

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Вабищевич, Т. Н. Вабищевич, Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости, *Дифференц. уравнения*, 1983, том 19, номер 5, 852–860

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

16 марта 2025 г., 03:21:43



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6:532.5

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ, Т. Н. ВАБИЩЕВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Введение. Задачи плоского течения вязкой несжимаемой жидкости чаще всего исследуются на основе численного решения уравнений Навье — Стокса [1] в переменных «функция тока ψ и вихрь скорости ω ». При решении стационарных задач основным методом, который широко используется, является метод установления [1—4]. Для стационарных течений систему уравнений Навье — Стокса в переменных (ψ, ω) можно свести к одному квазилинейному эллиптическому уравнению четвертого порядка для функции тока ψ , для которого в [5, 6] также применялись простейшие методы установления.

Большие возможности, по крайней мере в части автоматизации программирования, при численном исследовании течений вязкой несжимаемой жидкости в нерегулярных областях предоставляет метод фиктивных областей [7, 8]. Его широкое применение в вычислительной гидродинамике сдерживается значительными трудностями численной реализации. Для эллиптических уравнений второго порядка в [9] построен вариант попеременно-треугольного метода [10], реализующий метод фиктивных областей. С его помощью можно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона с теми же трудозатратами, что и для задачи в прямоугольнике, содержащем исходную расчетную область.

Данная работа посвящена развитию итерационных методов численного решения стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях. Изучаются вопросы применения попеременно-треугольного метода при реализации метода фиктивных областей для эллиптических уравнений четвертого порядка. Приведены примеры численного решения стационарных уравнений Навье — Стокса, иллюстрирующие эффективность развиваемых в работе методов.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области D на плоскости (x, y) с границей ∂D функция тока ψ и вихрь скорости ω удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса

$$\Delta\omega = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right] - Q(x, y), \quad (1)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Компоненты скорости жидкости $\underline{u} = (u, v)$ определяются выражениями

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (3)$$

а вихрь скорости $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. В уравнениях (1), (2) через v обозначена кинематическая вязкость, а $Q(x, y)$ — заданная функция.

Систему (1), (2) дополним граничными условиями вида

$$\psi = \varphi_1(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \quad (4)$$

которые, как вытекает из (3), задают скорость жидкости на границе ∂D . В частности, обычное условие непротекания $(\underline{v}, \underline{n}) = 0$ (\underline{n} — нормаль к ∂D) дает $\varphi_1(x, y) = \text{const}$ в (4).

Из системы (1), (2) можно исключить ω и перейти к одному эллиптическому уравнению четвертого порядка для функции тока ψ

$$\Delta^2 \psi = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] + Q(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5)$$

которое называют ψ -уравнением.

Для решения (5), (4) применяется итерационный процесс

$$A \frac{\psi^{s+1} - \psi^s}{\omega_{s+1}} + (A+R)\psi^s = 0, \quad s=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь оператор $A\psi = \Delta^2 \psi$, $(x, y) \in D$ действует в пространстве функций, определенных внутри области D и удовлетворяющих краевым условиям (4). Поэтому (6) дополним условиями

$$\psi^{s+1} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{\partial \psi^{s+1}}{\partial n} = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial D. \quad (7)$$

Нелинейный оператор R в (6) соответствует правой части (5), т. е.

$$R\psi = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] - Q(x, y).$$

Значение итерационного параметра $\omega_s \equiv 1$ в (6), (7) соответствует широко применяемому методу последовательных приближений.

Сходимость итерационного процесса (6), (7) при малых числах Рейнольдса установлена теоретически [11] и подтверждается большой вычислительной практикой.

§ 2. МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Пусть D_1 дополняет исходную расчетную область D до некоторой регулярной области Ω . В простейшем случае Ω — минимальный прямоугольник, содержащий D . Рассмотрим задачу

$$\Delta u = -f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (8)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D. \quad (9)$$

Приближенное решение v_ε , получаемое методом фиктивных областей, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v_\varepsilon - c_\varepsilon(x, y)v_\varepsilon = -f_\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

а на границе

$$v_\varepsilon(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega. \quad (11)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$c_\varepsilon = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D, \\ \varepsilon^{-2}, & (x, y) \in D_1, \end{cases} \quad f_\varepsilon = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in D_1, \end{cases}$$

а ε — достаточно малое число. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место $v_\varepsilon(x, y) \rightarrow u(x, y)$ в D .

