D. V. Karpov, The tree of cuts and minimal k-connected graphs, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2014, Volume 427, 22–40

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

Д. В. Карпов

ДЕРЕВО РАЗРЕЗОВ И МИНИМАЛЬНЫЙ k-СВЯЗНЫЙ ГРАФ

§1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$. Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.

Определение 2. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *отделяет* множество X от множества Y, если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

3) Будем говорить, что R *разделяет* множество $X \subset V(G)$, если не все вершины множества $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

4) Граф G называется *k-связным*, если $v(G) > k$ и он остается связным при удалении любого множества из не более чем $k - 1$ вершины.

5) k-связный граф G называется *минимальным*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.

Для описании структуры графа часто используются деревья. Стоит вспомнить классическое *дерево блоков и точек сочленения* связного

Ключевые слова: связность, дерево, минимальный k-связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ No. 14-01-00545-а.

графа (см., например, [7]). *Точки сочленения* – это одновершинные разделяющие множества, а блоки – минимальные по включению двусвязные подграфы связного графа.

Дерево блоков и точек сочленения графа G – это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой – всем его блокам $B_1, \dots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i \in V(B_j)$.

Несложно доказать, что определенный выше граф – именно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам. Именно структура дерева помогает работать с блоками и точками сочленения. Этот граф имеет и другие полезные свойства, с помощью которых получено немало результатов, причем не только в теории связности.

Однако, построение аналогичной структуры для графов большей связности затруднено в связи с тем, что разделяющие множества, состоящие более чем из одной вершины, могут быть *зависимы* (то есть, эти множества могут разбивать друг друга). В 1966 году Татт [3] построил дерево, отображающее структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. В статье [10] автор предложил похожую конструкцию и применил построенное дерево для оценки хроматического числа двусвязного графа и доказательства ряда других результатов.

Теперь рассмотрим k-связный граф. Любое его разделяющее множество содержит не менее k элементов. К сожалению, для $k > 2$ пока не известно аналогичной дереву блоков и точек сочленения конструкции – дерева, которое в общем случае описывало бы взаимное расположение k-вершинных разделяющих множеств. Для наборов из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств такая конструкция предложена автором в работе [10].

В этой работе мы построим *дерево разрезов* для описания взаимного расположения попарно независимых *разрезов* k-связного графа (разделяющих множеств, состоящих из k элементов и содержащих хотя бы одно ребро). Конструкция будет аналогична описанной в [10] конструкции дерева разбиения: вершинами этого дерева будут разрезы множества попарно независимых разрезов $\mathfrak{S}$ и части разбиения $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ графа G этим множеством разрезов.

В теореме 1 и следствии 1 доказан ряд свойств дерева разрезов, аналогичных свойствам дерева блоков и точек сочленения. Так, висячие вершины дерева разрезов соответствуют частям разбиения, а каждый разрез разделяет две части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ в дереве разрезов если и только если он их разделяет в графе G. Кроме того, с помощью дерева разрезов мы докажем, что $|\mathrm{Part}(\mathfrak{S})| = |\mathfrak{S}| + 1$ и выясним ряд полезных свойств частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

В минимальных k-связных графах каждое ребро входит хотя бы в один разрез. Поэтому описание структуры взаимного расположения разрезов важно для изучения таких графов. Как видно еще из классических работ Мадера [4]-[6], наиболее важно изучить в минимальном k-связном графе структуру множества рёбер, оба конца которых имеют степень хотя бы $k+1$. Обозначим множество таких рёбер через E_{k+1}. Мы докажем, что при $k \leqslant 5$ в минимальном k-связном графе можно выбрать множество попарно независимых разрезов $\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E_{k+1}}$, где S_e содержит ребро e и $k-1$ вершину. Отметим, что в работе [11] доказано аналогичное утверждение для произвольного k, но лишь для минимальных k-связных графов, содержащих минимальное возможное количество вершин степени k. С помощью дерева разрезов мы опишем ряд свойств минимальных k-связных графов при $k \leqslant 5$.

§2. Разрезы

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Во всей работе граф G будет k-связным.

Определение 3. 1) Будем называть *разрезом* k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ – множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез T и всех вершин, инцидентных рёбрам разреза T.

В работе [8] исследовались разрезы трёхсвязного графа.

Замечание 1. 1) Никакая вершина разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ (то есть, из множества $V(T)$) не может быть инцидентна никакому ребру из T.

2) Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2. Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e.

Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 4. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 – компоненты связности графа $G - T$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(T)$ *частями разбиения* графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$.

2) *Границами разреза* T мы будем называть множества вершин

$$A_1 \cap W(T) \quad \text{и} \quad A_2 \cap W(T).$$

Замечание 2. Пусть $T \in \mathfrak{T}_k(G)$, $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $A_1 \cup A_2 = V(G)$, $A_1 \cap A_2 = V(T)$.

