И. П. Рязанцева, О регуляризующих алгоритмах для уравнений с монотонными отображениями при случайных помехах, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, номер 12, 59–65

В самом деле, пусть H — произвольная K-подгруппа группы G и элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе H. Пусть $Z = Z(G)$ — центр группы G. Нам, очевидно, достаточно указать неединичную подгруппу $A \leqslant Z$ такую, что $g \notin HA$. Если $H \cap Z \neq 1$ или $g \notin HZ$, то существование такой подгруппы A очевидно. Если же $H \cap Z = 1$ и $g \in HZ$, то элемент g однозначно представим в виде $g = hz$, где $h \in H$, $z \in Z$, причем $z \neq 1$. Поскольку группа Z не является квазициклической, в ней найдется подгруппа $A \neq 1$, не содержащая элемента z (см. [3], теорема 3.1). Очевидно, что $g \notin HA$.

Следствие 1. Пусть группа G является расширением свободной группы при помощи бесконечной циклической, и $Z(G) \neq 1$. Тогда конечно-порожденные подгруппы группы G финитно отделимы.

Действительно, в этом случае группа $Z(G)$ оказывается бесконечной циклической, а фактор-группа группы G по неединичной центральной подгруппе — почти свободной группой. Остается напомнить, что класс групп с финитно отделимыми конечно-порожденными подгруппами замкнут относительно взятия конечных расширений и, как вытекает из теоремы Холла — Бернса (предложение 3.10 из [4]), содержит все свободные группы.

Доказательство теоремы теперь завершает следующее утверждение, доказанное в [5].

Предложение 2. *Каждая нециклическая группа с одним определяющим соотношением, обладающая нетривиальным центром, является расширением свободной группы конечного ранга при помощи бесконечной циклической.*

Как замечено в [1], из доказанной теоремы получается

Следствие 2 (см. также [6]). В группе с одним определяющим соотношением, обладающей нетривиальным центром, проблема вхождения в конечно-порожденные подгруппы разрешима.

Заметим в заключение, что следствие 1 позволяет утверждать также финитную отделимость конечно-порожденных подгрупп каждой группы, определяемой в образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ соотношениями $a_i^{p_i} = a_{i+1}^{q_i}$, где p_i, q_i — ненулевые целые числа, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы.— Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, т. 18, № 5, с. 49—60.
2. Dyer J. Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions.— J. Austral. Math. Soc., 1980, v. 29, № 1, p. 35—51.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М., 1974. 335 с.
4. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1980. 447 с.
5. Baumslag G., Taylor T. The centre of groups with one defining relator.— Math. Ann., 1968, v. 175, № 4, p. 315—319.
6. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в группах с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром.— ВИНИТИ, № 3207—84 Деп., 1984.

г. Иваново

Поступила
10.07.1985

И. П. Рязанцева

УДК 517.988

О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХАХ

При исследовании методов решения некорректных задач различают два подхода: детерминированный и статистический [1]. В линейном случае в этих направлениях получены почти законченные результаты [1], [2].

Уравнения с монотонными операторами представляют важный класс нелинейных задач (задачи минимизации, теории игр, оптимизации и т. д.). Вопросу изучения регуляризирующих алгоритмов для уравнений такого типа посвящено большое число работ (см., напр., [3]), где рассмотрен детерминированный случай. Не меньший интерес представляют задачи с монотонными операторами при наличии случайных ошибок в операторе и правой части уравнения. В данной работе проводится исследование сходимости операторного метода регуляризации для этого случая.

При построении регуляризирующего алгоритма мы исходим из следующего. Поскольку на практике приходится иметь дело с реализациями случайного процесса, то строим регуляризирующий алгоритм таким образом, чтобы для каждой реализации мы имели корректную задачу. Кроме того, чтобы знать вероятностные характеристики регуляризованных решений, необходимо, чтобы они были измеримы.

1. Приведем некоторые сведения (см., напр., [4]).

Пусть Ω—вероятностное пространство, B есть σ-алгебра областей из Ω. Для метрического пространства Y будем обозначать через B_Y σ-алгебру, порожденную замкнутыми множествами из Y.