Аналогичная ситуация возникает и в случае бигармонического уравнения. Для задачи Дирихле

$$\Delta^2 u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (12)$$

$$u(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \partial D \quad (13)$$

приближенное решение $v_\varepsilon(x, y)$ строится как решение следующей задачи, аналогичной (10), (11):

$$\Delta^2 v_\varepsilon + c_\varepsilon^2(x, y)v_\varepsilon = f_\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (14)$$

$$v_\varepsilon(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega. \quad (15)$$

В работе [12] доказана оценка близости приближенного решения $v_\varepsilon(x, y)$ к $u(x, y)$ вида $\|v_\varepsilon - u\|_{W_2^2(D)} \leq c_1 \varepsilon$, где постоянная c_1 не зависит от ε .

Запишем обычным образом [10] сеточный аналог задачи (10), (11) в виде операторного уравнения

$$A_c v = F, \quad (16)$$

где $A_c = A_0 + c_\varepsilon(x, y)E$, а A_0 — разностный аналог оператора Лапласа: $A_0 v = -v_{xx} - v_{yy}$. Для решения (16) применим двухслойный итерационный метод, записав его в каноническом виде

$$B_c \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A_c y_k = F, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

с заданным начальным приближением y_0 .

В модифицированном попеременно-треугольном методе [9] оператор B_c выбран в виде

$$B_c = (D_c + \omega_0 A_c^1) D_c^{-1} (D_c + \omega_0 A_c^2), \quad (18)$$

где $D_c = (1 + c_\varepsilon(x, y)/\delta)E$ — диагональная матрица, A_c^1 и A_c^2 — нижняя и верхняя треугольные матрицы: $A_c = A_c^1 + A_c^2$, $(A_c^1)^* = A_c^2$. В (18)

$\omega_0 = 2\sqrt{\delta \Delta_0}$, а δ и Δ_0 — границы спектра разностного оператора A_0 . При таком выборе D_c и использовании чебышевского набора итерационных параметров τ_{k+1} скорость сходимости итераций (17) не зависит от значения параметра ε и остается такой же, как и для случая $c_\varepsilon(x, y) = 0$ во всем прямоугольнике Ω .

§ 3. РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ЕЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$, содержащем расчетную область D задачи (5), (4), введем прямоугольную сетку

$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \gamma$ с шагами h_x и h_y соответственно $\bar{\Omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y), 0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N, Mh_x = a, Nh_y = b\}$. В задаче (5), (4) ограничимся для простоты случаем $\varphi_i(x, y) = 0, i = 1, 2$. После применения метода фиктивных областей типа (14), (15) от задачи (6), (7) с $\omega_{s+1} \equiv 1$ перейдем к задаче нахождения приближенного решения ψ_ε^{s+1} на каждой $s+1$ итерации

$$\Delta^2 \psi_\varepsilon^{s+1} + c_\varepsilon^2(x, y) \psi_\varepsilon^{s+1} = \frac{1}{v} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi_\varepsilon^s \frac{\partial \psi_\varepsilon^s}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi_\varepsilon^s \frac{\partial \psi_\varepsilon^s}{\partial x} \right) \right] + Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (19)$$

$$\psi_\varepsilon^{s+1}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon^{s+1}}{\partial n}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega. \quad (20)$$

Для аппроксимации граничных условий (20) со вторым порядком используем известный прием [13]. Сетку $\bar{\Omega}_h$ продолжим на один шаг за границу γ , т. е. введем узлы с $i=-1, M+1, j=-1, N+1$. Граничное

условие для $\frac{\partial \psi_\varepsilon^{s+1}}{\partial n}$ теперь аппроксимируем с помощью центральной разности. Фиктивные узлы исключаются затем с помощью разностного аналога уравнения (19), записанного в приграничных узлах. Поэтому разностный бигармонический оператор $A_d = \Delta_h^2$ с граничными условиями Дирихле в безындексных обозначениях запишется в виде

$$A_d g = g_{xxxx}^- + 2g_{xxyy}^- + g_{yyyy}^-, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (21)$$

с учетом условий

$$\begin{aligned} g &= 0, \quad (x_i, y_j) \in \gamma, \quad g(x_{-1}, y_j) = g(x_1, y_j), \\ g(x_{M+1}, y_j) &= g(x_{M-1}, y_j), \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad g(x_i, y_{-1}) = g(x_i, y_1), \\ g(x_i, y_{N+1}) &= g(x_i, y_{N-1}), \quad 1 \leq i \leq M-1. \end{aligned} \quad (22)$$