2) Если множество $A' = A_1 \setminus W(T)$ непусто, то $A_1 \cap W(T)$ – одна из границ разреза T – отделяет A' от $V(G) \setminus A_1$. Каждая вершина $x \in A_1 \cap W(T)$ смежна хотя бы с одной вершиной из A'.

2.1. Части разбиения. Определим разбиение графа множеством из нескольких разрезов.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$.

Назовем *квазичастями* разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ множества вида

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}(S). \tag{1}$$

Частями разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$, а множество всех квазичастей – через $\mathrm{QPart}(G; \mathfrak{S})$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, будем писать просто $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$, $A \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$.

1) *Границей* квазичасти A будет множество $\mathrm{Bound}(A)$ всех вершин этой квазичасти, являющихся вершинами разрезов из $\mathfrak{S}$.

3) *Внутренностью* квазичасти A будет множество

$$\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Bound}(A).$$

4) Определим *граничный разрез* $\mathrm{Cut}(A)$ квазичасти A: он состоит из множества вершин $\mathrm{Bound}(A)$ и всех рёбер разрезов множества $\mathfrak{S}$, инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(A)$.

Замечание 3. 1) Пересечение двух различных квазичастей $A_1, A_2 \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ – это подмножество $V(S)$ для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}$.

2) Граничный разрез части не обязательно является разрезом. Для этого необходимо, чтобы $\mathrm{Cut}(A)$ содержал ровно k элементов и среди них было хотя бы одно ребро.

Лемма 1. *Для множества разрезов* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ *выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть квазичасть* $B \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ *не является частью* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда* $B \subset V(S)$ *для некоторого разреза* $S \in \mathfrak{S}$.

2) *Пусть* $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$, *причем* $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \varnothing$. *Тогда части* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *– это максимальные по включению множества вершин, представимые в виде*

$$A = A_1 \cap A_2, \quad \textit{где} \quad A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i). \tag{2}$$

Доказательство. 1) Пусть $B \subsetneq B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем

$$B = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} B_S, \quad B' = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} B'_S, \quad \text{где} \quad B_S, B'_S \in \mathrm{Part}(S).$$

Существует такое $S \in \mathfrak{S}$, что $B_S \neq B'_S$. Тогда $B \subset B_S \cap B'_S = V(S)$.

2) Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, тогда для $i \in \{1, 2\}$ существуют такие части $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$, что $A \subset A_i$. Пусть $A' = A_1 \cap A_2$. Тогда $A' \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ и $A \subset A'$, откуда по определению части следует, что $A = A'$. Таким образом, все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ представимы в виде (2).

Пусть $A = A_1 \cap A_2$ – максимальное по включению множество вида (2) и $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Очевидно, $A \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$. Значит, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $A \subsetneq B$. Как мы знаем, часть B представима в виде (2), что противоречит максимальности A. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, *причем* $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. *Пусть* $\overline{A}$ *– объединение всех отличных от* A *частей* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{Cut}(A)$ *отделяет* A *от* $\overline{A}$.

2) *Если* $|\mathrm{Cut}(A)| = k$ *и* $\mathrm{Cut}(A)$ *содержит хотя бы одно ребро, то* $\mathrm{Cut}(A)$ *– разрез с* $\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A)) = \{A, \overline{A}\}$.

Доказательство. 1) Отметим, что

$$A \cap \overline{A} = \mathrm{Bound}(A), \quad A \cup \overline{A} = V(G). \tag{3}$$

Любое ребро $e \in E(G)$, выходящее из $\mathrm{Int}(A)$ в $\overline{A} \setminus \mathrm{Bound}(A)$, соединяет две вершины, разделенные хотя бы одним из разрезов множества $\mathfrak{S}$, а значит, принадлежит одному из этих разрезов. Но тогда $e \in \mathrm{Cut}(A)$.

2) Из условия и пункта 1 следует, что $\mathrm{Cut}(A)$ – разрез. Значит, $|\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A))| = 2$. В силу (3) понятно, что $\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A)) = \{A, \overline{A}\}$. $\square$

§3. Независимые разрезы

Определение 7. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}_k(G)$ называются *независимыми*, если можно ввести такие обозначения $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$, что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T *зависимыми*.

Следующая несложная лемма доказана в [11].

Лемма 3. *Пусть разрезы $S, R, T \in \mathfrak{T}(G)$ таковы, что S и R независимы, а также T и R независимы. Пусть*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}, \quad \mathrm{Part}(R) = \{D_1, D_2\},$$

причем $D_1 \supset A_1$ и $D_2 \supset B_2$. Тогда разрезы S и T независимы.

Лемма 4. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{T}(G)$ независимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$ *причем $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $A_1 \supset \mathrm{Bound}(B_2)$, $\quad A_2 \not\supset \mathrm{Bound}(B_2)$.