Определение 1. Функция $f:\Omega\to Y$ называется Y-значной случайной переменной, если образ f для каждого борелевского множества $G\in B_Y$ принадлежит B.

Определение 2. Отображение $A:\Omega\times X\to Y$, где X — произвольное множество, называется случайным оператором, если для каждого фиксированного $x\in X$, $A(\omega)x$ есть Y-значная случайная переменная.

Определение 3. Пусть $A:\Omega\times X\to Y$ — случайный оператор. Уравнение типа

$$A(\omega)\,x(\omega)=f(\omega), \tag{1}$$

где $f(\omega)$ — заданная Y-значная случайная переменная, называется случайным операторным уравнением.

Определение 4. Всякая X-значная случайная переменная $x(\omega)$, для которой выполнено условие $\mu(\{\omega/A(\omega)\,x(\omega)=f(\omega)\})=1$, называется случайным решением уравнения (1).

Всюду далее, говоря о свойствах случайных операторов, последовательностей случайных переменных и т. д., мы будем понимать их в смысле вероятностной теории, т. е. будем считать, что свойство „почти верно“, т. е. выполняется при почти всех (п. в.) $\omega\in\Omega$.

Теорема 1 [5]. *Пусть (Ω, B, μ) — полное вероятностное пространство, X — сепарабельное метрическое пространство, Y — метрическое пространство. Пусть $A(\omega):\Omega\times X\to Y$ — случайный сепарабельный оператор такой, что $A(\omega)$ обратим и $A^{-1}(\omega)$ непрерывный. Тогда $A^{-1}(\omega)$ является случайным оператором.*

Теорема 2 [4]. *Пусть (Ω, B, μ) — полное вероятностное пространство, X и Y — сепарабельные банаховы пространства, $A(\omega):\Omega\times X\to Y$ — случайный оператор, деминепрерывный в X. Тогда для каждой X-значной случайной переменной $x(\omega)$ функция $A(\omega)\,x(\omega)$ есть Y-значная случайная переменная.*

2. Всюду далее X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство с $\|\cdot\|$, X^* — его сопряженное с $\|\cdot\|_*$, (Ω, B, μ) — полное вероятностное пространство.

Пусть $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, $p\geqslant q$. Обозначим через $L_p(\Omega, X)$ множество X-значных случайных переменных $f(\omega)$ таких, что $\|f(\omega)\|\in L_p(\Omega, R)$. Пространство $L_p(\Omega, X)$ есть пространство Банаха с нормой $\|f(\omega)\|_p=\left(\int\limits_\Omega\|f(\omega)\|^p\,d\mu\right)^{1/p}$.

Пространство, сопряженное $L_p(\Omega, X)$, есть $L_q(\Omega, X^*)$. Если $X=H$ — пространство Гильберта, то $L_2(\Omega, H)$ является гильбертовым пространством [6].

Для вещественной функции $a(\omega)\in L_p(\Omega, R)$ будем обозначать через $|a(\omega)|_p$ величину $\left(\int\limits_\Omega|a(\omega)|^p\,d\mu\right)^{1/p}$, а для $u(\omega)\in L_q(\Omega, X^*)$ и $v(\omega)\in L_p(\Omega, X)$ $\langle\langle u, v\rangle\rangle=$ $=\int\limits_\Omega\langle u, v\rangle\,d\mu$, где последний интеграл понимается в смысле Бохнера [6].

Лемма. *Пусть X — сепарабельное банахово E-пространство с нормой, дифференцируемой по Фреше, $A(\omega):\Omega\times X\to X^*$ — случайный оператор, не-*

непрерывный и монотонный на X, $f(\omega)$ есть X^*-значная случайная переменная. Тогда уравнение

$$A(\omega)x + \alpha(\omega)Ux = f(\omega) \tag{2}$$

имеет единственное случайное решение при любой R-значной случайной переменной $\alpha(\omega)$, $\alpha(\omega) > 0$ п. в. в Ω, где $U: X \to X^*$ — дуальное отображение в X [7].

