А. Ш. Шалданбаев, Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1982, номер 3, 6–11

A. I. Vagabov

MULTIPLE COMPLETENESS OF EIGENFUNCTIONS AND ADJOINT FUNCTIONS FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IRREGULAR BOUNDARY CONDITIONS

We consider an irregular problem of the form

$$y^n + \lambda p_1 y^{(n-1)} + \ldots + \lambda^n p_n y = 0, \tag{1}$$

$$y^{(\varkappa_i)}(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa_i} \alpha_{ik} y^{(\varkappa_i - k)}(0) = 0, \qquad i = \overline{1,l}, \tag{2}$$

$$y^{(\varkappa_i)}(1) + \sum_{k=1}^{\varkappa_i} \beta_{ik} y^{(\varkappa_i - k)}(1) = 0, \qquad i = \overline{l+1, n}; \qquad l > n - l, \tag{3}$$

The following theorem is proved. If all argument the roots of the characteristic equation of (1) are different then the system of eigenfunctions and adjoint function of the problem (1) to (3) is n-multiply complete in $L^2(0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений.— Докл. АН СССР, 1951, **77**, с. 11—14.
2. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.— Функц. анализ и его прил., 1976, **10**, вып. 4, с. 69—80.
3. Шкаликов А. А. О полноте и базисности собственных присоединенных функций краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Автореф. канд. дис. М., 1977.

Поступила в редакцию
17.05.79

УДК 517.43

А. Ш. Шалданбаев

ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В 1964 г. Б. М. Левитан предложил элементарный метод вычисления регуляризованных следов оператора Штурма — Лиувилля [1], но провел вычисления только для первого следа. В дальнейшем в работе [2] с помощью этого метода были вычислены следы высших порядков при нулевых граничных условиях. В настоящей работе, использовав метод исследований [1] и [2], мы вычислили следы высших порядков для периодической и антипериодической задач Штурма — Лиувилля. Интересно отметить, что все регуляризованные следы антипериодической задачи Штурма — Лиувилля равны нулю. Этот результат другим методом получил раньше Б. М. Левитан [3]. Недавно нам стало известно, что еще в 1954 г. Шефке вычислил первый след для периодической и антипериодической задач Штурма — Лиувилля и, в частности, установил равенство нулю первого следа для антипериодической задачи [4].

Отметим, что наиболее общий метод вычисления регуляризованных следов разработан в работе [5]. Однако, как нам кажется, в периоди-

ческой задаче Штурма — Лиувилля применяемый нами метод быстрее ведет к цели.

1. Рассмотрим периодическую и антипериодическую задачи Штурма — Лиувилля:

$$L[y] = -y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi), \tag{2}$$

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi). \tag{3}$$

Предположим, что $q(x)$ — периодическая с периодом π бесконечно дифференцируемая вещественная функция.

Обозначим через $\mu_0, \mu_2, \tilde{\mu}_2, \mu_4, \tilde{\mu}_4, \ldots$ и $\mu_1, \tilde{\mu}_1, \mu_3, \tilde{\mu}_3, \ldots$ собственные значения задач (1)—(2)—(3) соответственно. Известно [6], что

$$\mu_k = k^2 + c_0 + \frac{c_1}{k^2} + \ldots + \frac{c_p}{k^{2p}} + \ldots, \tag{4}$$

$$\tilde{\mu}_k = k^2 + c_0 + \frac{c_1}{k^2} + \ldots + \frac{c_p}{k^{2p}} + \ldots \tag{5}$$

Возведя обе части (4), (5) в степень m, получим

$$\mu_k^m = k^{2m} + d_{m1}k^{2m-2} + \ldots + d_{mm} + \frac{d_{m,m+1}}{k^2} + \ldots, \tag{6}$$

$$\tilde{\mu}_k^m = k^{2m} + d_{m1}k^{2m-2} + \ldots + d_{mm} + \frac{d_{m,m+1}}{k^2} + \ldots, \tag{7}$$

