



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Бабажанов, А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 298–305

<https://www.mathnet.ru/de11237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 мая 2025 г., 00:25:22



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2005 г. Б. А. Бабаджанов, А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов

В работе [1] Б.А. Дубровиным получена система дифференциальных уравнений для спектральных параметров оператора Штурма–Лиувилля с конечнозонным потенциалом, а в [2] Е. Трубовицем выведена аналогичная система уравнений в случае периодического потенциала и с ее помощью установлена связь между аналитичностью потенциала и порядком убывания длин лакун в спектре. Подобные результаты получены в работе [3] для оператора Дирака.

В настоящей работе для уравнения

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \quad (1)$$

с π -периодическими действительными коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$ выведен аналог системы уравнений Дубровина–Трубовица, доказана разрешимость этой системы, установлена связь между аналитичностью коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и порядком убывания длин лакун, а также получены тождества для квадратов нормированных собственных функций периодической и антипериодической задач для уравнения (1). При доказательстве основных результатов мы существенно используем методы работ [2, 3].

Рассмотрим операторный пучок $T(\lambda)$, порожденный в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ выражением (1) и имеющий в нем максимальную область определения. Те комплексные значения параметра λ , для которых $T^{-1}(\lambda)$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем $L_2(-\infty, \infty)$, называются регулярными точками пучка $T(\lambda)$. Дополнение в комплексной плоскости ко множеству регулярных точек называется спектром пучка $T(\lambda)$.

Спектральные задачи для пучка $T(\lambda)$ хорошо изучены в работах [4–7]. В частности, из [5] следует, что при выполнении условий

- а) функции $p(x)$, $q(x)$ определены на R^1 , π -периодичны, $q(x) \in L_2[0, \pi]$, $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$;
- б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условию $y'(0)\bar{y}(0) - y'(\pi)\bar{y}(\pi) = 0$, выполняется неравенство

$$\int_0^\pi \{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\} dx > 0$$

спектр пучка $T(\lambda)$ непрерывен и состоит из последовательности сегментов, разделенных лакунами, т.е. спектр имеет вид

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+), \quad (2)$$

причем лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$ (будем обозначать ее через $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$), всегда является невырожденной.

Будем считать всюду, что условия а) и б) выполняются. Для уравнения (1) функции Вейля–Титчмарша имеют вид

$$m^\pm(\lambda) = \frac{\varphi'(\pi, \lambda) - \theta(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2\varphi(\pi, \lambda)}, \quad (3)$$

где $\theta(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0, \lambda) = 1$, $\theta'(0, \lambda) = 0$ и $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$.

Концы лагун являются собственными значениями либо периодической $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, либо антипериодической $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ граничной задачи для уравнения (1) и состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$, где $\Delta(\lambda) = \theta(\pi, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda)$.

Определение 1. Нули ξ_n , $n \in Z \setminus \{0\}$, функции $\varphi(\pi, \lambda)$ (знаменателя в выражении (3)) и знаки

$$\sigma_n = \text{sign}\left(\frac{1}{\varphi'(\pi, \xi_n)} - \varphi'(\pi, \xi_n)\right) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

называются спектральными параметрами уравнения (1).

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n \in Z \setminus \{0\}$, и границы λ_n^-, λ_n^+ , $n \in Z \setminus \{0\}$, спектра назовем спектральными данными уравнения (1).

Из работы [5] следуют оценки

$$\lambda_n^- \leq \xi_n \leq \lambda_n^+, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad \lambda_n^\pm = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^\pm}{n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n^\pm|^2 < \infty,$$

где c_0, c_1 не зависят от n .