Доказательство. При п. в. $\omega \in \Omega$ уравнение (2) имеет единственное решение (см. [3]). Обозначим полученную функцию через $x_\alpha(\omega)$ (не теряя общности, можно считать, что она определена на всем Ω). Покажем теперь, что $x_\alpha(\omega)$ есть X-значная случайная переменная. Прежде всего отметим, что оператор $A^\alpha(\omega) = A(\omega) + \alpha(\omega)U$ непрерывный [7], а следовательно, и сепарабельный [5]. Кроме того, он является и случайным. Действительно, зафиксируем $x \in X$. Функция $\alpha(\omega)\langle Ux, y\rangle$ есть R-значная случайная переменная. Пространство X^* сепарабельно, т. к. X сепарабельно. Значит, $\alpha(\omega)Ux$ есть X^*-значная случайная переменная [6], а тогда и оператор $A^\alpha(\omega)$ случайный [5]. Далее, известно [3], что оператор, обратный $A^\alpha(\omega)$, непрерывен. Теперь утверждение леммы следует из теорем 1 и 2.

3. Пусть пространство X является E-пространством с дифференцируемой по Фреше нормой. Рассмотрим в X уравнение

$$Ax = f, \tag{3}$$

где $A: X \to X^*$ — непрерывный монотонный оператор, $D(A) = X$. Пусть $N \neq \varnothing$ — множество решений (3). Предположим далее, что на A и f наложены случайные возмущения, т. е. на самом деле задано уравнение $A^h(\omega)x(\omega) = f^\delta(\omega)$; здесь $A^h(\omega)$ и $f^\delta(\omega)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $A^h(\omega): \Omega \times X \to X^*$ — случайный оператор, непрерывный и монотонный на X, $f^\delta(\omega)$ есть X^*-значная случайная переменная;

2) $\|f^\delta(\omega) - f\|_* \leqslant \delta(\omega)$, $\delta(\omega) \in L_p(\Omega, R)$;

3) $\|A^h(\omega)x - Ax\|_* \leqslant g(\|x - x^0\|)\,h(\omega)\ \forall x \in X$,

$h(\omega) \in L_p(\Omega, R)$, $g(t)$ $(t \geqslant 0)$ — непрерывная возрастающая неотрицательная функция, $x^0 \in X$ — некоторая фиксированная точка.

В этих условиях требуется построить последовательность $\{x^{\delta h}(\omega)\}$, $x^{\delta h}(\omega) \in X$, сильно сходящуюся к некоторому элементу $\bar{x} \in N$ при $|\delta(\omega)|_p \to 0$, $|h(\omega)|_p \to 0$.

Для решения поставленной задачи применим операторный метод регуляризации (см., напр., [3]) вида

$$A^h(\omega)x + \alpha(\omega)U(x - x^0) = f^\delta(\omega), \tag{4}$$

где $\alpha(\omega)$ есть R-значная случайная переменная, $\alpha(\omega) > 0$ п. в. в Ω.

Уравнение (4) при п. в. $\omega \in \Omega$ имеет единственное решение, которое обозначим через $x_\gamma(\omega)$, $\gamma = \gamma(\omega) = \{\delta(\omega), h(\omega), \alpha(\omega)\}$. Укажем способ построения функции $\alpha(\omega) = \bar{\alpha}(\omega)$, обеспечивающий в X сходимость $\int_\Omega x_{\bar{\gamma}}(\omega)\,d\mu \to \bar{x} \in N$, $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\omega) = \{\delta(\omega), h(\omega), \bar{\alpha}(\omega)\}$, $x_{\bar{\gamma}}(\omega)$ — случайное решение (4) при $\alpha(\omega) = \bar{\alpha}(\omega)$ $\left(\int_\Omega x_{\bar{\gamma}}(\omega)\,d\mu\right.$ понимается в смысле Бохнера $\left.[8]\right)$.

