N. M. Galin, Теплообмен в пограничном слое на пластине при заданном распределении теплового потока или температуры стенки с учетом начального необогреваемого участка,

TVT, 1969, Volume 7, Issue 5, 968–973

https://www.mathnet.ru/eng/tvt7591

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 7 *1969* *№ 5*

УДК 536.24:532.526

ТЕПЛООБМЕН В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ ПРИ ЗАДАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ИЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО НЕОБОГРЕВАЕМОГО УЧАСТКА

Н. М. Галин

Решением интегрального соотношения теплового потока найдены формулы для теплоотдачи в ламинарном и турбулентном пограничном слоях при произвольном законе распределения теплового потока с учетом начального необогреваемого участка. Задача о теплообмене при заданном законе распределения температуры стенки решается установлением соответствующего ему закона распределения теплового потока.

Рассмотрим пластину, обтекаемую жидкостью с постоянными свойствами. Для анализа используем интегральное соотношение для теплового пограничного слоя в форме [1]

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Re}_T{}^{**}\Delta T)=\frac{q_{\text{ст}}(x)}{\rho_\infty c_{p_\infty}\nu_\infty}. \tag{1}$$

Пусть участок пластины длиной x_0 не обогревается, а при $x > x_0$ задан тепловой поток $q_{\text{ст}}(x)$. Проинтегрируем (1) по x в пределах от x_0 до x:

$$\mathrm{Re}_T{}^{**}\Delta T=\frac{1}{\rho_\infty c_{p_\infty}\nu_\infty}\int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx$$

или

$$\mathrm{Re}_T{}^{**}=\mathrm{St}\cdot\mathrm{Re}_L\frac{\int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx}{q_{\text{ст}}(x)}. \tag{2}$$

Принимаем «закон теплообмена», согласно [1], в виде

$$\mathrm{St}=B\,\mathrm{Re}_T^{**\,-m}\mathrm{Pr}^{-n}. \tag{3}$$

Подставляя выражение для $\mathrm{Re}_T{}^{**}$ в (3), получим

$$\mathrm{St}=B^{1/m+1}\,\mathrm{Re}_L^{-m/(m+1)}\,\mathrm{Pr}^{-n/(m+1)}\left[\int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\Big/ q_{\text{ст}}(x)\right]^{-m/(m+1)}. \tag{4}$$

Ламинарный пограничный слой при заданном $q_{\text{ст}}(x)$. Для ламинарного пограничного слоя необходимо принять $B = 0{,}42$; $m = 1$; $n = {}^4/_3$. Тогда из (4) получим

$$\mathrm{Nu}_L=0{,}457\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}\left[q_{\text{ст}}(x)\Big/\int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{1/2}. \tag{5a}$$

Если за характерный размер принять x, то

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left[x q_{\text{ст}}(x) \Big/ \int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{1/2}. \tag{5б}$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть $q_{\text{ст}}(x) = B(x-x_0)^K$, тогда формула для теплоотдачи запишется в виде

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457\,(K+1)^{1/2}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{x}{x-x_0}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Зная коэффициент теплоотдачи, можно найти закон распределения температуры стенки, соответствующий заданному закону $q_{\text{ст}}(x)$. Из формулы (6) находим

$$\Delta T = q_{\text{ст}}(x)\,/\,\alpha_x = A(K+1)^{-1/2}(x-x_0)^{K+1/2}$$

или

$$\Delta T = c(x-x_0)^{\gamma}, \quad \text{где } \gamma = 1/2 + K.$$

Случай $T_{\text{ст}} = \mathrm{const}$ получается при $\gamma = 0$, $K = -1/2$ из формулы (6). При $x_0 = 0$ имеем

$$\mathrm{Nu}_x \approx 0{,}33\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

При $K = 0$ получаем случай $q_{\text{ст}} = \mathrm{const}$

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3},$$

что также совпадает с точным решением. При $K = -1$ из (6) получаем, что теплоотдача на пластине равна нулю. И это совпадает с точным решением [2]. Однако совпадение с точными решениями имеет место не всегда. При $K > 0$ формула (6) дает завышенные значения числа Nu, причем погрешность увеличивается с ростом K. Это хорошо видно из табл. 1.

Таблица 1

K	0	$1/2$	$3/2$	$5/2$
γ	$1/2$	1	2	3
$\mathrm{Nu}_T/\mathrm{Nu}_{(6)}$	1,0	0,95	0,90	0,86

Здесь Nu_T — числа Nu, найденные численным решением дифференциальных уравнений пограничного слоя при условиях теплообмена, указанных в таблице [2]; $\mathrm{Nu}_{(6)}$ — числа Nu, рассчитанные по формуле (6) при $x_0 = 0$.