1. Теорема 1. Если $u(x) = q(x) - ip(x) \in C^1(R^1)$ - π -периодический потенциал уравнения (1), имеющий спектр (2) и спектральные параметры $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $\sigma_n = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$, то для любого действительного параметра $t \in R^1$ уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \tag{4}$$

имеет тот же спектр E и спектральные параметры

$$\xi_n(t) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n(t) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n(t)}{dt} &= -2\sigma_n(t)[(\xi_n(t) - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n(t))]^{1/2} \times \\ &\times \left[(\xi_n(t) - \lambda_0^-)(\xi_n(t) - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_k^-)(\xi_n(t) - \lambda_k^+)}{(\xi_n(t) - \xi_k(t))^2} \right]^{1/2}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \end{aligned} \tag{5}$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n(0) = \xi_n, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

где корни понимаются в арифметическом смысле и знак $\sigma_n(t)$ изменяется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами лагуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

Доказательство. Легко видеть, что $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, являются собственными значениями задачи Дирихле $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ на отрезке $[0, \pi]$ для уравнения (4). Пусть этим собственным значениям соответствуют нормированные собственные функции $y_n(x, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Тогда, дифференцируя по t равенство

$$-(y_n'', y_n) + (q(x+t)y_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) - \xi_n^2(t) = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} &-(\dot{y}_n'', y_n) - (y_n'', \dot{y}_n) + (q'(x+t)y_n + q(x+t)\dot{y}_n, y_n) + (q(x+t)y_n, \dot{y}_n) + 2\dot{\xi}_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) + \\ &+ 2\xi_n(t)(p'(x+t)y_n + p(x+t)\dot{y}_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, \dot{y}_n) - 2\dot{\xi}_n(t)\xi_n(t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\vartheta} \equiv d\vartheta/dt$, $\vartheta' \equiv d\vartheta/dx$ и (\cdot, \cdot) - скалярное произведение пространства $L_2(0, \pi)$. Из последнего равенства находим

$$(-\dot{y}_n'' + q(x+t)\dot{y}_n + 2\xi_n(t)p(x+t)\dot{y}_n, y_n) +$$

$$+ (q'(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p'(x+t)y_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n, y_n) - 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = 0,$$

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = ([q'(x+t) + 2\xi_n(t)p'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n, y_n),$$

т.е.

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi \{[q'(x+t) + 2\xi_n(t)p'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n^2(x,t)\} dx. \quad (6)$$

Интегрируя по частям в равенстве (6), имеем

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = y_n'^2(0,t) - y_n'^2(\pi,t) + 2\dot{\xi}_n(t) \int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t) dx. \quad (7)$$

Вводя решения $\theta(x,t,\lambda)$ и $\varphi(x,t,\lambda)$ уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0,t,\lambda) = 1$, $\theta'(\pi,t,\lambda) = 0$, $\varphi(0,t,\lambda) = 0$, $\varphi'(\pi,t,\lambda) = 1$, и используя равенства

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)}\varphi(x,t,\xi_n(t)), \quad 2\xi_n \int_0^\pi \varphi^2(x,\xi_n) dx = \varphi'(\pi,\xi_n) \frac{\partial \varphi(\pi,\xi_n)}{\partial \lambda} + 2 \int_0^\pi p(x)\varphi^2(x,\xi_n) dx,$$

$$\varphi(\pi,t,\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k}, \quad \Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2},$$

преобразуем тождество (7), откуда получим систему (5).

Выполнение начальных условий очевидно. Из того, что функция Ляпунова уравнения (4) не зависит от t (см. [5]), следует независимость спектра этого уравнения от параметра t . Теорема 1 доказана.

Для дальнейшего упрощения системы уравнений Дубровина–Трубовица (5) сделаем замену переменных

$$\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (8)$$

Начальные условия возьмем в виде

$$x_n(0) = \arcsin \left[\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} \right]^{1/2}, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Тогда система (5) примет вид

$$\frac{dx_n}{dt} = H_n(\dots, x_{-1}, x_1, \dots), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (10)$$

где $H_n(x) = -\sigma_n(0)h_n(\xi)$, $\xi_n = \xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$,

$$h_n = \left[(\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right]^{1/2}.$$

Для изучения задачи Коши (10), (9) введем банахово пространство

$$K = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |x_n| < \infty, x_n \in C \right\},$$

обозначим $H = (\dots, H_{-1}, H_1, \dots)$ и запишем систему (10) в банаховом пространстве K в виде одного уравнения $dx/dt = H(x)$.