2) *Если S и T не имеют общих рёбер, то*

$$A_1 \supset W(T) \quad \text{и} \quad A_2 \not\supset \mathrm{Bound}(B_1).$$

Доказательство. 1) Очевидно, $A_1 \supset B_2 \supset \mathrm{Bound}(B_2)$. Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{Bound}(B_2)$. Тогда

$$k - 1 = |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geqslant |\mathrm{Bound}(B_2)| = k,$$

что невозможно.

2) Пусть $b_1 b_2 \in T$, $b_i \in \mathrm{Int}(B_i)$. Мы знаем, что $b_2 \in A_1$. Если $b_2 \in S$, то $b_2 \in A_2 \subset B_1$, что неверно. Значит, $b_2 \notin S$. Поскольку $b_1 b_2 \notin S$, то вершины b_1 и b_2 не разделены разрезом S, то есть, $b_1 \in A_1$. Следовательно, $A_1 \supset W(T)$.

Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{Bound}(B_1)$. Тогда

$$k-1 = |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geqslant |\mathrm{Bound}(B_1)| = k,$$

что невозможно. $\square$

Определение 8. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ – множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. *Дерево разрезов* множества $\mathfrak{S}$ – это двудольный граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$: одну долю образуют разрезы из $\mathfrak{S}$, а вторую – части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем множество $S \in \mathfrak{S}$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда A содержит одну из границ разреза S.

2) Если часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$, то назовем такую часть *крайней*.

Теорема 1. *Пусть G – k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ – набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ – дерево.*

2) *Любой разрез $S \in \mathfrak{S}$ смежен в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ ровно с двумя частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем эти две части содержатся в разных частях $\mathrm{Part}(S)$.*

3) *Разрез $S \in \mathfrak{S}$ отделяет вершину B от вершины C в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ если и только если S отделяет множество B от множества C в графе G.*

4) *Если крайняя часть A смежна в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ с разрезом T, то $A \in \mathrm{Part}(T)$.*

5) *Крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ – это в точности минимальные по включению части среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Индукция по количеству разрезов. *База*: для $|\mathfrak{S}|=1$ все пять утверждений очевидны.

Индукционный переход. Пусть для любого меньшего чем $\mathfrak{S}$ множества разрезов утверждение уже доказано. Выберем разрез $T \in \mathfrak{S}$ так, что одна из частей $B \in \mathrm{Part}(T)$ – минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \setminus \{T\}$. Тогда граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ – дерево. Пусть ab – ребро разреза T, $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$.

Рассмотрим разрез $S \in \mathfrak{S}'$. Так как S и T независимы и в силу минимальности части $B \in \mathrm{Part}(T)$, существует такая часть $A_S \in \mathrm{Part}(S)$, что $B \subset A_S$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$. Тогда $B' \supset A'_S$. По лемме 4 мы имеем $A'_S \not\supset \mathrm{Bound}(B)$.

Введем описанные выше обозначения для всех разрезов $S \in \mathfrak{S}'$ и рассмотрим квазичасть

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}'} A_S \quad \in \quad \mathrm{QPart}(\mathfrak{S}').$$

Любая отличная от A часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ лежит в A'_S для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}'$ и потому $A' \not\supset \mathrm{Bound}(B)$. Отсюда следует, что $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.

Вспомним, что по лемме 1 части $D \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ – это максимальные по включению множества вида

$$D = H \cap F, \quad \text{где} \quad H \in \mathrm{Part}(T) \quad \text{и} \quad F = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}'} F_S \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}'). \qquad (4)$$

Разберем несколько случаев.

a. Пусть $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, $F \neq A$.

Тогда для некоторого $S \in \mathfrak{S}'$ мы имеем $F_S \neq A_S$ и поэтому $F_S = A'_S$. Следовательно, $B' \supset A'_S \supset F$. Поэтому $B \cap F \subsetneq F = B' \cap F$. Следовательно, все максимальные по включению множества вида (4), где $F \neq A$ – это части $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ и только они. Таким образом, все отличные от A части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ – это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

Отметим, что по лемме 4 часть $F_S = A'_S$ не содержит ни одно из множеств $\mathrm{Bound}(B)$ и $\mathrm{Bound}(B')$, следовательно, F не смежна в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с разрезом T. Таким образом, $\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(F) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(F)$.

b. $D = H \cap A$.

Если $H = B$, то $D = A \cap B = B$. Легко понять, что B – максимальное по включению множество вида (4), а значит, $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. По лемме 4 часть B не содержит никаких границ разрезов множества $\mathfrak{S}'$, следовательно, B – висячая вершина дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, смежная только с разрезом T.

