Вниманию наших читателей,
Kvant, 2018, Number 12, 36

В этом решении мы выберем время остановки k более тонко.

Пока мы заполняем таблицу, расставляя числа одно за другим, мы собираемся проследить, когда впервые выполнится некоторое условие, и ровно перед этим моментом мы сделаем остановку. А условие заключается в следующем: найдется целиком заполненный числами ряд (столбец или строка). Иными словами, мы останавливаемся в тот момент, когда после выставления чисел 1, 2, …, k каждый ряд все еще содержит хотя бы одну незаполненную клетку, но это условие нарушилось бы после постановки числа $k + 1$. (Отметим, что в отличие от первого решения задачи 1 время остановки здесь существенно зависит от расстановки A.) Покажем, что T содержит хотя бы n клеток, если мы выбираем k указанным способом.

Пусть e – это клетка, в которой должно стоять число $k + 1$ (согласно расстановке A). По нашему выбору числа k заполнение клетки e сделало бы полностью заполненным ряд, содержащий клетку e. Для определенности считаем, что после заполнения клетки e заполняется целиком ее строка R, т.е. все клетки в ряду R, кроме самой клетки e, принадлежат множеству S. Рассмотрим любой столбец C, отличный от столбца, в котором находится e. Общая клетка R и C принадлежит S. С другой стороны, в момент k столбец C еще не полностью заполнен числами, значит, хотя бы одна клетка из C не принадлежит S. Таким образом, C содержит как клетки из S, так и клетки, не принадлежащие S. Поэтому в C находится хотя бы одна клетка из T. В столбце, который содержит клетку e, тоже есть клетка из T – это сама клетка e. Следовательно, каждый из n столбцов содержит хотя бы одну клетку из множества T. Тем самым, T содержит хотя бы n клеток, что завершает решение.

Задача 1 является «общим предком» для большого семейства связанных друг с другом задач. Идея выбора времени остановки работает во многих их них. Иногда можно определить время остановки k довольно простым способом и потратить больше сил на доказательство того, что оно подходит. В других случаях лучше с большей аккуратностью выбирать k, чтобы облегчить себе работу в доказательстве того, что это k подходит.

Задача 2. *Пусть n – четное натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки находятся в одной строке или в одном столбце. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d.*

Эта задача предлагалась на заключительном этапе Всероссийской олимпиады 2002/03 учебного года (задача 8 для 10 класса). В оригинальной формулировке $n = 20$, и в задаче требовалось найти наибольшее натуральное d такое, что каждая расстановка содержит два соседних числа, отличающихся не менее чем на d.

В качестве *указания* [1] предъявим подходящее время остановки $k = \frac{n^2}{4} + 1$.

(Что происходит в задаче 2 для нечетных n?)

Задача 3. *Пусть n – нечетное натуральное число. Рассмотрим таблицу $n \times n$. Левый край таблицы приклеивается к ее правому краю, а верхний – к нижнему, так что таблица приобретает форму тора (бублика). Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону. (Заметим, что из-за склейки в каждой строке самая левая и самая правая клетки соседние и, аналогично, в каждом столбце самая верхняя и самая нижняя клетки соседние. Таким образом, у каждой клетки ровно четыре соседа.) Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d.*

Эта задача предлагалась на олимпиаде Romanian Masters в 2011 году (задача 6). В оригинальной формулировке $n = 2011$ и требовалось найти

[1] Указания и замечания к задачам 2–5 следуют официальным решениям, предлагавшимся на олимпиадах. Найти подробные решения читатель может в соответствующих источниках.