Докажем, что $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в пространстве K . Введем множество $D = \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} D_k$, где $D_k, k \in Z \setminus \{0\}$, – непересекающиеся открытые круги. Круг D_k находится в λ -плоскости, содержит замкнутую лауну $[\lambda_k^-, \lambda_k^+]$, центр его находится в точке $(\lambda_k^- + \lambda_k^+)/2$ и радиусы r_k для достаточно больших $|k|$ определяются формулами

$$r_k = \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{2} + \frac{1}{k^2}.$$

Как и в работе [2], доказываются следующие утверждения:

- 1) если $\xi \in D$, то выполняются оценки $h_n = O(n), n \rightarrow \infty, dh_n/d\xi_k = O(1), |n| \rightarrow \infty$;
- 2) если $x, y \in K$, то $|h_n(\xi) - h_n(\eta)| \leq c\|x - y\|$, где $c = \text{const}, \xi_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n, \eta_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 y_n$;
- 3) если $x, y \in K$, то $\|H(x) - H(y)\| \leq \text{const} \cdot \|x - y\|$.

Из условия 3) следует, что бесконечная система уравнений (10) имеет единственное решение при любых начальных данных, взятых из множества K , и это решение существует для всех $t \in R^1$.

При помощи системы уравнений Дубровина–Трубовица изучается связь длин лаун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1).

Теорема 2. Если $p(x), q(x)$ – π -периодические действительные функции из класса $C^2(-\infty, \infty)$ и длины лаун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0, b > 0$, для которых $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$ при любых целых n , то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.

Доказательство. Нетрудно показать, что если $|y_n| \leq (b/4)|n|$, то

$$\xi_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 z_n \in D_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n, n \in Z \setminus \{0\}$.

Рассмотрим множество F комплексных последовательностей $z = (\dots, z_{-1}, z_1, \dots)$ с действительной частью $x = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots)$ из пространства K и мнимой частью $|y_n| \leq (b/4)|n|, n \in Z$. Очевидно, что $F \subset K$.

Значит, на множестве F для $H(z)$ выполняется условие Липшица.

Исследуем последовательность вектор-функций

$$z_n^{(0)}(t) = x_n(0) = \arcsin \left[\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} \right]^{1/2}, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

$$z_n^{(m+1)}(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(\dots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \dots) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где t – комплексный аргумент. Из неравенства

$$|y_n^{(m+1)}(t)| \leq \left| \int_0^t H_n(\dots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \dots) ds \right| \leq c|t| |n|$$

при $|t| \leq b/(4c)$ получим оценки $|y_n^{(m)}(t)| \leq (b/4)|n|, m = 0, 1, 2, \dots$

Значит, для $|t| \leq b/(4c)$ последовательность вектор-функций $z^{(m)}(t)$ принадлежит множеству F . Используя условие Липшица, можно показать равномерную сходимость этой последовательности в круге $|t| \leq b/(4c)$.

Из того, что члены последовательности $z^{(m)}(t)$ являются голоморфными вектор-функциями в круге $|t| \leq b/(4c)$, в силу теоремы Вейерштрасса следует голоморфность предельной вектор-функции $z(t)$ в этом круге. Отсюда вытекает голоморфность функций $\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 z_n(t)$ в круге $|t| \leq b/(4c)$.

Из равномерной сходимости рядов

$$\tilde{p}(t) = \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (11)$$

$$\tilde{q}(t) + 2\tilde{p}^2(t) = \frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right) \quad (12)$$

следует голоморфность их сумм $\tilde{p}(x)$, $\tilde{q}(t) + 2\tilde{p}^2(t)$.