Остается последний случай $D = A \cap B'$. Как мы знаем по лемме 4, часть B' содержит все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, которые лежат в A. Кроме того, для всех $S \in \mathfrak{S}'$ по лемме 4 мы имеем $A_S \supset \mathrm{Bound}(B')$, а значит, $A \supset \mathrm{Bound}(B')$. Следовательно, $D = A \cap B'$ содержит $\mathrm{Bound}(B')$ и все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, лежащие в A, а других границ разрезов из $\mathfrak{S}$ не содержит. Это означает, что

$$\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(D) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(A) \cup \{T\}.$$

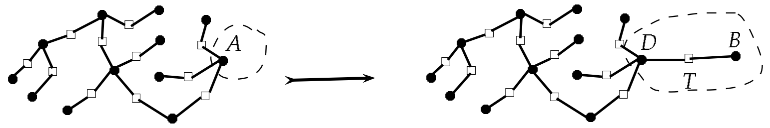

Рис. 1. Индукционный шаг построения дерева $T(G, \mathfrak{S})$.

Таким образом, граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ получается из $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ переименованием вершины A в D, присоединением к D разреза T, а к T – части B (см. рисунок 1).

1) и 2) Из сказанного выше ясно, что $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ – дерево. Отметим, что разрез T смежен в этом дереве с двумя частями, содержащими его границы – это B и $D \subset B'$, и других таких частей нет. Теперь понятно, что для дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ выполнено утверждение 2.

3) Мы доказали, что часть $B' \in \mathrm{Part}(T)$ содержит все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, кроме B и для каждого разреза $S \in \mathfrak{S}'$ часть B' содержит часть $A'_S \in \mathrm{Part}(S)$. Это означает, что разрез T отделяет крайнюю часть B от всех остальных частей и разрезов как в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, так и в графе G. Более того, T не отделяет друг от друга в графе G никакие отличные от B части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и разрезы из $\mathfrak{S}'$, так как все эти части и разрезы лежат в части $B' \in \mathrm{Part}(T)$.

Рассмотрим любой разрез $S \in \mathfrak{S}'$, напомним, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$, причем $A_S \supset B$. В графе G разрез S отделяет части и разрезы, содержащиеся в A_S от частей и разрезов, содержащихся в A'_S. Нам нужно доказать, что то же самое верно и для дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$. Из индукционного предположения для дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ следует, что это утверждение верно для разрезов из $\mathfrak{S}'$ и частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, являющихся частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ – а по доказанному выше это все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, кроме B и $D = A \cap B'$. Разрез S не отделяет в дереве $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ от остальных частей и разрезов, лежащих в A_S. Отметим, что $A_S \supset A = D \cup B$. По пункту 2 леммы 4 мы имеем $A_S \supset T$. Из построения $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ и сказанного выше следует доказываемое утверждение.

4) Для крайней части B утверждение выполнено. Любая другая крайняя часть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$, а значит, для нее существует такой разрез $T' \in \mathfrak{S}'$, что $H \in \mathrm{Part}(T')$.

5) Вспомним, что $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$, причем крайняя часть B была выбрана как минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$, а часть B', очевидно, таковой не является.

По индукционному предположению, крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ – это в точности минимальные по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}'$. Любая такая часть H осталась крайней и в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Так как $H \subset B' \in \mathrm{Part}(T)$, часть H является минимальной по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$. □

Определение 9. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. Мы построим граф $\mathrm{T}(G, \mathfrak{S})$ следующим образом: вершины этого графа – это части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда содержат границы одного и того же разреза из $\mathfrak{S}$.

Следствие 1. *Пусть G – k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ – набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф* $\mathrm{T}(G, \mathfrak{S})$ *– дерево.*

2) *Поставим в соответствие каждому ребру AB дерева* $\mathrm{T}(G, \mathfrak{S})$ *разрез из $\mathfrak{S}$, границы которого содержатся в частях A и B. Тогда это отображение – взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева* $\mathrm{T}(G, \mathfrak{S})$ *и разрезами из $\mathfrak{S}$.*

3) $|\mathrm{Part}(\mathfrak{S})| = |\mathfrak{S}| + 1$.

4) *Пусть R – граница одного из разрезов набора $\mathfrak{S}$. Тогда существует ровно одна часть* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, содержащая R.*

5) *Если части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в дереве $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с одним разрезом S, то $A \cap B = V(S)$.*

6) *Если части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в дереве $\mathrm{T}(G, \mathfrak{S})$, то $|A \cap B| = k - 1$.*

7) *Для части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ ее граница $\mathrm{Bound}(A)$ – это объединение границ разрезов, смежных с A в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$.*

Доказательство. 1) и 2) По теореме 1 граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ – дерево, причем все его вершины, соответствующие разрезам, имеют в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ степень 2. Из пункта 2 теоремы 1 понятно, что заменив в этом дереве каждый разрез $S \in \mathfrak{S}$ на ребро, соединяющие две смежные с ним в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, мы получим дерево $\mathrm{T}(G,\mathfrak{S})$, причем для этого дерева выполняется утверждение 2.