Обозначим через $M^{\delta h} = \{\omega / \delta(\omega) + h(\omega) \geqslant 1\}$. Из неравенства Чебышева имеем, что $\mu(M^{\delta h}) \leqslant \int_\Omega [\delta(\omega) + h(\omega)]\,d\mu$. Пусть $\Omega^{\delta h} = \Omega \setminus M^{\delta h}$.

Теорема 3. *Пусть в наших условиях для $\omega \in \Omega^{\delta h}$ справедливо неравенство*

$$\|A^h(\omega)x^0 - f^\delta(\omega)\|_* > (k-1)[\delta(\omega) + h(\omega)]^\sigma + [\delta(\omega)]^\sigma + g(0)[h(\omega)]^\sigma, \tag{5}$$

где $k>1$ — некоторое число, $\sigma\in(0, 1)$. Тогда для $\omega\in\Omega^{\delta h}$ найдется единственное значение $\bar\alpha(\omega)$ такое, что

$$\|A^h(\omega)x_{\bar\gamma}(\omega)-f^\delta(\omega)\|_*=(k-1)[\delta(\omega)+h(\omega)]^\sigma+$$
$$+[\delta(\omega)]^\sigma+g(\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|)[h(\omega)]^\sigma \tag{6}$$

и $|\bar\alpha(\omega)|_p\to 0$, $|[h(\omega)+\delta(\omega)]/\bar\alpha(\omega)|_p\to 0$, $\left\|\int\limits_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu-x^*\right\|\to 0$, *когда* $|\delta(\omega)|_p\to 0$, $|h(\omega)|_p\to 0$, *где $x^*\in N$ и удовлетворяет соотношению* $\|x^*-x^0\|=\min\limits_{x\in N}\|x-x^0\|$.

Доказательство. Во-первых, из [9] следует, что при $\omega\in\Omega^{\delta h}$ значение $\bar\alpha(\omega)$, удовлетворяющее (6), существует и единственно. Далее, положив, напр., $\bar\alpha(\omega)=1$ при $\omega\in M^{\delta h}$, можем считать, что $\bar\alpha(\omega)$ определена всюду в Ω. Отметим теперь, что $\mu(M^{\delta h})\to 0$ при $|\delta(\omega)|_p\to 0$, $|h(\omega)|_p\to 0$. Покажем, что $\bar\alpha(\omega)$ есть R-значная случайная переменная. Функция $\bar\alpha(\omega)$ определена равенством

$$\bar\alpha(\omega)\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|-g(\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|)h^\sigma(\omega)=d(\omega),$$

где $d(\omega)=(k-1)[\delta(\omega)+h(\omega)]^\sigma+[\delta(\omega)]^\sigma$ есть R-значная случайная функция. Оператор $B(\omega,\bar\alpha)=\bar\alpha(\omega)\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|-g(\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|)[h(\omega)]^\sigma$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, функция $B(\cdot,\bar\alpha)$ ($\bar\alpha$ фиксировано) есть R-значная случайная переменная (см. лемму), т. е. $B(\omega,\bar\alpha)$ — случайный оператор из $\Omega\times R$ в R. Непрерывность $B(\omega,\bar\alpha)$ по $\bar\alpha$ доказана в [9]. Кроме того, в силу единственности $\bar\alpha(\omega)$ функция $B(\omega,\cdot)$ строго монотонна, а значит, обратная к ней непрерывна. Теперь из теорем 2 и 1 следует, что $\bar\alpha(\omega)$ есть R-значная случайная переменная, а значит, $x_{\bar\gamma}(\omega)$ есть случайное решение регуляризованного уравнения (4). Далее, как и в [9], получим

$$\bar\alpha(\omega)>(k-1)[\delta(\omega)+h(\omega)]^\sigma/(2\|x^*-x^0\|).$$

Значит, при $\omega\in\Omega^{\delta h}$

$$[h(\omega)+\delta(\omega)]/\bar\alpha(\omega)\leqslant(2\|x^*-x^0\|/(k-1))[h(\omega)+\delta(\omega)]^{1-\sigma}.$$