Поставим в соответствие бигармоническому оператору с граничными условиями $g(x, y) = 0, \Delta g = 0, (x, y) \in \partial\Omega$ разностный оператор A_s . Очевидно, справедливо $A_s = A_0^2$, где, напомним, A_0 — разностный оператор Лапласа. С учетом введенных обозначений нетрудно из (21), (22) получить $A_d = A_0^2 + \rho(x, y)E$, где сеточная функция $\rho(x, y)$ отлична от нуля лишь в приграничных узлах:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & 1 < i < M-1, \quad 1 < j < N-1, \\ \frac{2}{h_x^4}, & i = 1, M-1, \quad 2 \leq j \leq N-2, \\ \frac{2}{h_y^4}, & j = 1, N-1, \quad 2 \leq i \leq M-2, \\ \frac{2}{h_x^4} + \frac{2}{h_y^4}, & i = 1, M-1, \quad j = 1, N-1. \end{cases}$$

При аппроксимации задачи (19), (20) обозначим через A оператор, соответствующий левой части уравнения (19) и однородным краевым условиям (20). Получим

$$A = A_0^2 + c^2(x, y)E, \quad (23)$$

где $c^2(x, y) = c_\varepsilon^2(x, y) + \rho(x, y)$. Для якобиана в правой части (19) $J(\omega_\varepsilon^s, \psi_\varepsilon^s) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_\varepsilon^s \frac{\partial \psi_\varepsilon^s}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega_\varepsilon^s \frac{\partial \psi_\varepsilon^s}{\partial x} \right)$, $\Delta \psi_\varepsilon^s = -\omega_\varepsilon^s$ использована следующая аппроксимация второго порядка центральными разностями: $J_h(\omega_\varepsilon^s, \psi_\varepsilon^s) = = (\omega_\varepsilon^s (\psi_\varepsilon^s)_y)_x^0 - (\omega_\varepsilon^s (\psi_\varepsilon^s)_x)_y^0$, $\omega_\varepsilon^s = A_0 \psi_\varepsilon^s$. Запишем разностный аналог задачи (19), (20) в виде операторного уравнения

$$A \psi_\varepsilon^{s+1} = \Phi(\psi_\varepsilon^s), \quad s=0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где оператор A дается выражением (23), а $\Phi(\psi_\varepsilon^s)$ — аналог правой части (19). Для двухслойного итерационного метода

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = \Phi(\psi_\varepsilon^s), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = \psi_\varepsilon^s, \quad (x_i, y_j) \in \Omega_h \quad (25)$$

применяется попеременно-треугольный метод с выбором $B=B_c^2$, где оператор B_c определяется формулой (18), в которой

$$A_c = A_0 + c(x, y)E. \quad (26)$$

Имеет место при $c = \text{const}$ операторное неравенство:

$$0,5A_c^2 \leq A \leq A_c^2, \quad (27)$$

где A и A_c определяются согласно (23) и (26). Неравенство (27) в соответствии с общей теорией итерационных методов [10] позволяет

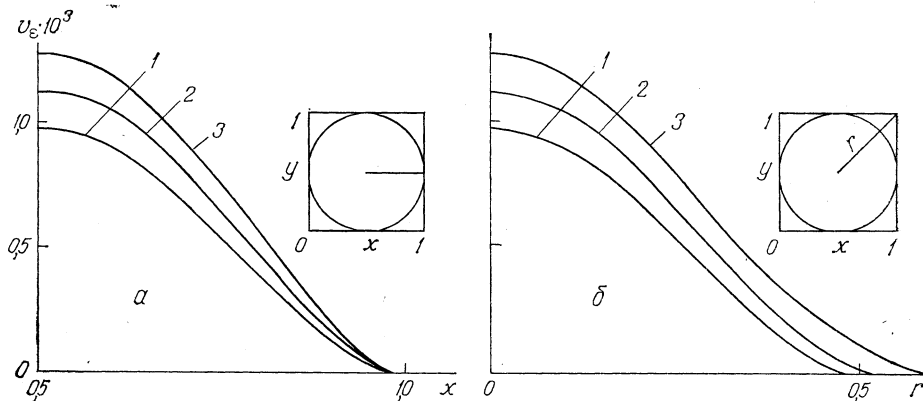


Рис. 1. 1 — точное решение задачи, 2 — приближенное решение задачи методом фиктивных областей на сетке (30×30) (фиктивная область D'_1) при $c_\epsilon = 10^4$ и больше, 3 — приближенное решение при $c_\epsilon = 0, 10, 10^2$. а — сечение, параллельное оси координат x , б — решение вдоль диагонали

