Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. Н. Кроль, О непрерывности решений квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений в граничной точке, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 21, 42–51

https://www.mathnet.ru/znsl2421

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
11 декабря 2025 г., 06:42:52

И.Н.Кроль

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ

Вопрос о регулярности квазилинейных уравнений вида

$$D_{x_i}[a_i(x,u,u_x)] = a(x,u,u_x) \qquad (0.I)$$

и более общих изучался в работах О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой (см. [I]), Дж.Серрина [2] , [3] и других авторов. В [I], в частности, установлено при естественных предположениях относительно коэффициентов (0.I), что обобщенное решение уравнения (0.I) из $L^1_p(\Omega)$ удовлетворяет условию Гельдера в любой компактной подобласти Ω , Там же показано, что это свойство сохраняется и в окрестности граничной точки, если нижняя объемная плотность $R^n\setminus\Omega$ в этой точке положительна.

В настоящей заметке приводится оценка вблизи границы модуля непрерывности решения задачи Дирихле для квазилинейного неравномерно эллиптического уравнения.Результат сформулирован в терминах p-емкости и функции μ , описывающей вырождение или характер особенности коэффициентов в граничной точке. Для нелинейных уравнений оценка такого типа была получена в работе В.Г.Мазьи [4] в случае $\mu=1$.

Кроме того, здесь рассматривается поведение решений квазилинейных уравнений вблизи границы области, содержащей "нулевое заострение наружу".

§ I. Основные обозначения и определения

Пусть $\mu(t)$ - положительная, непрерывная на $(0,\infty)$ функция, такая что*) $\mu(at)\sim\mu(t)$, $a=const>0$. Будем считать, что $\mu(t)$ продолжена на $(1,\infty)$ функцией t^{α} , где $\alpha>0$ - достаточно большое число.

Далее, пусть Ω - ограниченное открытое подмножество R^n с границей $\partial\Omega$, точка $0\in\partial\Omega$. Обозначим через $L^1_{p,\mu}(\Omega)$ пространство локально суммируемых в Ω функций φ , таких что

---

*) Здесь и ниже $a\sim b$ означает, что $c_1\le ab^{-1}\le c_2$, где c_1 и c_2 - положительные постоянные.

$$\int_\Omega \mu(|x|)|D\varphi|^p dx < \infty, \tag{0.2}$$

где $p>1$, $D\varphi=(\partial\varphi/\partial x_1,\dots,\partial\varphi/\partial x_n)$. Пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными в Ω носителями в метрике (0.2) назовем пространством $\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\Omega)$. Через $L^1_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$, обозначены, соответственно, пространства $L^1_{p,1}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{L}{}^1_{p,1}(\Omega)$, через $(\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu})^*(\Omega)$ – пространство обобщенных функций, сопряженное к $\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\Omega)$.

Через C обозначены различные положительные постоянные, через $\mathcal{D}_\rho$ – открытый шар с центром в точке 0. Кроме того, $C\Omega$ и $\bar{\Omega}$ – дополнение и замыкание Ω, $\Omega_\rho=\Omega\cap\mathcal{D}_\rho$, $C_\rho=C\Omega\cap\mathcal{D}_\rho$.

Пусть $a(x,u,Du)$ – n -мерная вектор-функция на $\Omega\times R^1\times R^n$, такая что

I) для почти всех $x\in\Omega$ и всех $u\in R^1$ функция $Du\to a(x,u,Du)$ непрерывна в R^n, для почти всех $x\in\Omega$ и всех $Du\in R^n$ функция $u\to a(x,u,Du)$ непрерывна в R^1, для всех $u\in R^1$ и всех $Du\in R^n$ функция $x\to a(x,u,Du)$ измерима по n-мерной мере,

2) $|a(x,u,Du)|\le\lambda\mu(|x|)|Du|^{p-1}$, $\lambda=\mathrm{const}>1$,

при почти всех $x\in\Omega$ и всех $u\in R^1$,

3) $a(x,u,Du)\cdot Du\ge\mu(|x|)|Du|^p$ *)

при почти всех $x\in\Omega$ и всех $u\in R^1$,

4) $[a(x,u,Du)-a(x,v,Dv)](Du-Dv)>0$

при всех $u,v\in R^1$, $Du\ne Dv$ и при почти всех $x\in\Omega$.