Так как $|h(\omega)+\delta(\omega)|_p\to 0$, то $|h(\omega)+\delta(\omega)|_{(1-\sigma)p}\to 0$ (см. [10]), а следовательно, и $|[h(\omega)+\delta(\omega)]/\bar\alpha(\omega)|_p\to 0$ при $|h(\omega)|_p$, $|\delta(\omega)|_p\to 0$. Справедлива оценка [9]:

$$\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|\leqslant\|x^*-x^0\|+2\delta(\omega)/\bar\alpha(\omega)+2[h(\omega)/\bar\alpha(\omega)]g(\|x^*-x^0\|), \tag{7}$$

откуда имеем, что $x_{\bar\gamma}(\omega)\in L_p(\Omega, X)$ и

$$\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|_p\leqslant\|x^*-x^0\|+2|\delta(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_p+2|h(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_p g(\|x^*-x^0\|),$$

т. е. последовательность $\{x_{\bar\gamma}(\omega)\}$ ограничена в $L_p(\Omega, X)$, $p>1$. Значит, существует подпоследовательность из $\{x_{\bar\gamma}(\omega)\}$ (которую по-прежнему обозначим через $\{x_{\bar\gamma}(\omega)\}$), слабо сходящаяся в $L_p(\Omega, X)$ к элементу $\bar x(\omega)\in L_p(\Omega, X)$. Из (6) и (7) следует, что $\|A^h(\omega)x_{\bar\gamma}(\omega)-f^\delta(\omega)\|_p\to 0$ при $|h(\omega)|_p$, $|\delta(\omega)|_p\to 0$. Далее, монотонность $A^h(\omega)$ дает $\langle\langle A^h(\omega)x_{\bar\gamma}(\omega)-A^h(\omega)x,\ x_{\bar\gamma}(\omega)-x\rangle\rangle\geqslant 0$ $\forall x\in X$. Отсюда при $|h(\omega)|_p$, $|\delta(\omega)|_p\to 0$ имеем $\langle\langle Ax-f,\ x-\bar x(\omega)\rangle\rangle\geqslant 0$ или (см. [8]) $\langle f-Ax,\ \int\limits_\Omega\bar x(\omega)\,d\mu-x\rangle\geqslant 0$ $\forall x\in X$. Значит, $\hat x=\int\limits_\Omega\bar x(\omega)\,d\mu\in N$. Покажем, что $\hat x=x^*$. Из (3) и (4) получим

$$\langle\langle U(x-x^0),\ x_{\bar\gamma}(\omega)-x\rangle\rangle \leqslant [\,|\delta(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_p +$$
$$+|h(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_p\, g(\|x^*-x^0\|)]\,\|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|_q,\quad x\in N.$$

Следовательно, $\langle U(x-x^0),\ \hat{x}-x\rangle \leqslant 0\ \forall x\in N$, т. е. $\hat{x}=x^*$. Из слабой сходимости $x_{\bar\gamma}(\omega)\rightharpoonup \bar{x}(\omega)$ имеем $\langle\langle x_{\bar\gamma}(\omega)-\bar{x}(\omega),\ y\rangle\rangle\to 0\ \ \forall y\in X^*$ или

$$\Big\langle \int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu - x^*,\ y\Big\rangle \to 0\ \ \forall y\in X^*,$$

т. е. $\int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu \rightharpoonup x^*$ в X. Далее, используя (7), получим

$$\Big\|\int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu - x^0\Big\| = \Big\|\int_\Omega (x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0)\,d\mu\Big\| \leqslant \int_\Omega \|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^0\|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \|x^*-x^0\| + 2\,|\delta(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_1 + 2\,|h(\omega)/\bar\alpha(\omega)|_1\, g(\|x^*-x^0\|).$$