утверждать, что для достижения одной и той же точности в (25) нужно не более чем в $\sqrt{2}$ раз больше итераций по сравнению со случаем $A=A_c^2$. Обращение оператора A_c производится с использованием варианта попеременно-треугольного метода (17), (18), сходимость которого не зависит от $c(x, y)$ и ϵ . Поэтому следует ожидать, что и при $c \neq \text{const}$ в задаче (24), (25) зависимость от ϵ будет незначительна.

§ 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

При численном решении плоских стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости вместо (25) использовался трехслойный итерационный метод сопряженных градиентов [10]: $B y_{k+1} = \alpha_{k+1} (B - \tau_{k+1} A) y_k + (1 - \alpha_{k+1}) B y_{k-1} + \tau_{k+1} \alpha_{k+1} \Phi$, $k=1, 2, \dots$, $B y_1 = (B - \tau_1 A) y_0 + \tau_1 \Phi(\psi_\epsilon^s)$, $k=0$, $y_0 = \psi_\epsilon^s$, где итерационные параметры τ_{k+1} , α_{k+1} определяются выражениями

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, \omega_k)}{(A \omega_k, \omega_k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_{k+1} = \left[1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(r_k, \omega_k)}{(r_{k-1}, \omega_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right]^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, \quad \alpha_1 = 1.$$

Здесь $r_k = A y_k - \Phi$ — невязка, а $\omega_k = B^{-1} r_k$ — поправка. Достоинство итерационных методов вариационного типа заключается в том, что для определения τ_{k+1} , α_{k+1} не требуется информация о спектре операторов B и A . Кроме того, они зачастую и сходятся быстрее методов с чебышевским набором итерационных параметров [14], хотя теоретические оценки числа итераций у них одни и те же.

Перейдем к описанию некоторых конкретных расчетов. С помощью метода фиктивных областей решалась однородная задача Дирихле для бигармонического уравнения (12), (13) с правой частью $f(x, y) = 1$. В случае, если D — круг, вписанный в единичный квадрат ($a=b=1$), т. е. $D = \{(x, y) | (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 < 0,25\}$, точное решение задачи (12), (13) имеет вид $u(x, y) = \frac{1}{64} [0,25 - (x-0,5)^2 - (y-0,5)^2]^2$. Оно

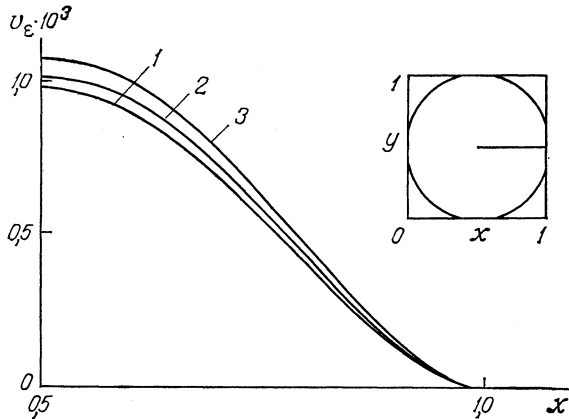


Рис. 2. Сравнение приближенного решения на сетке (50×50) при различных способах аппроксимации фиктивной области при $\epsilon = 10^4$: 1 — точное решение, 2 — решение с фиктивной областью D_1'' , 3 — фиктивная область D_1