где

$$d_{mi} = \sum_{j=1}^{i} \binom{m}{j} \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_j=i-j} c_{n_1} c_{n_2} \ldots c_{n_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Из (6), (7) следует, что

$$s_m = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_{2k}^m - (2k)^{2m} - d_{m1}(2k)^{2m-2} - \ldots - d_{mm}] < \infty,$$

$$\tilde{s}_m = \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{\mu}_{2k}^m - (2k)^{2m} - d_{m1}(2k)^{2m-2} - \ldots - d_{mm}] < \infty,$$

$$l_m = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_{2k-1}^m - (2k-1)^{2m} - d_{m1}(2k-1)^{2m-2} - \ldots - d_{mm}] < \infty,$$

$$\tilde{l}_m = \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{\mu}_{2k-1}^m - (2k-1)^{2m} - d_{m1}(2k-1)^{2m-2} - \ldots - d_{mm}] < \infty.$$

Определение. *Числа* $S_m = \mu_0^m + s_m + \tilde{s}_m$, $M_m = l_m + \tilde{l}_m$ *называются* m*-ми регуляризованными следами задач* (1)—(2) *и* (1)—(3) *соответственно.*

Теорема. *Справедливы равенства*

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_j=m-j} c_{n_1} \cdot c_{n_2} \ldots c_{n_j}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{m-\frac{1}{2}}{j}\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_j=m-j} c_{n_1}c_{n_2}\ldots c_{n_j} =$$

$$=\frac{(2m-1)(-1)^{m+1}}{\pi\, 2^{2m-1}}\int_0^{\pi}\sigma_{2m-1}(t)\,dt, \tag{9}$$

$$M_m=0, \tag{10}$$

где

$$\sigma_1(x)=q(x),\quad \sigma_n(x)=-\sigma'_{n-1}(x)-\sum_{j=1}^{n-2}\sigma_{n-1-j}(x)\sigma_j(x). \tag{11}$$

В последующих пунктах излагается доказательство теоремы.

2. Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (1), которая определяется начальными данными

$$c(0,\lambda)=s'(0,\lambda)=1,\quad c'(0,\lambda)=s(0,\lambda)=0,$$

и положим $2F(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$. Как известно, собственные значения периодической задачи Штурма — Лиувилля на сегменте $[0,\pi]$ являются корнями функции $1-F(\lambda)$. Из грубых асимптотических формул для функции $F(\lambda)$ и собственных значений μ_0, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, μ_4, $\tilde{\mu}_4$, ... следует, что

$$1-F(\lambda)=-\frac{\pi^2}{2}(\mu_0-\lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_{2k}-\lambda)(\tilde{\mu}_{2k}-\lambda)}{(2k)^4}.$$

Из этого равенства, положив $\lambda=-\mu$, получим

$$c(\pi,-\mu)+s'(\pi,-\mu)-2=4(\mu_0+\mu)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_{2k}+\mu)(\tilde{\mu}_{2k}+\mu)}{(4k^2+\mu)(4k^2+\mu)}\,\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}}{\mu}. \tag{12}$$

Обозначим через $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$, $\tilde{\psi}(\mu)$ бесконечные произведения:

$$\psi(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{2k}+\mu}{4k^2+\mu},\quad \tilde{\psi}(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\mu}_{2k}+\mu}{4k^2+\mu},\quad \varphi(\mu)=\psi(\mu)\tilde{\psi}(\mu).$$

Логарифмируя равенство (12) и затем дифференцируя полученный результат по μ, получаем

$$\frac{1}{\mu_0+\mu}-\frac{1}{\mu}+\frac{d}{d\mu}\ln\varphi(\mu)=\frac{d}{d\mu}\ln[c+s'-2]-\frac{\operatorname{cth}\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}}{\sqrt{\mu}}\,\frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Равенство (13) лежит в основе доказательства теоремы. В дальнейшем будем изучать асимптотическое поведение обеих частей равенства (13) при больших μ, а затем, сравнив коэффициенты при одинаковых степенях μ слева и справа, получим доказательство теоремы.