Отмеченная погрешность связана с множителем

$$(K+1)^{1/2}(x\,/\,x-x_0)^{1/2}$$

и зависит от величины показателя степени. Это наводит на мысль, что и поправка на начальный необогреваемый участок определена также с некоторой погрешностью.

Сказанное будет более очевидным, если решить рассматриваемую задачу другим способом. Например, решим ее методом Польгаузена. Используем интегральное соотношение

$$(d/dx)\int\limits_0^{\delta_T} w\,(T_\infty - T)\,dy = q_{\text{ст}}(x)/\rho_\infty C_{p_\infty}. \tag{7}$$

Профиль температур выбираем в виде

$$T = T_\infty\left(a + b\frac{y}{\delta_T} + c\frac{y^2}{\delta_T^2} + d\frac{y^3}{\delta_T^3}\right). \tag{8}$$

При $y = 0$ используем условие $dT\,/\,dy = q_{\text{ст}}\,/\,\lambda$, остальные условия остаются такими же, как при решении задачи с условием $T_{\text{ст}} = \mathrm{const}$ [3].

Тогда для профиля температуры получим выражение

$$T = T_\infty\left[1 - \frac{q_{\text{ст}}}{\lambda}\frac{\delta_T}{T_\infty}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta_T^3}\right)\right], \tag{9}$$

подстановка которого в (8) вместе с профилем скорости

$$w = w_\infty[(3y/2\delta) - (y^3/2\delta^3)] \tag{10}$$

приводит к следующей формуле для теплоотдачи:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}42\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left[x q_{\text{ст}}(x) \Big/ \int_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{1/3}. \tag{11}$$

Для обсуждаемого частного случая $q(x) = B(x - x_0)^K$ получим

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}42(K+1)^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{x}{x - x_0}\right)^{1/3}. \tag{12}$$

При $K = -1/2$ ($T_{\text{ст}} = \text{const}$) и $K = -1$ формула (12) дает результат, совпадающий с точным решением. При $K > 0$ формула (12) дает числа Nu, заниженные по сравнению с точными значениями, причем ошибка увеличивается с ростом K (табл. 2).

Таблица 2

K	0	$1/2$	$3/2$	$5/2$
γ	$1/2$	1	2	3
$\mathrm{Nu}_T/\mathrm{Nu}_{(12)}$	1,08	1,11	1,14	1,155

Здесь Nu_T — то же, что и в табл. 1; $\mathrm{Nu}_{(12)}$ — числа Nu, рассчитанные по формуле (12) при $x_0 = 0$. Соотношение $\gamma = 1/2 + K$ справедливо и для формулы (12), но в этом случае только при $x_0 = 0$.

То, что в (12) ошибка увеличивается с ростом K, связано с множителем

$$(K+1)^{1/3}[x/(x - x_0)]^{1/3},$$

а именно со значением показателя степени, который оказывается заниженным, в то время как показатель $1/2$ в (6) был завышен.

Ничто, однако, не мешает так скорректировать показатель степени, чтобы формулы для теплоотдачи согласовывались с точными решениями при $x_0 = 0$ в широком диапазоне значений K. Промежуточное значение показателя, равное $2/5$, очень хорошо удовлетворяет этому требованию. Формула (6) для $x_0 = 0$ принимает вид

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457(K+1)^{2/5}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{13}$$

Формула (13) дает числа Nu, не более чем на 1% отличающиеся от точного решения в широком диапазоне значений K.

Но чтобы получить (13) из (5б), необходимо последнее записать в виде

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left[x q_{\text{ст}}(x) \Big/ \int_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{2/5}, \tag{14}$$

тогда при $q_{\text{ст}}(x) = B(x - x_0)^K$ получим

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}457(K+1)^{2/5}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}[x/(x - x_0)]^{2/5}. \tag{15}$$

На рисунке показано сравнение результатов расчетов по формуле (15) (сплошная линия) с опытными данными [4] по изучению влияния начального необогреваемого участка на теплоотдачу и с расчетами [1] (пунктир). Опыты проведены при граничном условии $\Delta T = C(x - x_0)$, т. е. при $\gamma = 1$. По оси ординат отложена величина

$$\beta = q_{\text{ст}}/0{,}332\lambda\,\mathrm{Re}_x^{\nu}\,\mathrm{Pr}^{1/3}C,$$