Теперь из слабой сходимости $\int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu \rightharpoonup x^*$ и из последнего неравенства имеем [10]: $\Big\|\int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu - x^0\Big\| \to \|x^*-x^0\|$. Так как X есть E-пространство, то, значит, $\int_\Omega x_{\bar\gamma}(\omega)\,d\mu \to x^*$ в X. Кроме того, из (5) — (6) следует (см. [9]), что $|\bar\alpha(\omega)|_p\to 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Дуальное отображение в $L_p(\Omega, X)$ имеет вид $U_p x = \|x\|_p^{2-p}\|x\|^{p-2}Ux$. Поэтому непосредственное применение в пространстве $L_p(\Omega, X)$ операторного метода регуляризации приводит к уравнению, которое нельзя решить при фиксированном ω, т. е. для конкретной реализации. Если же $p=2$, $X=H$ — гильбертово пространство, то операторный метод регуляризации непосредственно в $L_2(\Omega, H)$ определяется уравнением $A^h(\omega)x + \alpha(x-x^0) = f^\delta(\omega)$. Значит, используя результаты [3], можно сформулировать утверждения о выборе $\alpha=\bar\alpha$ и о сходимости $\int_\Omega \|x_{\bar\gamma}(\omega)-x^*\|^2\,d\mu\to 0$ при $|\delta(\omega)|_2\to 0$, $|h(\omega)|_2\to 0$. Пусть $p=2$, $X=H$, правая часть и оператор содержат аддитивные шумы ($f^\delta(\omega)=f+\xi$, $A^h(\omega)x = Ax + g(\|x-x^0\|)\eta$) с нулевыми средними и принадлежащие $L_2(\Omega, H)$, тогда дисперсии ошибок определяются величинами $\|\xi\|_2^2$, $\|\eta\|_2^2$. Теперь из теоремы 3 будет следовать сходимость средних для регуляризованных решений $x_{\bar\gamma}(\omega)$ к x^* при стремлении дисперсий возмущений к нулю.

Отметим, что непрерывность операторов A и A^h существенно важна только при доказательстве существования случайного решения (4). Если $X=H$, то в теореме 3 достаточно хеминепрерывности операторов. Случайность решения $x_{\bar\gamma}(\omega)$ устанавливается так же, как и в теореме 2 из [4]. Причем при нахождении регуляризованного решения можно применять, напр., итерационные процессы из [4], [11].

4. Пусть $X=H$, и только правая часть (3) задана неточно, причем известно $\tilde{f}=f+\xi$, здесь $\xi=\xi(\omega)$ — случайная ошибка. Пусть ξ имеет среднее значение $m_\xi=0$, конечный второй момент и корреляционный оператор $R: H\to H$. Пусть μ_ξ — распределение в H, порожденное ξ. Считаем, что μ^ξ невырождено, а значит, R — строго положительный оператор. Величина $\|R\|=\lambda^2$ называется мощностью погрешности в исходных данных.

Приведем достаточное условие статистической устойчивости [2] для уравнения (3).

П р е д л о ж е н и е. *Если оператор A уравнения* (3) *сильно монотонный, т. е.* $(Ax-Ay,\ x-y)\geqslant c\|x-y\|^2$ *при всех* $x, y\in H$, *а корреляционный оператор R ошибки ядерный, то задача решения уравнения* (3) *статистически устойчива.*

Доказательство следует из неравенств

$$M\|A^{-1}\tilde{f}-A^{-1}f\|^2 \leqslant (1/c^2)M\|\xi\|^2 \leqslant (\lambda^2/c^2)\, tr\,(\hat{R}),$$

где M — знак математического ожидания, $R=\lambda^2\hat{R}$.

Приведем определения из [2].

Определение 5. Непрерывное отображение $b: H \to H$ называется допустимой решающей процедурой для определения приближенного решения (3), если $b(Ax+\xi)$ — случайная величина с конечным вторым моментом.

Определение 6. Функция $r(x, b)=M\|x-b(Ax+\xi)\|^2$ называется функцией риска.

Определение 7. Однопараметрическое семейство допустимых решающих процедур $\{b_\lambda\}_{\lambda>0}$ называется состоятельным в точке $x_0 \in H$, если $\lim\limits_{\lambda\to 0} r(x_0, b_\lambda)=0$.