3. Найдем асимптотическое разложение для левой части равенства (13):

$$\ln\psi(\mu)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu_{2k}-(2k)^2}{\mu+4k^2}\right]^j. \tag{14}$$

Из (4), (5) следует, что

$$[\mu_{2k}-(2k)^2]^j = c_0^{(j)} + \frac{c_1^{(j)}}{(2k)^2} + \ldots + \frac{c_p^{(j)}}{(2k)^{2p}} + \ldots, \tag{15}$$

$$[\widetilde{\mu}_{2k}-(2k)^2]^j = c_0^{(j)} + \frac{c_1^{(j)}}{(2k)^2} + \ldots + \frac{c_p^{(j)}}{(2k)^{2p}} + \ldots, \tag{16}$$

где

$$c_k^{(j)} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_j=k} c_{n_1}c_{n_2}\ldots c_{n_j}, \qquad k=1, 2, \ldots$$

Из (15), (16) следует

$$s_{jl} \overset{\text{опр}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\left\{[\mu_{2k}-(2k)^2]^j(2k)^{2l-2} - \sum_{r=0}^{l-1} c_r^{(j)}(2k)^{2l-2-2r}\right\} < \infty,$$

$$\widetilde{s}_{jl} \overset{\text{опр}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\left\{[\widetilde{\mu}_{2k}-(2k)^2]^j(2k)^{2l-2} - \sum_{r=0}^{l-1} c_r^{(j)}(2k)^{2l-2-2r}\right\} < \infty, \qquad l=1, 2, \ldots$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_{2k}-4k^2)^j}{\mu+4k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_{2k}-4k^2)^j}{\mu+4k^2} + c_0^{(j)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+4k^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{s_{ji}}{\mu^i} + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{c_i^{(j)}}{\mu^i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+4k^2}. \tag{17}$$

После несложных преобразований из (17) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_{2k}-4k^2}{\mu+4k^2}\right)^j = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}\,i\,(i+1)\ldots(i+j-2)}{(j-1)\,!}\left(s_{ji}-\frac{c_{i-1}^{(j)}}{2}\right)\frac{1}{\mu^{i+j-1}} +$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(i+\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(i+\frac{1}{2}+j-2\right)}{(j-1)!}\frac{c_i^{(j)}}{\mu^{i+j-\frac{1}{2}}}. \tag{18}$$

Умножаем обе части равенства (18) на $\frac{(-1)^{j-1}}{j}$ и суммируем по j в пределах от 1 до ∞. Результат дифференцируем один раз по μ и, принимая во внимание равенство (14), получаем

$$\frac{d}{d\mu}\ln\psi(\mu) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\left(s_{j,m-j+1}-\frac{c_{m-j}^{(j)}}{2}\right)\right]\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}} +$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m-\frac{1}{2}}{j}c_{m-j}^{(j)}\right]\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{19}$$

Из (19) в силу очевидных тождеств

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}s_{j,m-j+1} = s_m, \quad \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\widetilde{s}_{j,m-j+1} = \widetilde{s}_m$$

получим

$$\frac{d}{d\mu}\ln\psi(\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[s_m-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}c_{m-j}^{(j)}\right]\frac{1}{\mu^{m+1}}+$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m-\frac{1}{2}}{j}c_{m-j}^{(j)}\right]\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Учитывая сходство функций ψ и $\widetilde{\psi}$, мы можем найти асимптотическое разложение левой части равенства (13):

$$\frac{1}{\mu_0+\mu}-\frac{1}{\mu}+\frac{d}{d\mu}\ln\varphi(\mu)=\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m-\frac{1}{2}}{j}c_{m-j}^{(j)}\right]\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(S_m-\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}c_{m-j}^{(j)}\right)\frac{1}{\mu^{m+1}}. \qquad (20)$$

4. Теперь найдем асимптотическое разложение правой части равенства (13). Известно [6], что уравнение (1) имеет решения

$$y(\pm\sqrt{\lambda},x)=\exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x+\int_0^x\sigma(\pm\sqrt{\lambda},t)\,dt\right), \qquad (21)$$

образующие фундаментальную систему, где функция $\sigma(\sqrt{\lambda},x)$ при больших вещественных λ допускает асимптотическое разложение

$$\sigma(\sqrt{\lambda},x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_k(x)}{(2i\sqrt{\lambda})^k}, \qquad (22)$$

а $\sigma_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, определяются по формулам (11). С помощью равенств (21), (22) нетрудно получить асимптотическое разложение правой части равенства (13):

$$\frac{d}{d\mu}\ln[c+s'-2]-\frac{\operatorname{cth}\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}}{\sqrt{\mu}}\frac{\pi}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-2m}{2^{2m}}\int_0^{\pi}\sigma_{2m-1}(t)\,dt\,\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (23)$$

