь в конечном числе точек:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \zeta_n \omega, \quad n = 1, 2, \ldots, N(\mathbf{x}, \omega),$$

$$\zeta_1 < 0, \quad \sup_{G \times \Omega} N(\mathbf{x}, \omega) \leqslant N_0 < \infty.$$

Нас интересует функция $I(\mathbf{x}, \omega)$, интенсивность излучения в точке $\mathbf{x}$ в направлении ω, решение следующей краевой задачи:

$$\omega \operatorname{grad} I(\mathbf{x}, \omega) + \sigma(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}, \omega) = b_0(\mathbf{x}) \int_\Omega g(\mathbf{x}, \omega\omega') I(\mathbf{x}, \omega') d\omega',$$

$$(\mathbf{x}, \omega) \in G \times \Omega;$$

$$I(\mathbf{x} + \zeta_1 \omega, \omega) = f(\mathbf{x} + \zeta_1 \omega, \omega),$$

$$I(\mathbf{x} + \zeta_{2m+1} \omega, \omega) = I(\mathbf{x} + \zeta_{2m} \omega, \omega) + f(\mathbf{x} + \zeta_{2m+1} \omega, \omega),$$

$$m = 2, 3, \ldots, N(\mathbf{x}, \omega)/2.$$

Здесь коэффициенты $\sigma(\mathbf{x})$, $b_0(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}, s)$ предполагаются однозначно определенными в $\bar{G}$ и $\bar{G} \times [-1, 1]$ соответственно, $f(\mathbf{x}, \omega)$ – однозначно определенной во всех точках $\mathbf{x}_d = \mathbf{x} + \zeta_n \omega$ для направлений $\omega \in \Omega_-(\mathbf{x}_d)$, отвечающих входящему в G в точке $\mathbf{x}_d$ внешнему излучению. Пусть справедливы

Условия А.

$$\sigma(\mathbf{x}),\ b_0(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{G}), \quad g(\mathbf{x}, s) \in C(\bar{G} \times [-1, 1]),$$

$$f(\mathbf{x}, \omega) \in C(\partial G \times \Omega); \qquad \sigma(\mathbf{x}) > b_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G},$$

$$g(\mathbf{x}, s) > 0, \quad \int_\Omega g(\mathbf{x}, \omega\omega') d\omega' = 1, \quad (\mathbf{x}, \omega) \in \bar{G} \times \Omega,$$

Принцип максимума [1] в нашей ситуации можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $|f(\mathbf{x}, \omega)| \leqslant M$, $(\mathbf{x}, \omega) \in \partial G \times \Omega_-(\mathbf{x})$. *Тогда решение описанной выше краевой задачи удовлетворяет оценке*

$$|I(\mathbf{x}, \omega)| \leqslant M, \quad (\mathbf{x}, \omega) \in \bar{G} \times \Omega.$$

Введем в области G метрику [2]:

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \inf \int_0^1 [\sigma(\mathbf{x}(t)) - b_0(\mathbf{x}(t))] \, \|\mathbf{x}'(t)\| dt,$$

где inf берется по всем C^2-гладким кривым $\mathbf{x}(t)$ таким, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_2$; $\|\cdot\|$ означает евклидову норму в R^3.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда справедлива оценка*:

(1) $|I(\mathbf{x},\ \omega)| \leqslant M \exp[-\rho(\mathbf{x},\ \partial G)]$, $(\mathbf{x},\ \omega) \in \bar{G} \times \Omega$.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 точна в следующем смысле. Без детализации вида индикатрисы рассеяния $g(\mathbf{x},\ S)$ оценку (1) усилить нельзя: неравенство (1) может обращаться в равенство, если индикатриса рассеяния есть соответствующим образом введенная δ-функция, хотя, строго говоря, δ-функция не удовлетворяет одному из условий A.

З а м е ч а н и е 2. С помощью результатов работы [4] можно расширить класс областей, для которых справедливо утверждение теоремы 2, до областей, представимых в виде конечной суммы обобщенно-выпуклых областей.

З а м е ч а н и е 3. Аналог теоремы 2 для плоского полубесконечного слоя приведен в [3].

Автор благодарен Т.А. Гермогеновой и М.В. Масленникову за ценные замечания.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
метрологии им. Д.И. Менделеева, Ленинград

Поступило
15 V 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гермогенова Т.А.* – ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 1, с. 169–174. 2. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с. 3. *Казаков А.Я.* – ДАН, 1983, т. 270, № 4, с. 867–869. 4. *Смелов В.В.* В сб.: Методы решения систем вариационно-разностных уравнений. Новосибирск, 1979, вып. 5, с. 139–158.

УДК 539.12 : 530.145

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М.Я. ПАЛЬЧИК, член-корреспондент АН СССР Е.С. ФРАДКИН

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВЕКТОРНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

1°. Конформное решение в квантовых калибровочных теориях возможно при фиксированных значениях заряда – нулях функции $\beta(g)$, а также в тех случаях, когда $\beta(g) \equiv 0$, как, например, в $N=4$-расширенной суперсимметричной теории Янга–Миллса [1] и в $N=4$-расширенной конформной супергравитации [2]. Особый интерес представляет изучение конформных решений в связи с проблемой удержания кварков.

Однако обычный аппарат конформной теории (см., например, [3, 4]) не применим к калибровочным полям, так как закон преобразования векторного поля A_μ при конформной инверсии $x_\mu \to Rx_\mu = x_\mu/x^2$

$$(1)\qquad A_\mu(x) \xrightarrow{R} \frac{1}{x^2} g_{\mu\nu}(x) A_\nu(Rx), \qquad g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} - 2\,\frac{x_\mu x_\nu}{x^2},$$

приводит к чисто продольному инвариантному пропагатору. Причина этой трудности кроется в неинвариантности калибровочных условий относительно (1). Мож-