Если R ядерный, то рассматривая $A: L_2(H) \to L_2(H)$ (см. замечание 1), мы можем применить к (3) в $L_2(H)$ операторный метод регуляризации

$$Ax+\bar{\alpha}(\xi)(x-x^0)=f+\xi,\ \bar{\alpha}(\xi)=\bar{\alpha}(\xi,\ \omega)>0 \tag{8}$$

и получим (см. [3], теорема 3) $\|x^\lambda(\omega)-x^*\|_2=r(x^*, b_\lambda)\to 0$ при $\lambda\to 0$ (способ выбора $\bar{\alpha}(\xi)$ указан в теореме 3, $h=0$, $\delta=\lambda$), где $x^\lambda(\omega)$ — решение (8). Значит, семейство допустимых решающих процедур $\{b_\lambda\}$, определяемых (8), является состоятельным.

5. Предполагая ядерность оператора R, мы тем самым считаем, что μ_ξ продолжается на H до меры (см. [2]). Однако известно, что при решении практических задач чаще всего ξ является слабой случайной величиной [2], и μ_ξ продолжается до меры на некотором расширении пространства H. Эти расширения обычно строят, применяя конструкцию оснащенных гильбертовых пространств (см. [12], [13]).

Пусть в условиях п. 4 R не является ядерным, $B: H\to H$ — некоторой линейный положительный самосопряженный оператор со всюду плотной в H областью определения $D(B)$, $\|Bu\|\geqslant\|u\|$ при всех $u\in D(B)$. $D(B)$ есть гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_+=\sqrt{(u,u)_+}$, $(u, v)_+=(Bu, Bv)$, $u, v\in D(B)$. Поэтому можно принять $H_+=D(B)$. По H и H_+ стандартно (см. [12], [13]) строим H_-. Продолжив $B: H_+\to H$ по непрерывности на H, получим $\bar{B}: H\to H_-$. Пусть B такой, что $\bar{B}$ есть оператор Гильберта — Шмидта (см. [2]). Отметим, что $(u, v)_-=(\bar{B}^{-1}u, \bar{B}^{-1}v)$, $u, v\in H_-$. Случайная величина $\eta=\bar{B}\xi\in H_-$ имеет корреляционный оператор $\bar{R}=\bar{B}R\bar{B}^*$ (см. [2]), который в силу свойств оператора B является ядерным. Рассмотрим в H уравнение

$$\bar{B}Ax=\bar{f}, \tag{9}$$

где $\bar{f}=\bar{B}f$, $\bar{B}A: H\to H_-$. Определим отношение двойственности $[\cdot, \cdot]$ между H и H_- следующим образом: $[u, v]=(u, \bar{B}^{-1}v)$ при всех $u\in H$, $v\in H_-$. Справедливо соотношение $[u, v]=(u, \bar{B}^{-1}v)=(\bar{B}u, v)_-\leqslant\|\bar{B}u\|_-\|v\|_-=\|u\|\|v\|_-$, а значит, для $[\cdot, \cdot]$ выполняется неравенство Коши — Буняковского. Дуальное отображение $U: H\to H_-$ совпадает с $\bar{B}$. Это следует из равенств $(\bar{B}x, \bar{B}x)_-=\|\bar{B}x\|_-^2=(x, x)=\|x\|^2$, $[\bar{B}x, x]=(x, x)=\|x\|^2$ при всех $x\in H$. Далее, оператор $\bar{B}A: H\to H_-$ является монотонным $[\bar{B}Ax-\bar{B}Ay,\ x-y]=(Ax-Ay, x-y)\geqslant 0$. Значит, регуляризованное уравнение для (3) имеет вид

$$\bar{B}Ax+\bar{\alpha}(\eta)\bar{B}(x-x^0)=\bar{f}+\eta. \tag{10}$$

Теперь имеем (см. [3], теорему 3), что $M\|x_\lambda(\omega)-\bar{x}^*\|^2\to 0$ при $\lambda\to 0$ и определенном выборе (теорема 3) $\bar{\alpha}(\eta)=\bar{\alpha}(\eta, \omega)$, здесь $x_\lambda(\omega)$ — решение (10), $\bar{x}^*$ — ближайшее к x^0 решение (9). Пусть уравнение $\bar{B}x=0$ имеет только тривиальное решение, тогда $\bar{x}^*$ — решение (3).