При действительных t суммы рядов (11) и (12) в силу формул следов превращаются в функции $p(t)$ и $q(t) + 2p^2(t)$. Отсюда следует аналитичность в окрестности нуля коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$.

Рассмотрев вместо уравнения (1) уравнение

$$-y'' + q(x + t_0)y + 2\lambda p(x + t_0)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1,$$

где t_0 – действительное фиксированное число, установим аналитичность функций $p(t + t_0)$ и $q(t + t_0)$ в точке $t = 0$. Значит, функции $p(t)$ и $q(t)$ аналитичны в точке t_0 . Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $p(t)$ и $q(t)$ – действительные аналитические π -периодические функции, то длины лагун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ убывают экспоненциально.

Доказательство. Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' + q(x + it)y + 2\lambda p(x + it)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (13)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (14)$$

при действительных t . Из работы [6] следует, что собственные значения задачи (13), (14) имеют следующую асимптотику:

$$\xi_n(it) = n + \text{const} + O(1/n), \quad |n| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Из непрерывности $\xi_n(it)$ по t вытекает, что оценка (15) является равномерной для ограниченных промежутков.

Лемма 1. Для достаточно больших $|n|$ и для некоторой положительной постоянной c на множестве D выполняется оценка $|\text{Re } h_n| > c|n|$.

Доказательство. Пусть

$$A_n = \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}, \quad \xi \in D.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \prod_{k \neq n, 0} \left(1 + \frac{\lambda_k^+ \lambda_k^- - \xi_k^2 - \xi_n(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right) = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \neq n, 0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\lambda_k^+ \lambda_k^- - \xi_k^2 - \xi_n(\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \neq n, 0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi_n} (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k) + O\left(\frac{1}{\xi_n^2}\right) \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\xi_n} \sum_{k \neq n, 0}^{\infty} (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k) + O\left(\frac{1}{\xi_n^2}\right) \right\} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad |n| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поэтому для достаточно больших $|n|$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} A_n > 1/2$. Отсюда для достаточно больших $|n|$ получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} h_n|^2 &\geq \operatorname{Re} h_n^2 = \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)A_n) = \\ &= \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Re} A_n - \operatorname{Im}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Im} A_n \geq c^2 n^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Воспользовавшись уравнением (4), нетрудно показать аналитичность спектральных параметров $\xi_n(t)$. Из (8) и (9) следует аналитичность $x_n(t)$. Продолжим решение $x_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, на мнимые аргументы.

Из уравнений Дубровина–Трубовица вытекает тождество

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(\dots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \dots) d\tau,$$

которое выполняется и при достаточно малых комплексных t . В частности, при $t = is$, $s \in R^1$, достаточно малом:

$$x_n(is) = x_n(0) + \int_0^{is} H_n(\dots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \dots) d\tau. \tag{16}$$

В равенстве (16) сделаем замену переменных $\tau = i\omega$, тогда оно примет вид

$$x_n(is) = x_n(0) + \int_0^s i H_n(\dots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \dots) d\omega.$$

Отсюда находим, что

$$|\operatorname{Im} x_n(is)| = \left| \int_0^s \operatorname{Re} H_n(\dots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \dots) d\omega \right| = |s \operatorname{Re} H_n(\dots, x_{-1}(i\omega_0), x_1(i\omega_0), \dots)| \geq c_1 |n|$$

для малых s и достаточно больших $|n|$. Из асимптотики для $\xi_n(is)$ и последнего неравенства получаем неравенство

$$o(1) = |\xi_n(is) - \lambda_n^-| = (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |\sin x_n(is)|^2 \geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} x_n(is)) \geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(c_1 |n|).$$

Таким образом, для некоторых $a > 0$, $b > 0$, начиная с некоторого значения $|n|$, выполняется неравенство $\lambda_n^+ - \lambda_n^- \leq a e^{-b|n|}$. Теорема 3 доказана.

