Докажем, что последовательности, количество которых требуется найти в задаче, это все такие последовательности, граф которых представляет собой один цикл.

В начальной ситуации, когда все числа стоят на своих местах, такой граф представляет собой n циклов длины 1. Поэтому если в графе, соответствующем последовательности, ровно 1 цикл, то ее нельзя получить меньше чем за $n-1$ шагов. А если больше чем 2 цикла, то можно – ведь всегда можно сделать шаг, уменьшающий количество циклов на 1.

Осталось найти количество таких графов, в которых ровно 1 цикл. Будем рисовать этот цикл последовательно; начнем с вершины 1. Проведем из нее стрелку, это можно сделать $n-1$ способами. Из конца этой стрелки можно провести стрелку уже $n-2$ способами, чтобы не возвращаться в вершину, в которой уже были. На следующем шаге будет уже $n-3$ способа провести стрелку и т.д. – количество вариантов будет каждый раз уменьшаться на 1. Получим, что количество способов провести такой цикл равно $(n-1)!$.

Основная часть этого решения уже обсуждалась в «Кванте»: см., например, статью «Счетчики и расстояния в графах» П.Кожевникова в №6 за 2017 г.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Длина морской мили равна длине дуги экваториальной окружности, стягивающей центральный угол, равный угловой секунде.

2. Скорость спортсмена равна 30 км/ч = 0,5 км/мин. Значит, первый километр спортсмен пробежал за 2 мин, т.е. поезд уже ушел.

3. Необходимая скорость равна 1 км/с = 3600 км/ч = = 1000 м/с. Это примерно 3 скорости звука. Такой рубеж действительно преодолевают современные военные самолеты.

4. При изготовлении точной копии все размеры снеговика должны быть увеличены в 2 раза. Значит, объем копии будет в 8 раз больше объема оригинала, а масса будет равна 50 кг $\cdot$ 8 = = 400 кг.

5. Поскольку 1 фунт $\approx$ 450 г, 1 дюйм $\approx$ 2,5 см, то давление

$$p=\frac{8mg}{S}\approx\frac{8\cdot 0{,}4\cdot 10}{\left(2{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}\text{ Па}\approx 58\text{ кПа}.$$

6. Запишем размерности соответствующих величин в единицах СИ:

$$[\sigma]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^2},\ [g]=\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$[p]=\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=[\sigma][g].$$

Значит, $p=\sigma g$.

7. Выпишем размерности: $[E]=\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}$, $[\rho]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $[v]=\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Будем искать зависимость v от E и ρ в виде $v=kE^{\alpha}\rho^{\beta}$, где k – безразмерная постоянная. Из равенства размерностей левой и правой частей находим $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\beta=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $v=k\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

8. Прочность кольца на разрыв определяется кулоновскими силами, зависящими от квадрата величины заряда. Таким образом, новый заряд $Q=\sqrt{10}q$.

9. Преобразуем: $\left(\text{Дж/Кл}^2\right)\cdot\text{с}=\frac{\text{Дж/Кл}}{\text{Кл/с}}=\frac{\text{В}}{\text{А}}=\text{Ом}$. Это размерность электрического сопротивления.

10. Из соображений размерностей потенциал в вершине кубика пропорционален отношению q/a, где q – заряд кубика, a – его ребро. Центр же кубика находится в вершинах восьми кубиков вдвое меньшего размера. Значит, потенциал в центре равен 24 В.

11. Интенсивность излучения выражается формулой $I=\varepsilon_0E^2c$, где ε_0 – электрическая постоянная, E – напряженность электрического поля, c – скорость света. Тогда

$$[I]=\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\cdot\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)^2\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}=\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Микроопыт

При увеличении радиуса окружности во столько же раз увеличивается длина образуемой сектором дуги, а их отношение остается неизменным – фигуры подобны друг другу. Значит, не изменится и величина угла. Такая связь, кстати, привела к мысли измерять углы не градусами, а радианами – отношениями линейных элементов тех фигур, которым принадлежат углы.

Скрытая симметрия

1. Побеждает второй игрок.