3) Непосредственное следствие утверждения 2.

4) Непосредственное следствие утверждения 2 теоремы 1.

5) По теореме 1 части A и B содержат разные границы разреза S, поэтому $A\cap B \supset V(S)$. Разрез S отделяет часть A от части B, поэтому $V(S) \supset A\cap B$.

6) По определению и пункту 2 теоремы 1, части A и B смежны в дереве $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ с одним разрезом S. Таким образом, пункт 6 следует из пункта 5.

7) По определению дерева разрезов, часть A содержит одну из границ каждого разреза, смежного с ней в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. Для каждого разреза $S' \in \mathfrak{S}$, не смежного с A, существует разрез $S \in \mathfrak{S}$, смежный в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ с A и отделяющий S' от A в дереве $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. По пункту 3 теоремы 1 тогда S отделяет S' от A и в графе G, а значит, $A\cap V(S') \subset A\cap V(S)$. Следовательно, все вершины из $\mathrm{Bound}(A)$ принадлежат границам разрезов, смежных с A в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. □

§4. Минимальные k-связные графы

Далее мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него следующие обозначения. Через V_k мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, $V_{k+1} = V(G)\setminus V_k$. Пусть E_{k+1} – множество рёбер графа G, оба конца которых лежат в V_{k+1}.

Поскольку граф G минимален, то для каждого ребра $e\in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k-1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ – множество всех таких разрезов. Мы изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

4.1. Пара зависимых разрезов. Пусть разрезы $S,T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем входящие в них рёбра различны,

$$\mathrm{Part}(S) = \{F_1,F_2\},\quad \mathrm{Part}(T) = \{H_1,H_2\},\quad G_{i,j} = F_i\cap H_j,$$

а $\overline{G}_{i,j}$ – объединение трёх отличных от $G_{i,j}$ частей. Тогда

$$\mathrm{QPart}(\{S,T\}) = \{G_{1,1},G_{1,2},G_{2,1},G_{2,2}\}.$$

Положим

$$P = T\cap S,\quad T_i = \mathrm{Int}(F_i)\cap T \quad \text{и} \quad S_j = \mathrm{Int}(H_j)\cap S.$$

Отметим, что множества P, T_i и S_j содержат только вершины. Пусть $R_{i,j} = \mathrm{Cut}(G_{i,j})$.

В дальнейшем для описания свойств пар зависимых разрезов мы будем употреблять именно такие обозначения.

Лемма 5. $|R_{i,j}| + |R_{3-i,3-j}| \leqslant |S| + |T| = 2k$.

Доказательство. Множество $R_{i,j}$ состоит из $P \cup T_i \cup S_j$ и рёбер разрезов T и S, Вершины из P в обеих частях считаются дважды, а остальные вершины и рёбра из S и T в левой части считаются не более чем один раз, а в правой части – ровно один раз. □

Следующие лемма и следствие доказаны в работе Мадера [4]. Доказательства этих утверждений достаточно несложны и также приведены в [11].

Лемма 6. *Пусть $ab, ac \in E_{k+1}$, $T_{ab} \ni ab$ и $T_{ac} \ni ac$ – разрезы из $\mathfrak{R}$, $a \in H_a \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ и $c \in F_c \in \mathrm{Part}(T_{ac})$. Тогда $|H_a| > |F_c|$.*

Следствие 2. *Граф G_{k+1} – лес.*

Нам потребуется несколько вспомогательных определений.

Определение 10. 1) Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ *кривым*, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(R)$ с $|\mathrm{Int}(A)| \leqslant 2$ и *нормальным*, если такой части не существует.

2) Назовем упорядоченную пару зависимых разрезов (S, T) из $\mathfrak{R}$ *плохой*, если существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(A) \subset T$.

3) Назовем неупорядоченную пару разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ *хорошей*, если обе упорядоченные пары (S, T) и (T, S) не являются плохими.

Лемма 7. *Пусть пара зависимых разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ – хорошая, ребро $b_1b_2 \in T$ не принадлежит разрезу S. Тогда существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ – разрез.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 5 следует, что $|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}|$. Это, в частности, означает, что

$$R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T.$$

Не умаляя общности, положим $b_1b_2 \in R_{1,1}$. Тогда разрез $R_{1,1}$ нам подходит. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$, а это означает, что пара (S,T) – плохая. Противоречие. $\square$

Лемма 8. *Пусть $k \leqslant 5$, а пара зависимых разрезов (S,T) из $\mathfrak{R}$ – плохая. Пусть $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1}. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1° *Разрез S – кривой, а разрез T – нормальный.*

2° *Существуют такие $i,j \in \{1,2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ – разрез.*