Так как $a(x,u,Du)\in(L_{p,\mu})^*(\Omega)$, то для всех $u\in L^1_{p,\mu}(\Omega)$ и $\varphi\in\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\Omega)$ сходится интеграл

$$\mathcal{L}(u,\varphi)=\int_\Omega a(x,u,Du)D\varphi\,dx. \tag{I.I}$$

Пусть h – функция из $L^1_{p,\mu}(\Omega)$. Будем говорить, что функция $u\in L^1_{p,\mu}(\Omega)$ является решением задачи Дирихле для уравнения

$$\mathrm{div}\,[a(x,u,Du)]=0, \tag{I.2}$$

если для всех $\varphi\in\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\Omega)$

$$\mathcal{L}(u,\varphi)=0,\quad (u-h)\in\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\Omega). \tag{I.3}$$

---

*) Точкой обозначено скалярное умножение в R^n.

С помощью методики, развитой Ж.Лере и Ж.-Л.Лионсом [5] для квазилинейных уравнений произвольного порядка ($\mu \equiv 1$), нетрудно показать, что существует одно и только одно решение $u(x) \in L^1_{p,\mu}(\Omega)$ задачи (I.3).

§ 2. $0(p,\mu)$-емкости и A-потенциалах.

Пусть e -компакт в $\mathcal{D}_\rho$, $\mathcal{V}_\rho(e)$ - множество функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, равных единице в окрестности e. Назовем (p,μ)-емкостью компакта e относительно $\mathcal{D}_\rho$ число:

$$p\text{-}cap_\rho^\mu e = \inf_{\varphi \in \mathcal{V}_\rho(e)} \int_{\mathcal{D}_\rho} \mu(|x|)\,|D\varphi|^p\,dx$$

В случае $\rho = \infty$ будем использовать обозначения: $\mathcal{V}(e)$, $p\text{-}cap^\mu e$. Соответственно, p-емкостью ($p\text{-}cap\, e$) компакта e назовем $p\text{-}cap^1 e$.

Из определения (p,μ)-емкости следует, что если $e_1 \subset e_2$ и $\rho_1 > \rho_2$, то $p\text{-}cap^\mu_{\rho_1} e_1 \le p\text{-}cap^\mu_{\rho_2} e_2$. Если $e = \bar{\mathcal{D}}_r$, $r<\rho$, то

$$p\text{-}cap_\rho^\mu \mathcal{D}_r = \omega_n \left\{ \int_r^\rho [\mu(t) t^{n-1}]^{1-q}\, dt \right\}^{1-p},$$

где ω_n - площадь поверхности $\mathcal{D}_1$.

Нетрудно показать, что если

$$\int_0^1 \mu(t)\, t^{n-p-1}\, dt < \infty \tag{2.I}$$

то

$$p\text{-}cap^\mu e \sim p\text{-}cap^\mu_\rho e \sim p\text{-}cap^\mu_{\beta\rho} e,$$

где e - компакт в $\mathcal{D}_{\rho/2}$, $\beta = const > 1$.

<u>Теорема I.</u> Пусть выполнено условие (2.I), e - компакт в $\mathcal{D}_1$. Тогда

$$p\text{-}cap^\mu e \sim \int_0^1 \mu(t) \cdot p\text{-}cap(e \cap \mathcal{D}_t)\, t^{-1}\, dt.$$

<u>Доказательство.</u> Покажем сначала, что

$$p\text{-}cap^\mu e \sim \sum_{k=0}^\infty \mu(2^{-k})\, p\text{-}cap(e \cap C_k), \tag{2.2}$$

где $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ - концентрические шаровые кольца, $C_k = \{x : 2^{-k-1} \le |x| \le 2^{-k}$,

$$\mathcal{D}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k .$$

Обозначим $M_k = \bigcup_{i=-1}^{1} C_{k-i}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(e)$, $\eta_k \in \mathcal{V}_{M_k}(e \cap C_k)$. Ясно, что $(\varphi\eta_k) \in \mathcal{V}_{M_k}$.

