E. A. Barbashin, F. A. Sholokhovich, The mapping of a dynamical system into a time-analytic dynamical system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, Number 1, 11–15

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1960 *МАТЕМАТИКА* *№ 1 (14)*

Е. А. Барбашин, Ф. А. Шолохович

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ, АНАЛИТИЧЕСКУЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕНИ

Вопрос о топологическом отображении более или менее общих динамических систем в системы с некоторыми специальными свойствами, в частности, в системы решений дифференциальных уравнений, изучался рядом авторов. Отметим работы [1], [2], [3], [4] (где М. И. Грабарь решает важную задачу, поставленную В. В. Немыцким), [5]. Этому вопросу посвящена и настоящая заметка.

Пусть в нормированном линейном пространстве задана динамическая система $f(p, t)$, $p \in L$; $-\infty < t < \infty$. Назовем динамическую систему $f(p, t)$ аналитической, если существует разложение $f(p, t)$ в ряд, сходящийся по норме:

$$f(p_0, t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_n t^n + \ldots, \tag{1}$$

где $p_n \in L$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ не зависят от t, а определяются лишь точкой p_0, которая может быть произвольно взята в пространстве L. Если ряд (1) сходится при всех $t \in (-\infty, \infty)$, то динамическую систему назовем целой относительно t. Мы докажем в этой статье следующую теорему.

Теорема. *Всякая компактная динамическая система, имеющая не более одной особой точки, или локально компактная динамическая система без особых точек (пространство системы хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности) допускает топологическое отображение в целую относительно t динамическую систему.*

Рассмотрим введенное М. В. Бебутовым [2] пространство R_u непрерывных действительных функций $\psi(x)$ действительного переменного $x \in (-\infty, \infty)$. Расстояние в R_u определяется формулой

$$\rho(\psi_1(x), \psi_2(x)) = \sup_{X>0} \min\left[\max_{|x| \leqslant X} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|;\ \frac{1}{X}\right].$$

Сходимость $\psi_n \to \psi$ в R_u равносильна равномерной сходимости последовательности $\psi_n(x)$ к функции $\psi(x)$ на каждом конечном интервале.

Динамическая система в R_u определяется равенством

$$f_0[\psi(x), t] = \psi(x + t).$$

Эту систему назовем M_u.

Бебутов доказал ([2], стр. 28), что всякая компактная динамическая система, имеющая не более одной особой точки, может быть топологически отображена в динамическую систему M_u. Вместе с тем, всякая динамическая система без особых точек, расположенная в локально компактном пространстве Хаусдорфа со счетной базой, может быть топологически отображена в компактную динамическую систему с одной особой точкой ([2], стр. 14).

Таким образом, для полного доказательства нашей теоремы достаточно установить ее справедливость в случае компактной динамической системы M, принадлежащей динамической системе M_u.

Хотя компактное множество пространства R_u может содержать и неограниченные функции $\psi(x)$, в компактной динамической системе M, содержащейся в M_u, все функции $\psi(x)$, являющиеся точками пространства этой системы, ограничены. В самом деле, $\rho(0, \psi(x+t)) \geqslant \psi(t)$, и если система компактна, то существует такое число C, что $\rho(0, \psi(x)) \leqslant C$ какова бы ни была точка $\psi(x) \in M$.

Рассмотрим множество комплекснозначных функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, для которых существует $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 e^{-x^2} dx$.

Если в этом множестве естественным образом ввести операции и скалярное произведение (φ_1, φ_2) определить формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} e^{-x^2} dx, \tag{2}$$

то получится гильбертово пространство. Обозначим его через N.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма. *Если последовательность равномерно ограниченных функций $\varphi_n(x)$ сходится почти всюду к функции $\varphi(x)$, то $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ по норме пространства N.*

Лемма легко доказывается с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $\psi(x)$ принадлежит пространству динамической системы $M \subset M_u$. Очевидно, $\psi(x) e^{-x^2} \in L^2(-\infty, \infty)$. Как известно ([6], стр. 318—319), трансформация Фурье

$$\varphi(x) = T(\psi(x) e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-z^2} e^{ixz} dz$$

также принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Тем более, $\varphi(x) \in N$.