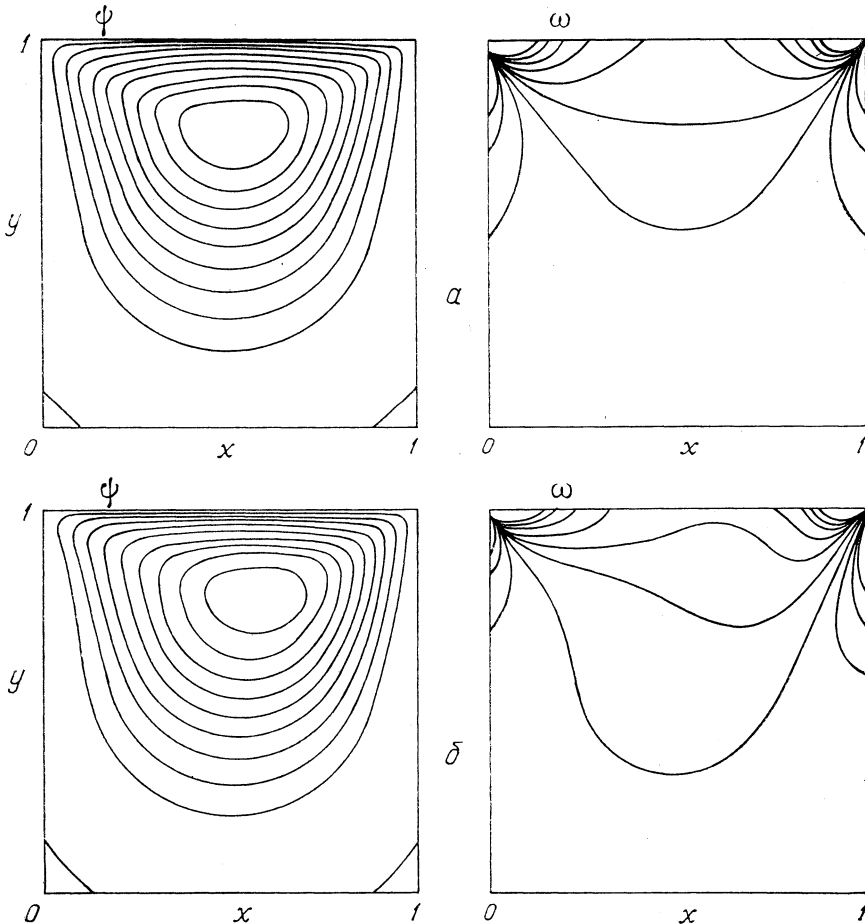


Рис. 3. Решение задачи о каверне прямоугольного сечения с подвижной верхней границей: а — $Re=10$, б — $Re=50$. Изображены линии уровня функции тока ψ и вихря скорости ω

сравнивалось с разностным решением, полученным с помощью попеременно-треугольного метода в сочетании с методом фиктивных областей. Точность приближенного решения иллюстрируется рис. 1, где изображены точное и разностное решения при различных значениях параметра ε в двух сечениях квадрата: параллельно оси x и по диагонали. Отметим, что при уменьшении ε ($c_\varepsilon > 10^4$) разностные решения совпадают друг с другом, а при $c_\varepsilon < 10^2$ они существенно не отличаются от случая $c_\varepsilon = 0$. В последнем случае влияние фиктивной области, которая