Доказательство. Не умаляя общности можно предположить, что $\mathrm{Int}(F_1) \subset T$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$. Тогда один из концов ребра $a_1a_2 \in T$ лежит в T_1. Пусть $a_1 \in T_1$ (см. рисунок 2a). Отметим, что $d_G(a_1) \geqslant k+1$ и все вершины, смежные с a_1, лежат в $T_1 \cup V(S) \cup \{a_2\}$. Следовательно, $|T_1| = t \geqslant 2$. Более того, вершина a_1 может быть несмежна не более чем с $t-2$ вершинами разреза S.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, мы имеем

$$\begin{gathered} |T_2| + |P| = k - t - 1 \quad \text{и} \\ |R_{2,1}| + |R_{2,2}| = |S| + 2(|T_2| + |P| + |\{b_1b_2\}|) \leqslant 3k - 2t. \end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим два случая.

1. $t = 2$.

Тогда a_1 смежна со всеми $k-1$ вершинами разреза S. Предположим, что $b_1 \in S$ (см. рисунок 2b). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ – часть, содержащая b_1. Очевидно, $b_1 \neq a_2$. Тогда по лемме 6 мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(F_1)| = 2$, следовательно, $\mathrm{Int}(A) = \{b_1\}$. Однако, тогда $d_G(b_1) \leqslant k$, противоречие.

Значит, $b_1 \notin S$ и, аналогично, $b_2 \notin S$. Тогда можно считать, что $b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1})$ и $b_2 \in \mathrm{Int}(G_{2,2})$ (см. рисунок 2a). В этом случае $|R_{2,1}| \geqslant k$ и $|R_{2,2}| \geqslant k$. Из $k \leqslant 5$ и неравенства (5) следует, что $|R_{2,1}| = k$ или $|R_{2,2}| = k$ (пусть выполнено первое равенство). Тогда $R_{2,1} \in \mathfrak{R}$ – разрез, содержащий ребро b_1b_2. Таким образом, $R_{2,1}$ удовлетворяет требованиям пункта 2.

Так как $|\mathrm{Int}(F_1)| = 2$, разрез S – кривой. Осталось доказать, что разрез T нормален. Докажем, что $|\mathrm{Int}(H_1)| \geqslant 3$. Как нам известно, $b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1})$ и $d_G(b_1) \geqslant k+1$. Не более двух рёбер может выходить из b_1 в вершины не из $G_{2,1}$ – это ребро b_1b_2 и, в случае, когда $a_2 = b_1$, ребро b_1a_1. Учитывая саму вершину b_1, получаем $|G_{2,1}| \geqslant k$. При этом,

$$|G_{2,1} \cap T| = |T_2 \cup P| \leqslant k - 3$$

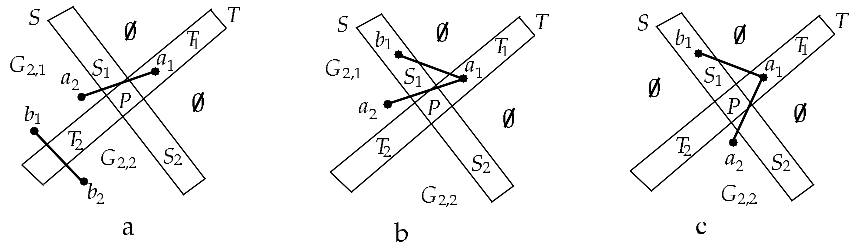

Рис. 2. Разбиение графа парой зависимых разрезов.

по неравенству (5). Значит, $|\mathrm{Int}(H_1)| \geqslant |G_{2,1} \setminus T| \geqslant 3$. Аналогично, $|\mathrm{Int}(H_2)| \geqslant 3$ и разрез T – нормален.

2. $t \geqslant 3$.
В силу (5) тогда $|R_{2,1}| + |R_{2,2}| < 2k$, а значит, можно считать, что $|R_{2,1}| < k$. В этом случае $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(H_1) = S_1$. Тогда один из концов ребра b_1b_2 лежит в S_1, пусть это b_1.

Предположим, что вершины b_1 и a_1 смежны (см. рисунок 2c). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ – часть, содержащая b_1. Очевидно, $b_1 \neq a_2$. Тогда по лемме 6 мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(H_1)|$. Как доказывалось выше, $|\mathrm{Int}(A)| \geqslant 2$, следовательно, $|S_1| = |\mathrm{Int}(H_1)| \geqslant 3$.

Пусть вершины b_1 и a_1 несмежны. Так как $d_G(b_1) \geqslant k+1$, а все вершины, смежные с b_1, лежат в $S_1 \cup (V(T) \cup \{b_2\})$, мы и в этом случае получаем $|S_1| \geqslant 3$.