2. В работах [8, 9] получено тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k}^2(x) = 1$$

для квадратов ортонормированных собственных функций $\varphi_{2k}(x)$, соответствующих собственным значениям λ_{2k} оператора Штурма–Лиувилля с периодическими и антипериодическими граничными условиями. Здесь ε_k зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ и является положительным, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} > 0$, и ε_k равно нулю, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = 0$. Это тождество играет важную роль при сведении спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с конечнозонным потенциалом к задаче Неймана о движении точки на сфере единичного радиуса под действием квадратичного потенциала (см. [10, 11]). Отметим, что подобные тождества имеются и в работах [3, 12].

В этом пункте получим некоторые тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Обозначим через

$$\dots, y_{-1}^-(x), y_{-1}^+(x), y_0^-(x), y_0^+(x), y_1^-(x), y_1^+(x), \dots \quad (17)$$

нормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- \leq \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots$ периодической или антипериодической задачи на отрезке $[0, \pi]$.

Теорема 4. Для функций (17) выполняются тождества

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{f'(\lambda_k^-)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-} \int_0^{\pi} p(t) \varphi(\pi, \lambda_k^-, t) dt \right\} (y_k^-(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}, \quad (18)$$

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{g'(\lambda_k^+)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^+)}{2\lambda_k^+} + \frac{1}{\lambda_k^+} \int_0^{\pi} p(t) \varphi(\pi, \lambda_k^+, t) dt \right\} (y_k^+(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \frac{c}{2}, \quad (19)$$

где

$$f(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^-}{k}, \quad g(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^+}{k}, \quad c = \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-), \quad (20)$$

и $\varphi(x, \lambda, t)$ - решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0, \lambda, t) = 0$, $\varphi'(0, \lambda, t) = 1$ (t - действительный параметр).

Доказательство. Используя разложение

$$\varphi(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k(t)}{k},$$

изучим при $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($\lambda \in C$) асимптотику функции

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= \left[\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-} \right]^{1/2} \left[\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} \frac{\lambda - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\exp \left\{ \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\lambda_k^- - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-} \right) \right\} \right]^{1/2} \left[\exp \left\{ \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} + \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+} \right] \right\} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- - \lambda_k^+) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right\} \right]^{1/2} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right\} \right]^{1/2} = \\ &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left(p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

При выводе асимптотики (21) мы воспользовались обозначениями (20) и формулами следов

$$\lambda_0^- + \lambda_0^+ + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) = 2p(t).$$

Согласно теореме Миттаг-Леффлера,

$$\frac{\varphi(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = 1 + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} \frac{1}{\lambda - \lambda_k^-},$$

следовательно,

$$\frac{\varphi(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\lambda \in C). \quad (22)$$

Приравнявая асимптотики (21) и (22), имеем

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}. \quad (23)$$

Далее нам понадобится

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\varphi(\pi, \lambda_k^-, t) = \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-} \int_0^\pi p(t) \varphi(\pi, \lambda_k^-, t) dt \right\} (y_k^-(t))^2.$$

Используя лемму 2, из (23) выводим тождество (18). Тождество (19) выводится аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б.А. // Функц. анализ. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–51.
2. Trubowitz E. // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
3. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. // Узб. мат. журн. 2001. № 3–4. С. 48–55.
4. Гусейнов Г.Ш. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 3. С. 14–21.
5. Гусейнов Г.Ш. // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1985. Вып. 6. С. 56–97.
6. Гусейнов Г.Ш. Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнений Штурма–Лиувилля. Баку, 1984 (Препринт / Ин-т физики АН АзССР: 113).
7. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. // Докл. АН АзССР. 1981. Т. 37. № 2. С. 19–23.
8. McKean H., Trubowitz E. // Comm. Pure and Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
9. Deift P., Trubowitz E. // Comm. Pure and Appl. Math. 1981. V. 34. P. 713–717.
10. Веселов А.П. // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 48–50.
11. Мозер Ю. // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 5 (221). С. 109–151.
12. Савин А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 6. С. 83–85.

Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию
30.05.2003 г.