Отображение Φ пространства M в N определим, полагая

$$\Phi(\psi(x)) = T(\psi(x) e^{-x^2}).$$

В силу теорем единственности для преобразований Фурье, отображение Φ взаимнооднозначно. Легко видеть, что Φ непрерывно.

Действительно, пусть $\psi_n(x)$ сходится к $\psi(x)$ в смысле метрики пространства R, тогда по указанной выше лемме $\psi_n(x) \to \psi(x)$ по норме пространства N, т. е.

$$\|\psi_n(x) - \psi(x)\|_N = \|\psi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - \psi(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\|_{L^2} \to 0.$$

Тем более, $\|\psi_n(x) e^{-x^2} - \psi(x) e^{-x^2}\|_{L^2} \to 0$, и так как преобразование T есть унитарный оператор в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, то $\|\Phi(\psi_n(x)) - \Phi(\psi(x))\|_{L^2} \to 0$. Поэтому подавно $\|\Phi(\psi_n(x)) - \Phi(\psi(x))\|_N \to 0$.

Из компактности пространства M следует, что отображение Φ топологическое. Движение в пространстве $\Phi(M)$ определим следующим образом:

$$f(\varphi(x),\ t)=g(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z+t)\,e^{-z^2}\,e^{izx}dz.$$

Легко проверить выполнение всех аксиом динамической системы. Больше того, полученная динамическая система является даже линейной. Очевидно также соотношение

$$\Phi[f_0(\psi,\ t)]=f[\Phi(\psi),\ t].$$

Функция $g(x,\ t)$ аналитична по t в обычном смысле. Действительно, $g(x,\ t)$ можно представить в виде

$$g(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-(z-t)^2}\,e^{i(z-t)x}dz. \tag{3}$$

Подынтегральная функция аналитична по t при каждом фиксированном z и непрерывна по z в интервале $(-\infty,\ \infty)$ для каждого фиксированного t. Кроме того, эта функция ограничена в области изменения переменных z и t. Отсюда и следует ([7], стр. 296) аналитичность функции $g(x,\ t)$ по t.

Таким образом, $g(x,\ t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,t^k$. Очевидно $\varphi_0(x)=\varphi(x)$. Нужно показать, что все $\varphi_k(x)$ при $t>0$ принадлежат N и что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,t^k$ сходится по норме пространства N.

Докажем, что $\varphi_1\in N$. Очевидно, $\varphi_1(x)=g_t'(x,\ 0)$. Но при помощи формулы (3) получим

$$g_t'(x,\ 0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}\,[2z-ix]\,dz. \tag{4}$$

Возможность дифференцирования под знаком интеграла в окрестности точки $t=0$ очевидна. Так как $\psi(z)\,2ze^{-z^2}\in L^2$, то и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,2ze^{izx}\,dz$ как функция x принадлежит L^2, а следовательно, и N. По той же причине $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}dz\in L^2$, а потому $ix\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}dz$ принадлежит N.

Так же показывается, что при любом $k>1$ $\varphi_k(x)\in N$. Теперь установим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,t^k$ сходится по норме N

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,t^k=g(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2}\,e^{itx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}e^{-2zt}dz.$$

Рассмотрим вначале функцию

$$\gamma(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z)e^{-z^2}e^{izx}e^{-2zt}dz.$$

Разложим ее в ряд по степеням t и оценим остаток ряда

$$e^{-2zt}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!}z^k t^k+\frac{(-2)^n z^n}{n!}e^{-2z\eta}t^n,\quad \text{где } |\eta|<|t|.$$

Коэффициенты $\frac{(-2)^k z^k}{k!}$ являются функциями вещественной переменной z и принадлежат N.

Получим следующее выражение для остатка ряда:

$$R_n=\frac{(-2)^n}{n!}t^n\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z)e^{-z^2}e^{izx}z^n e^{-2z\eta}dz.$$

Функция $\psi(z)$ ограничена: $|\psi(z)|\leqslant K$.