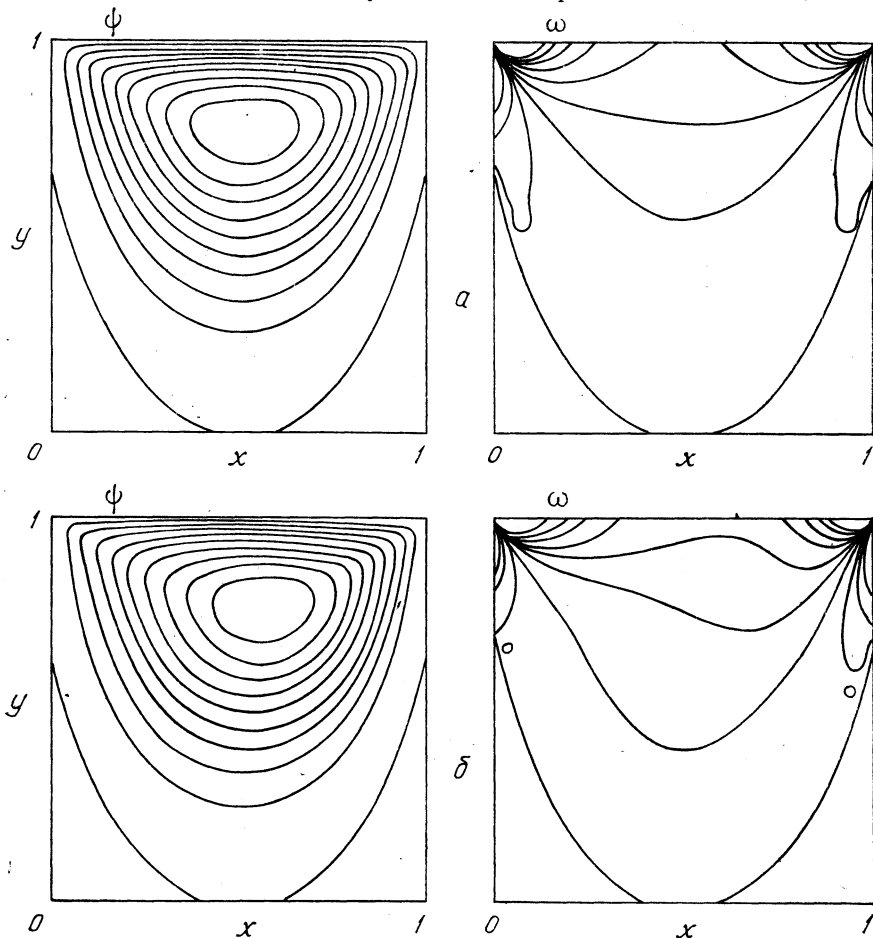


Рис. 4. Результаты решения задачи о каверне, имеющей форму полуэллипса, методом фиктивных областей. Здесь число Рейнольдса $Re=10$ (а) и $Re=50$ (б)

определялась следующим образом: $D'_1 = \{(x_i, y_j) \mid (x_i - 0,5)^2 + (y_j - 0,5)^2 > 0,25\}$ (все узлы фиктивной области D'_1 лежат вне круга D), незначительно, оно проявляется на используемых сетках в диапазоне значений $c_\varepsilon \sim 10^2 \div 10^4$. С возрастанием c_ε число итераций растет незначительно, примерно на одну треть при $c_\varepsilon = 10^4$ по сравнению со случаем $c_\varepsilon = 0$.

Точность приближенного решения сильно зависит (рис. 2) от того, насколько хорошо приближается исходная расчетная область ступенчатой. Использованы два приближения для фиктивной области: D'_1 и уточненное $D''_1 = \{(x_i, y_j) \mid (x_i - 0,5)^2 + (y_j - 0,5)^2 > 0,25(1-h)^2\}$, где $h = h_x = h_y$ — шаг квадратной сетки. Как видно из рис. 2, приближение D''_1 дает значительно лучшие результаты. Метод фиктивных областей тестировался также на задаче в квадрате, лежащем внутри единичного квадрата, решались задачи в областях, составленных из прямоугольников и т. д.

Для задач гидродинамики численный метод опробовался на задаче описания стационарного течения в каверне с подвижной верхней границей. В единичном квадрате решалась задача для уравнения (5) ($Q(x, y) = 0$) с краевыми условиями (4), где $\varphi_1(x, y) = 0$, а $\varphi_2(x, y) = v_0$ — заданная скорость движения при $y = b = 1$ и $\varphi_2(x, y) = 0$ на других частях границы. Сходимость итерационного процесса (6), (7) при $\omega_{s+1} \equiv 1$ наблюдалась при числах Рейнольдса $Re \leq 100$ ($Re = \frac{v_0 b}{\nu}$),

при больших значениях Re итерационный параметр ω_s необходимо уменьшить. Результаты решения задачи на равномерной сетке $M = 40$, $N = 40$ при $Re = 10$ и $Re = 50$ даны на рис. 3, где изображены линии уровня функции тока ψ и линии уровня вихря скорости ω через равные промежутки $\delta\psi = 0,1\psi_{\max}$ и $\delta\omega = 0,1(\omega_{\max} - \omega_{\min})$. В данных примерах при $Re = 10$ $\psi_{\max} = 0,09969$, а при $Re = 50$ $\psi_{\max} = 0,1006$. Заметим, что на менее подробной сетке (20×20) получены максимальные значения ψ , равные 0,09914 и 0,09932 при тех же значениях числа Рейнольдса. На такой грубой сетке присутствуют при всех значениях Re придонные вихри. Все это вполне согласуется с многочисленными опубликованными результатами по этой модельной задаче.

Более интересный расчет, иллюстрирующий эффективность метода фиктивных областей, проведен для каверны, имеющей сечение в виде полуэллипса. Изолинии ψ и ω при $Re = 10, 50$ изображены на рис. 4. В этом случае, естественно, отсутствуют придонные вихри, а основной вихрь поджимается к движущейся крышке.