Множество $R_{2,2}$ включает в себя вершины из P, S_2, T_2 и не более чем два ребра. Таким образом, во всех случаях,

$$|R_{2,2}| \leqslant (|S_2| + |P| + 1) + (|T_2| + 1) \leqslant (k - |S_1|) + (k - |T_1|) \leqslant 2k - 6 < k,$$

а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Но тогда $b_2 \in S_2$ и аналогично доказанному выше мы имеем $|S_2| \geqslant 3$, что невозможно. □

В завершении раздела сформулируем еще одну лемму из работы [11].

Лемма 9. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}$ – пара зависимых разрезов, причем $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1}, $R_{i,j} \ni b_1b_2$ и $|R_{i,j}| = k$. Тогда существует разрез $R \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1° $\mathrm{Part}(R) = \{G_{i,j}, U\}$, *причём либо $U = \overline{G}_{i,j}$, либо $U = \overline{G}_{i,j} \cup \{a\}$, где a – конец ребра a_1a_2, лежащий в $G_{i,j}$;*

2° *R независим и с S, и с T.*

4.2. О структуре минимальных k-связных графов.

Теорема 2. *Пусть $k \leqslant 5$, а G – минимальный k-связный граф. Тогда для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ можно выбрать содержащий e разрез $S_e \in \mathfrak{R}$ так, что все выбранные разрезы попарно независимы.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения искомого множества попарно независимых разрезов. Нам понадобятся два счетчика p и q. Изначально положим $p = q = 0$.

Шаг алгоритма.

1. Выбор ребра e.

Пусть перед шагом имеются попарно независимые разрезы: кривые $K_1, \dots, K_p$ и нормальные $N_1, \dots, N_q$ (если $p = 0$ или $q = 0$, то соответствующих разрезов нет). Пусть $e_i \in K_i$, $f_j \in N_j$, причем $e_1, \dots, e_p$, $f_1, \dots, f_q$ – различные рёбра из E_{k+1}. Пусть

$$\mathfrak{S} = \{K_1, \dots, K_p, N_1, \dots, N_q\}, \quad E' = E_{k+1} \setminus \{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q\}.$$

Рассмотрим ребро $e \in E'$, пусть $e \in T \in \mathfrak{R}$. Положим $\mathfrak{S}' = \varnothing$. *Мы будем по очереди рассматривать разрезы из $\mathfrak{S}$, совершать с ними последуюшие шаги, изменяющие разрез T, после чего добавлять рассмотренный разрез в множество $\mathfrak{S}'$.*

Перейдем к выбору разреза S.

2. Выбор разреза S.

Если разрез T – нормальный, то выберем любой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). Если разрез T – кривой, то выберем любой кривой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). В случаях, когда невозможно выбрать разрез S, мы перейдем к окончанию шага алгоритма.

Пусть мы смогли выбрать разрез S. Если разрезы S и T независимы, то мы поместим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S. Если разрезы S и T зависимы, то мы перейдем к преобразованию разреза T.

3. Преобразование разреза T.

Пусть

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

По выбору разреза S упорядоченная пара разрезов (S, T) не является плохой. Тогда по леммам 7, 8 и 9 существует такой разрез $R \ni e$, что одна из частей $\mathrm{Part}(R)$ – это $G_{\alpha,\beta}$, а другая часть U – либо $\overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $\overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a – конец ребра $e = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Докажем, что R независим с произвольным разрезом $S' \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S') = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S и S' независимы, разрезы T и S' независимы, а разрезы S и T зависимы, по лемме 3 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{6}$$

Разберем несколько случаев.

a. $\alpha = 2$.

Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 3a), то есть, R и S' независимы.

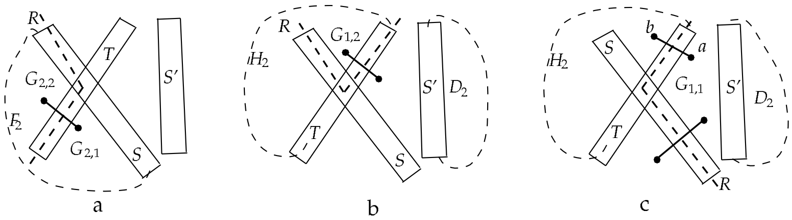

Рис. 3. Разрезы S, S' и T.

b. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

b1. $\beta = 2$.

Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 3b), что означает независимость разрезов S' и R.

b2. $\beta = 1$.

В силу (6) мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 3c). Так как S и S' не имеют общих рёбер, по пункту 2 леммы 4 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит, $D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U$.

Из $D_1 \supset F_2$ и независимости разрезов S и S' следует, что

$$D_2 \cap \mathrm{Int}(F_2) = \varnothing.$$

Следовательно, $D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}$. Таким образом, мы проверили независимость разрезов S' и R.

Положим $T = R$, добавим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S.

4. Окончание шага агоритма.
Если разрез T – нормальный, то рассмотрены все разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. Тогда положим $N_{q+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $q = q + 1$.