Поэтому

$$|R_n|\leqslant\frac{2^n}{n!}|t|^n K\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2-2z\eta}z^n dz\right|.$$

Выражение $\frac{2^n}{n!}|t|^n\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2-2z\eta}z^n dz\right|$ есть абсолютная величина остаточного члена в разложении по степеням функции $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}e^{-2zt}dz$. Эта функция является аналитической (по упоминавшейся уже теореме [7], стр. 296). Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}R_n=0$, причем стремление равномерно относительно x. Таким образом, $\|R_n\|_N\to 0$, и значит ряд по степеням t для функции $\gamma(x, t)$ сходится по норме пространства N.

Покажем, что ряд по степеням t для функции e^{-itx}

$$e^{-itx}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-ix)^k}{k!}t^k+R'_n$$

также сходится по норме пространства N.

Очевидно, $\frac{(-ix)^k}{k!}\in N$,

$$|R'_n|=\left|\frac{x^n}{n!}e^{-i\eta' x}t^n\right|=\left|\frac{x^n}{n!}t^n\right|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R'_n|^2 e^{-x^2}dx=\frac{t^{2n}}{(n!)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}x^{2n}dx=$$

$$=\frac{2t^{2n}}{(n!)^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{2n}dx=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2t^{2n}}{(n!)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}\,t^{2n}}{(n!)^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}<2\sqrt{\pi}\,\frac{(t^2)^n}{n!}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|R'_n\|_N=0$.

Коэффициенты ряда для функции e^{-t^2} не зависят от x, поэтому они принадлежат пространству N, и ряд сходится по норме этого пространства.

Итак, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,t^k$ является произведением трех рядов, сходящихся по норме пространства N, откуда следует, что и сам он сходится по норме N. Кроме того, видно, что сходимость имеет место при любом t. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, образ динамической системы M в пространстве N представляет собой линейную динамическую систему. Бесконечно малый производящий оператор A этой системы ограничен и даже вполне непрерывен. Действительно, из формулы (4) видно, что если $\varphi=\Phi(\psi)$, то

$$A\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)\,dz. \tag{5}$$

Если $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная последовательность из $\Phi(M)$, то, в силу компактности M, можно считать, что последовательность $\psi_n(x)=\Phi^{-1}(\varphi_n)$ сходится к функции $\psi_0(x)$, и эта сходимость равномерна на каждом конечном промежутке. Тогда последовательность $\psi_n(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)$ при каждом постоянном x сходится равномерно на любом конечном промежутке к функции $\psi_0(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)$. Так как все функции $\psi(x)\in M$ равномерно ограничены $|\psi(x)|\leqslant C$, то

$$|\psi_n(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)|\leqslant C\,|e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)|,$$

откуда следует равномерная сходимость интеграла. Этим обоснован предельный переход под знаком интеграла. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}A\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_0(z)\,e^{-z^2}\,e^{izx}(2z-ix)\,dz=\varphi(x).$$

Очевидно, $\varphi(x)\in N$.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
6 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Бебутов. Об отображении траекторий динамической системы на семейство параллельных прямых. Бюллетень МГУ, Матем., т. II, вып. 3, 1941.

2. М. В. Бебутов. О динамических системах в пространстве непрерывных функций. Бюллетень МГУ, Матем., т. II, вып. 5, 1941.

3. М. И. Грабарь. Отображение динамических систем в системы решений дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 61, № 3, 1948.

4. М. И. Грабарь. Отображение динамических систем в системы решений дифференциальных уравнений. Вестник МГУ, сер. физико-матем. и естест. наук, № 3, вып. 2, 1952.

5. Ф. А. Шолохович. О связи между линейной динамической системой и дифференциальным уравнением в пространстве Банаха. ДАН СССР, т. 120, № 1, 1958.

6. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, стр. 499, ИЛ, М, 1954.

7. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, стр. 703, ГИТТЛ, М. — Л., 1950.