Существуют и другие примеры построения оснащений (см., напр., [14], § 6).

Замечание 2. Пусть вместо оператора A также известно его приближение $\widetilde{A}: \widetilde{A}x = Ax + \xi_1 g(\|x - x^0\|)$, где $\widetilde{A}: H \to H$ — монотонный хеминепрерывный оператор, $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ — слабая случайная величина в H, удовлетворяющая тем же условиям, что и ξ, и R_1 — ее корреляционный оператор, $\|R_1\| = \zeta^2$, $g(t)$ $(t \geqslant 0)$ — неотрицательная возрастающая непрерывная функция. Тогда регуляризованное уравнение $\overline{B}\widetilde{A}x + \overline{\alpha}(\overline{B}\xi_1, \eta)\overline{B}(x - x^0) = \overline{f} + \eta$ определяет двухпараметрическое семейство состоятельных решающих процедур $b_{\lambda\zeta}$ (параметр $\overline{\alpha}(\overline{B}\xi_1, \eta)$ выбирается по теореме 3, $\delta = \lambda$, $h = \zeta$).

Замечание 3. Пусть $B(\Omega, X)$ — семейство всех измеримых отображений $x(\omega): \Omega \to X$ таких, что $\sup\{\|x(\omega)\|, \omega \in \Omega\} < \infty$, X — конечномерное банахово пространство, $A: \Omega \times X \to X^*$ — максимальный монотонный случайный оператор, имеющий не более чем счетное множество точек разрыва, D — выпуклая замкнутаяоограниченная область, $0 \in \operatorname{int} D$, на границе области D выполнено неравенство $\langle A(\omega)x - f(\omega), x\rangle \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in B(\Omega, X^*)$. Тогда существует элемент $x(\omega) \in B(\Omega, X)$ такой, что $f(\omega) \in A(\omega)x(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Доказательство этого утверждения мало отличается от доказательства предложения 3.1 из [15]. Приведенный результат позволяет доказать существование случайного решения регуляризованного уравнения и перенести полученные результаты на указанный класс разрывных отображений.

Замечание 4. Если D — выпуклая замкнутая область в X, $\operatorname{int} D \neq \varnothing$, то все приведенные утверждения справедливы и для задачи решения вариационного неравенства $\langle Ax - f, z - x\rangle \geqslant 0$ при всех $z \in D$, $x \in D$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисковец О. А. Теория и методы решения некорректных задач.—В сб.: Матем. анализ, М., 1982, т. 20, с. 116—178.

2. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск, 1982. 190 с.

3. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями — регуляризирующий алгоритм.— ДАН СССР, 1978, т. 239, № 5, с. 1017—1020.

4. Kannan R., Salehi H. Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities.— J. Math. Anal. and Appl., 1977, v. 57, № 1, p. 234—259.

5. Nashed M. Z., Salehi H. Measurability of generalized inverses of random linear operators.— SIAM J. Appl. Math., 1973, v. 25, № 4, p. 681—692.

6. Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.— Math. Studies, North Holland, 1973. 183 p.

7. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972. 416 с.

8. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967. 624 с.

9. Рязанцева И. П. О решении вариационных неравенств с монотонными операторами методом регуляризации.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 479—483.

10. Лоэв М. Теория вероятностей. М., 1962. 719 с.

11. Альбер Я. И., Шильман С. В. Неасимптотические оценки скорости сходимости стохастических итеративных процессов.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 1, с. 41—52.

12. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961. 472 с.

13. Березанский Ю. М. Пространства с негативной нормой.— УМН, 1963, т. XVIII, № 1 (109), с. 63—96.

14. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., 1975. 232 с.

15. Kravvaritis Dimitros. Existence theorems for nonlinear random equations and inequalities.— J. Math. Anal. and Appl., 1982, v. 88, № 1, p. 61—75.

г. Горький

Поступили
первый вариант 26.06.1984
окончательный вариант 16.12.1985