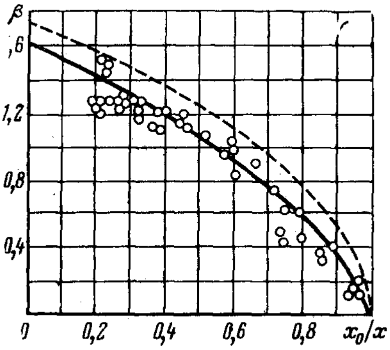
которая будет определена, если из (15) найти α_x, затем $q_{\text{ст}}$ как $\alpha_x C(x - x_0)$ и подставить это выражение $q_{\text{ст}}$ в β. Тогда при $K = 1/2$

$$\beta = 1{,}615[1 - (x_0/x)]^{3/5}.$$

Сплошная линия на графике соответствует этому выражению. Из графика видно, что во всем диапазоне x_0/x имеет место хорошее согласование расчета и опытных данных.

В [5] экспериментально изучалось влияние начального необогреваемого участка на теплоотдачу при граничном условии $\Delta T = C(x - x_0)^{0,4}$. Результаты опытов обобщены формулой

$$\mathrm{Nu}_{x_1} \sim \mathrm{Re}_{x_1}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}(x_1/x)^{1/5}.$$



Если за характерный размер принять x, то получим

$$\mathrm{Nu}_x \sim \mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}[x/(x - x_0)]^{2/5},$$

что совпадает с полученным выше.

Таким образом, значение показателя $2/5$ можно считать обоснованным не только при $x_0 = 0$, но и при наличии начального необогреваемого участка.

Ламинарный пограничный слой при заданной $T_{\text{ст}}(x)$. Решение задачи при граничных условиях первого рода, когда задан закон изменения температуры стенки

$$\Delta T = f(x), \tag{16}$$

можно найти, решая интегральное соотношение (1) при этом условии. Но есть и другая возможность: не решая исходного интегрального соотношения, задачу с условием (16) свести к решенной задаче с граничными условиями второго рода.

Используя (14), найдем ΔT:

$$\Delta T = q_{\text{ст}}(x)/\alpha_x = Ax^{1/10}q_{\text{ст}}(x)^{3/5}\left[\int_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{2/5}, \tag{17}$$

где $A = \nu^{1/2}/0{,}457\lambda w_\infty^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$.

Задача, таким образом, сводится к отысканию закона $q_{\text{ст}}(x)$, который после подстановки в (17) дает закон $\Delta T(x)$ в виде (16). Из (16) и (17) имеем

$$f(x) = Ax^{1/10}q_{\text{ст}}(x)^{3/5}\left[\int_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx\right]^{2/5} \tag{18}$$

Из этого уравнения необходимо найти $q_{\text{ст}}(x)$. Запишем его в виде

$$\varphi(x) = q_{\text{ст}}(x)^{3/2}\int_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\,dx, \quad \text{где} \quad \varphi(x) = A^{-5/2}x^{-1/4}f(x)^{5/2}.$$

Обозначим $g(x) = \varphi(x)/q_{\text{ст}}(x)^{3/2}$, тогда $q_{\text{ст}}(x) = \varphi(x)^{2/3}g(x)^{-2/3}$ и

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)^{-2/3}\varphi(x)^{2/3}\,dx. \tag{19}$$

Это нелинейное интегральное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$dg(x)\ /\ dx = g(x)^{-2/3}\varphi(x)^{2/3} \tag{20}$$

при граничном условии $g(x_0) = 0$. Последнее уравнение легко проинтегрировать:

$$g(x) = \left[{}^5/_3 \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x)^{2/3}\, dx \right]^{3/5}. \tag{21}$$

Но $g(x) = \varphi(x) q_{\text{ст}}(x)^{-3/2}$, поэтому

$$q_{\text{ст}}(x) = \varphi(x)^{2/3} \left[\frac{5}{3} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x)^{2/3}\, dx \right]^{-2/5}. \tag{22}$$

Подставив вместо $\varphi(x)$ его значение $A^{-5/2} x^{-1/4} f(x)^{5/2}$, получим

$$q_{\text{ст}}(x) = \left(\frac{5}{3} \right)^{-2/5} A^{-1} x^{-1/6} f(x)^{5/3} \left[\int\limits_{x_0}^{x} x^{-1/6} f(x)^{5/3}\, dx \right]^{-2/5}. \tag{23}$$

Пример. Если $\Delta T = C = \text{const}$, $x_0 = 0$, то из (23) получаем $q_{\text{ст}} = Bx^{-1/2}$, что и должно быть для данного случая.