Проведенные численные расчеты показали высокую эффективность развиваемого в работе метода и его применимость к решению широкого класса стационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. В заключение заметим, что используемая программа, реализующая этот метод, позволила рассчитывать характерный вариант на сетке (40×40) на ЭВМ БЭСМ-6 за время ~ 2 мин.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Самарскому за внимательное отношение к их работе, большую помощь и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.
2. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.— М.: Мир, 1972.
3. Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. Разностные методы решения уравнений Навье — Стокса.— В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. XI. М.: МГУ, 1968, с. 3—18.
4. Мюллер Т. Дж. Применение численных методов к исследованию физиологических течений.— В кн.: Численные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1981, с. 80—151.
5. Варжанская Т. С., Чудов Л. А. Обтекание плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. III. Вязкие течения несжимаемой жидкости. М.: МГУ, 1971, с. 214—255.
6. Крылов А. Л., Произволова Е. К. Численное изучение течений между вращающимися цилиндрами.— В кн.: Численные методы в газовой динамике, вып. II. М.: МГУ, 1963.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
8. Мызникова Б. И., Тарунин Е. Л. Применение метода фиктивных областей для решения уравнений Навье — Стокса в переменных функции тока и вихря скорости.— В кн.: Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1981, с. 45—57.
9. Вабищевиц П. Н. Численное решение задачи МГД равновесия в кожухе произвольной формы.— Препринт ИПМ АН СССР. М., 1979, № 121.
10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
11. Никитин А. К., Ахвердиев К. С., Остроухов Б. И. Гидродинамическая теория смазки и расчет подшипников скольжения, работающих в стационарном режиме.— М.: Наука, 1981.
12. Бугров А. Н. Метод фиктивных областей в задаче о поперечном изгибе тон-

кой пластины.—Численные методы механики сплошной среды, 1977, т. 8, № 4, с. 45—58.

13. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

14. Богданова М. С., Кучеров А. Б., Николаев Е. С. и др. Некоторые неявные итерационные методы. Анализ и сравнение.— Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 115.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
9 июня 1982 г.

УДК 519.63

В. М. ГОЛОВИЗНИН, М. А. РЯЗАНОВ

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Введение. В задачах теплопроводности наряду с искомым температурным полем часто представляет интерес и соответствующее ему векторное поле тепловых потоков. При численном решении уравнения теплопроводности методом конечных разностей [1] нахождение поля тепловых потоков по вычисленной сеточной функции температур представляет собой некорректную задачу и в области с большим коэффициентом теплопроводности из-за конечности разрядной сетки ЭВМ приводит к физически абсурдным результатам.

Для того чтобы при нахождении потоков избежать численного дифференцирования по пространственным переменным, уравнение теплопроводности можно переписать в терминах компонент векторного поля тепловых потоков и при численном решении находить вначале сеточные функции потоков, а уже затем, по найденным потокам, численным интегрированием определять поле температур [2].

В работах [3—6] на основе принципа минимальной диссипации [7] построены двумерные разностные схемы теплопроводности в терминах компонент тепловых потоков, имеющие второй порядок точности по шагам пространственной сетки и первый по времени, причем методика построения этих схем такова, что дает возможность добиваться и более высокого порядка временной аппроксимации.

В настоящей работе рассматриваются вариационно-разностные схемы двумерных уравнений теплопроводности, записанных в терминах векторных полей тепловых смещений [7].

В основу построения предлагаемых численных алгоритмов положен вариационный принцип Био [7]. Новые алгоритмы обладают всеми достоинствами потоковых разностных схем и легко реализуются на подвижных сетках.

§ 1. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТЕРМИНАХ КОМПОНЕНТ ТЕПЛОВЫХ СМЕЩЕНИЙ

1. Пусть G — двумерная односвязная область с границей Γ в плоскости декартовых либо цилиндрических координат (x, y) , занятая неподвижной теплопроводящей средой с изотропными теплофизическими свойствами, не зависящими от температуры. В случае осевой симметрии под x, y подразумеваются r, z соответственно.

Рассмотрим уравнение теплопроводности $c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$, $x, y \in G, t > 0$, с граничными условиями трех типов, заданных на различных участках границы Γ :

$$T|_{\Gamma} = T_{\Gamma}(x, y, t), \quad x, y \in \gamma_1 \subset \Gamma, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \omega_{\Gamma}(x, y, t), \quad x, y \in \gamma_2 \subset \Gamma, \\ -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + aT|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t), \quad x, y \in \gamma_3 \subset \Gamma, \quad t \geq 0,$$