Несложно проверить, что если бы ладьи изначально стояли на центрально симметричных клетках, то второй игрок мог бы выиграть, играя симметрично относительно центра. Пусть второй игрок мысленно переставит столбцы так, чтобы ладьи стояли симметрично (например, поменяет местами вертикали b и f между собой и горизонтали 2 и 5 между собой; рис.6). Затем он может на этой воображаемой доске ходить симметрично относительно центра доски и делать ходы в клетки с теми же координатами на исходной доске.

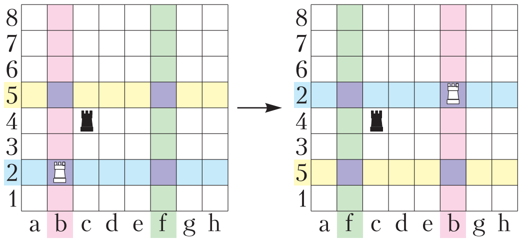

Рис. 6

2. Побеждает второй игрок.
Пусть первый поставил на доску первую шашку. От перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. То же относится и к перестановке вертикалей. Поэтому будем считать, что второму игроку дополнительно разрешается менять местами любые горизонтали и вертикали. Пусть после первого хода первого игрока второй игрок переставит горизонтали и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски. Далее он может делать ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. В частности, вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, и первый игрок не сможет занять центральную клетку. Легко проверить, что второй всегда сможет сделать симметричный ход (отдельно следует рассмотреть случай хода в среднюю горизонталь).
3. Выигрывает Вася.
Расположим камни, как показано на рисунке 7, где кучи соответствуют столбцам. Петя должен

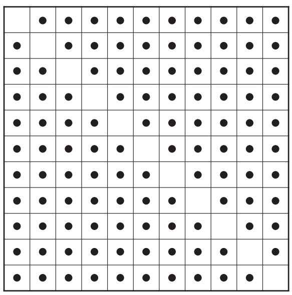
Рис. 7

брать несколько камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиным относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, т.е. у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.

LXXXIV Московская математическая олимпиада школьников

1. Барон не прав.
Заметим, что $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 100 + 1 = 9801 < 9900$, а $100^2 = 10000 > 9999$. Таким образом, четырехзначных точных квадратов, начинающихся на 99, не существует, поэтому к числу 99 нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат.
2. Поместятся.
Разместим свечки так, как показано на рисунке 8. Докажем, что отрезок OA меньше радиуса, т.е. самые удаленные от центра точки лежат внутри круга. В самом деле, ABC – равносторонний треугольник со стороной 20 см. Тогда его высота $AO = 10\sqrt{3}$ см < 18 см, так как $\left(10\sqrt{3}\right)^2 = 300 < 324 = 18^2$.

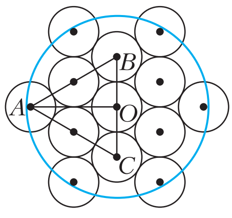

Рис. 8

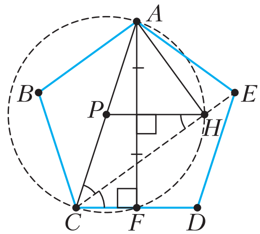

Рис. 9

3. Угол правильного пятиугольника равен 108°, тогда (рис.9) $\angle ECD = \angle CED = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$, а $\angle ACD = 108° - 36° = 72°$. Таким образом, CE содержит биссектрису треугольника ACF и, следовательно, пересекает серединный перпендикуляр к стороне AF в точке, лежащей на описанной около этого треугольника окружности. Но $\angle F$ прямой, значит, и $\angle AHC$ прямой, как опирающийся на ту же дугу.
4. За три взвешивания.
Отметим, что взвешивание любой группы монет может показать один из трех исходов: 0, 1 или 2 легкие монеты среди взвешенных. Действительно, эти исходы соответствуют показаниям весов в $10k$, $10k-1$ и $10k-2$ граммов, где k – количество монет на весах, а ничего другого при взвешивании k монет весы показать не могут.
Теперь докажем, что менее чем тремя взвешиваниями обойтись не получится. Всего пар монет, которые могут быть легкими, 24: по 3 пары соседних монет в каждой строчке и в каждом столбце. Так как одно взвешивание дает три разных исхода, то два взвешивания дадут лишь $3^2 = 9$ различных исходов.
Покажем, как определить легкие монеты за три взвешивания.