Пусть разрез T – кривой. Тогда рассмотрены все кривые разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. В этом случае положим $K_{p+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $p = p + 1$. Кроме того, положим $q = 0$ и удалим все разрезы $N_1, \dots, N_q$ из $\mathfrak{S}$.

Вернемся к выбору следующего ребра e.

На этом описание шага алгоритма закончено.

В результате действия каждого шага алгоритма либо увеличится p, либо p не изменится и при этом увеличится q. Поэтому алгоритм обязательно закончит работу, в результате получится искомое множество попарно независимых разрезов. □

Далее пусть G – минимальный k-связный граф, а множество

$$\mathfrak{C} = \{S_e\}_{e \in E_{k+1}} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e$$

состоит из попарно независимых разрезов.

Частным случаем леммы 8 из [11] является следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть $k \leqslant 5$, а G – минимальный k-связный граф. Пусть R – граница разреза $S_e \in \mathfrak{C}$. Тогда все вершины из $V_{k+1} \cap R$ принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}.*

Для набора из попарно независимых разрезов $\mathfrak{C}$ можно определить деревья $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{C})$ и $\mathrm{T}(G, \mathfrak{C})$. Эти деревья показывают взаимное расположение разрезов множества $\mathfrak{C}$ и частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Существует взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева $\mathrm{T}(G, \mathfrak{C})$ и рёбрами из E_{k+1}. Поэтому, деревья $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{C})$ и $\mathrm{T}(G, \mathfrak{C})$ показывают также структуру взаимного расположения рёбер из множества E_{k+1}. Кроме того, для изучения структуры минимального k-связного графа теперь можно использовать многочисленные свойства, доказанные в теореме 1 и следствии 1.

В заключение мы докажем ряд свойств частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, использующих минимальность графа G.

Следствие 4. *Пусть $k \leqslant 5$, G – минимальный k-связный граф, $\mathfrak{C}$ – определенное выше множество разрезов, а $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть A – крайняя часть, смежная в* $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ *с разрезом* S_{ab}. *Тогда* $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. *Часть A содержит хотя бы k вершин степени k, хотя бы одна из них принадлежит* $\mathrm{Int}(A)$.

2) *Вершины множества $A \cap V_{k+1}$ попарно несмежны.*

Доказательство. 1) По пункту 4 теоремы 1 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. Пусть $a \in \mathrm{Int}(A)$. Тогда $\mathrm{N}_G(a) \setminus \{b\} \subset A$.

Предположим, что $ax \in E_{k+1}$, $x \neq b$. По следствию 3 мы знаем, что $x \notin \mathrm{Bound}(A)$, следовательно, $x \in \mathrm{Int}(A)$. Теперь рассмотрим разрез S_{ax}, пусть $x \in X \in \mathrm{Part}(S_{ax})$. Тогда $\mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{Int}(A) \ni x$, но $\mathrm{Int}(X) \not\ni a$. Из независимости разрезов S_{ax} и S_{ab} следует, что $X \subsetneq A$, что противоречит пункту 3 теоремы 1.

Таким образом, вершина a смежна с k вершинами части A и все эти вершины имеют степень k. Так как S_{ab} содержит не более $k-1$ вершины, хотя бы одна из смежных с a вершин степени k лежит в $\mathrm{Int}(A)$.

2) Если вершины $x, y \in A \cap V_{k+1}$ смежны, то разрез $S_{xy} \in \mathfrak{C}$ разделяет две вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, что невозможно. $\square$

Литература

1. G. A. Dirac, *Minimally 2-connected graphs.* — J. Reine Angew. Math. **268** (1967), 204–216.
2. M. D. Plummer, *On minimal blocks.* — Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 85–94.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
5. W. Mader, *On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs.* — In: Combinatorics, Paul Erdös is Eighty, Budapest, Vol.2 (1996), pp.423–449.
6. W. Mader, *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
7. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, “Мир”, 1973.
8. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
11. Д. В. Карпов, *Минимальные k-связные графы с минимальным числом вершин степени k.* Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 41–65.

Karpov D. V. The tree of cuts and minimal k-connected graphs.

A cut of a k-connected graph G is its k-element cutset which contains at least one edge. *The tree of cuts* of a set $\mathfrak{S}$, consisting of pairwise independent cuts of a k-connected graph is defined as follows. Its vertices are cuts of the set $\mathfrak{S}$ and parts of the decomposition of G by the cuts of $\mathfrak{S}$. A part A is adjacent to a cut S if and only if A contains all vertices of S and one end of each edge of S. It is proved that the graph described above is a tree and have properties similar to properties of classic tree of blocks and cutpoints.

In the second part of the paper the tree of cuts is applied to study properties of minimal k-connected graphs for $k \leqslant 5$.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Математико-механический
факультет СПбГУ,
С.Петербург, Россия
E-mail: `dvk0@yandex.ru`

Поступило 7 ноября 2014 г.