Формула (23) не всегда удобна для практических расчетов. Если воспользоваться для теплоотдачи формулой (5б), то для $q_{\text{ст}}(x)$ получится более простое выражение:

$$q_{\text{ст}}(x) = 2^{-1/2} A^{-1} f^2(x) \Bigg/ \left[\int\limits_{x_0}^{x} f^2(x)\, dx \right]^{1/2}. \tag{24}$$

С целью упрощения выкладок для нахождения $q_{\text{ст}}(x)$ по заданной $f(x)$ может быть использована формула (24) с последующим расчетом по (14).

Турбулентный пограничный слой при заданном $q_{\text{ст}}(x)$. Из выражения (4) при $B = 0{,}0125$; $m = {}^1/_4$; $n = {}^3/_4$ для турбулентного пограничного слоя получаем

$$\text{Nu}_x = 0{,}03\, \text{Re}_x^{0{,}8} \text{Pr}^{0{,}4} \left[x q_{\text{ст}}(x) \Bigg/ \int\limits_{x_0}^{x} q_{\text{ст}}(x)\, dx \right]^{1/5}. \tag{25}$$

Для частного случая $q_{\text{ст}}(x) = B(x - x_0)^K$ имеем

$$\text{Nu}_x = 0{,}03(K+1)^{1/5} \text{Re}_x^{0{,}8} \text{Pr}^{0{,}4} [x/(x - x_0)]^{1/5}, \tag{26}$$

а $\Delta T = C(x - x_0)^{\gamma}$, $\gamma = K + {}^1/_5$.

Турбулентный пограничный слой при заданной $T_{\text{ст}}(x)$. Задача о теплообмене при заданных $\Delta T = f(x)$, так же как для ламинарного пограничного слоя, может быть сведена к задаче с заданным $q_{\text{ст}}(x)$. Если проделать все необходимые вычисления, то получим

$$q_{\text{ст}}(x) = \left(\frac{5}{4} \right)^{-1/5} A^{-1} f(x)^{5/4} \Bigg/ \left[\int\limits_{x_0}^{x} f(x)^{5/4}\, dx \right]^{1/5}. \tag{27}$$

Подстановка найденного таким образом $q_{\text{ст}}(x)$ в (25) позволяет найти число Nu.

Пример. Пусть требуется рассчитать теплоотдачу при условии, что $\Delta T = f(x) = C(x - x_0)$. Подставляя это выражение для $f(x)$ в (27), получаем

$$q_{ст} = B(x - x_0)^{4/5}.$$

Теперь с помощью (25) или (26) вычисляем число Nu:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}03(9/5)^{1/6}\,\mathrm{Re}_x^{0,8}\,\mathrm{Pr}^{0,4}[x/(x - x_0)]^{1/5},$$

что согласуется с опытными данными [4], а также с результатами, полученными в [1] для данного случая непосредственно из интегрального соотношения.

Замечание. В настоящей работе сознательно обойден вопрос о теплоотдаче при $q_{ст} \sim (x - x_0)^K$, где $K < -1$. На наш взгляд, этот случай заслуживает специального рассмотрения. Полученные формулы при таких условиях неприменимы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

x — продольная координата; x_0 — длина начального необогреваемого участка; w — скорость; T — температура; ρ, c_p, ν, λ — соответственно плотность, теплоемкость, кинематическая вязкость, теплопроводность; Pr — число Прандтля; δ_T^{**} — толщина потери энергии;

$\mathrm{Re}_T^{**} = w_\infty \delta_T^{**} / \nu$; $\mathrm{Re}_L = w_\infty L / \nu$; $\mathrm{Re}_x = w_\infty x / \nu$; $x_1 = x - x_0$; индекс ∞ означает, что рассматриваемая величина относится к области вне пограничного слоя; A, B, C, K, γ, m, n — постоянные.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 11 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев и др. Тепло- и массообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Изд. СО АН СССР, 1964.
2. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
3. Е. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк. Теория тепло- и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
4. R. Eichhorn, E. R. Eckert, A. D. Anderson. Trans. ASME, Ser. C, 82, № 4, 1960.
5. А. А. Жукаускас, А. Б. Амбразявичюс, И. И. Зюгжда. Инж.-физ. ж., № 4, 1964.