Подставив (23) и (20) в (13) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях μ слева и справа, получим формулы (8), (9). Для доказательства формулы (10) отметим, что собственные значения задачи (1)—(3) являются корнями функции $1+F(\lambda)$. Полученные двумя различными способами асимптотические разложения этой функции приводят к равенству

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-2m}{2^{2m}}\int_0^{\pi}\sigma_{2m-1}(t)\,dt\,\frac{1}{\mu^{m+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{M_m}{\mu^{m+1}}+\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{m}\binom{m-\frac{1}{2}}{j}c_{m-j}^{(j)}\right]\frac{(-1)^m}{\mu^{m+\frac{1}{2}}},$$

из которого непосредственно следует равенство (10).

В заключение автор приносит благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи и помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

A. S. Shaldanbaev

TRACE-FORMULAS FOR THE STURM—LIOUVILLE PERIODIC AND ANTIPERIODIC BOUNDARY PROBLEMS

We find some trace-formulas for the Sturm—Liouville operator and its powers with periodic and antiperiodic boundary conditions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б. М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма—Лиувилля.— Успехи матем. наук, 1964, **19**, вып. 1 (115), с. 161—164.
2. Гусейнов Г. Ш., Левитан Б. М. О формулах следов для оператора Штурма — Лиувилля. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1978, № 1, с. 40—49.
3. Левитан Б. М. Регуляризованные следы и условия гладкой периодичности потенциала уравнения Штурма—Лиувилля.— Сиб. матем. ж., 1981, **22**, № 2, с. 137—148.
4. Magnus W., Winkler W. Hill's equation. N. Y., 1966.
5. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций.— Функц. анализ и его прил., 1967, **1**, № 2, с. 52—59.
6. Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза.— Матем. сб., 1974, **95 (137)**, № 3 (11), с. 331—356.

Поступила в редакцию
30.05.80

УДК 517.52

С. Ю. Лукашенко

О МНОЖЕСТВАХ РАСХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Известно, что множество расходимости тригонометрического ряда должно иметь тип $G_{\delta\sigma}$ (см. [1], с. 433). К. Целлер в 1955 г. [2] показал, что класс множеств расходимости тригонометрических рядов Фурье содержит класс G_δ. Т. Корнер в 1971 г. [3] построил множество $E\subset[0,2\pi]$; $E\in F_\sigma$, $|E|>0$, E не является множеством расходимости никакого тригонометрического ряда Фурье. В настоящей статье показано, что даже класс множеств расходимости тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций, который строго содержится в классе множеств расходимости тригонометрических рядов Фурье, содержит множества довольно сложной структуры.

Теорема 1. *Существует непрерывная на* $[0, 2\pi]$ *функция* $f(x)$, *такая, что для множества* E *расходимости ее ряда Фурье по тригонометрической системе выполняются условия:* $|E|=0$, $E\in G_{\delta\sigma}$, $E\notin F_\sigma$, $E\notin G_\delta$ *и* E *нельзя представить в виде* $E=(E_0\setminus N_1)\cup N_2$, *где* $E_0\in G_\delta$, *а* N_1 *и* N_2 *не более чем счетны, а также в виде* $E=(E^0\setminus P_1)\cup P_2$, *где* $E^0\in F_\sigma$, $|E^0|=0$, *а* P_1 *и* P_2 *— множества первой категории на* $[0, 2\pi]$.

Лемма 1. *Существует функция* $f_1(x)\in C[0,2\pi]$, *множество* E_1 *расходимости ряда Фурье которой удовлетворяет условиям:* $E_1\subset[\pi, 2\pi]$, $E_1\notin F_\sigma$, E_1 *нельзя представить в виде* $E_1=(E_1^0\setminus P_1)\cup P_2$, *где* $E_1^0\in F_\sigma$, $|E_1^0|=0$, *а* P_1 *и* P_2 *— множества первой категории на* $[\pi, 2\pi]$.

Доказательство. Так как замкнутое множество нулевой меры нигде не плотно на $[0, 2\pi]$, то из того, что $|F|=0$ и $F\in F_\sigma$, следует, что F — множество первой категории на $[0,2\pi]$. Рассмотрим