В силу монотонности емкости

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-cap}(e \cap C_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-cap}_{M_k}(e \cap C_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) \int_{M_k} |D\varphi\eta_k|^p dx \leq \tag{2.3}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) \int_{M_k} |\eta_k|^p |D\varphi|^p dx + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) \int_{M_k} |\varphi|^p |D\eta_k|^p dx.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $|D\eta_k| \leq c2^k$.Теперь, увеличивая интегралы в правой части (2.3) и применяя аналог неравенства Харди:

$$\| |x|^{-1} \varphi(x) \|_{L_{p,\mu}(R^n)} \leq c \, \| \varphi(x) \|_{L^1_{p,\mu}(R^n)},$$

получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-cap}(e \cap C_k) \leq c \int_{R^n} \mu(|x|) |D\varphi|^p dx +$$

$$+ c \int_{R^n} \mu(|x|) |x|^{-p} |\varphi|^p dx \leq c \int_{R^n} \mu(|x|) |D\varphi|^p dx.$$

Теперь, минимизируя правую часть в последнем неравенстве по множеству $\mathcal{V}(e)$, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-cap}(e \cap C_k) \leq c\, p\text{-cap}^{\mu} e.$$

Для получения обратного неравенства построим функцию

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k , \qquad \varphi_k \in \mathcal{V}_{M_k}(e \cap C_k).$$

Ясно, что $\varphi \in \mathcal{V}(e)$. Поэтому

$$p\text{-}cap^{\mu} e \leq \int_{\mathcal{D}_1} \mu(|x|)|D\varphi|^p dx \leq c\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) \int_{C_k} |D\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k|^p dx. \quad (2.4)$$

Так как в C_k отличны от нуля только φ_{k-1}, φ_k, φ_{k+1}, то

$$\int_{C_k} |D\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k|^p dx \leq \int_{M_{k-1}} |D\varphi_{k-1}|^p dx + \int_{M_k} |D\varphi_k|^p dx + \int_{M_{k+1}} |D\varphi_{k+1}|^p dx. \quad (2.5)$$

Применяя (2.5) в каждом кольце, мы увеличим сумму в неравенстве (2.4) в три раза, следовательно,

$$p\text{-}cap^{\mu} e \leq c\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) \int_{M_k} |D\varphi_k|^p dx. \quad (2.6)$$

Так как $\varphi_k \in \mathcal{V}(e \cap C_k)$, то, минимизируя каждый интеграл в (2.6) по своему множеству, получим:

$$p\text{-}cap^{\mu} e \leq c\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-}cap(e \cap C_k),$$

откуда следует (2.2).

Несложно показать, используя рассуждения Келлога и Василеско [6], примененные ими при записи критерия Винера в интегральной форме, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(2^{-k}) p\text{-}cap(e \cap C_k) \sim \int_0^1 \mu(t) p\text{-}cap(e \cap C_t) t^{-1} dt.$$

Теорема доказана.

Будем называть A-потенциалом компакта e относительно шара $\mathcal{D}_\rho$ решение $V(x) \in L^1_{p,\mu}(\mathcal{D}_\rho \setminus e)$ уравнения (I.2), такое что $(V-\varphi) \in \overset{\circ}{L}{}^1_{p,\mu}(\mathcal{D}_\rho \setminus e)$ для $\varphi \in \mathcal{V}_\rho(e)$.

Если выполнено условие (2.I), то для A-потенциала $V(x)$ компакта $e \subset \mathcal{D}_{\rho/2}$ относительно $\mathcal{D}_{8\rho}$ при $x \in \overline{\mathcal{D}}_\rho$ справедливы оценки:

$$c_1 \left[\frac{p\text{-}cap^{\mu} e}{\int_0^R \mu(t) t^{n-p-1} dt}\right]^{q-1} \leq V(x) \leq c_2 \left[\frac{p\text{-}cap^{\mu} e}{\int_0^r \mu(t) t^{n-p-1} dt}\right]^{q-1} \quad (2.7)$$

где R и r – наибольшее и наименьшее расстояние от точки $x \in \mathcal{D}_\rho$ до e; c_1, c_2 – постоянные зависящие только от λ, n, p.

Доказательство(2.7) проводится по схеме, аналогичной примененной при выводе двухсторонних оценок решений линейных уравнений $D_{x_i}[a_{ij}(x)D_{x_j}u]=0$ вблизи неустранимой точечной особенности в работах [7],[8] , а для нелинейных уравнений (0.I) - в работе [2].

Ниже A - потенциал используется в качестве барьера для доказательства основной теоремы.

§ 3. Оценка модуля непрерывности решений

Теорема 2. Пусть Ω - ограниченное открытое множество, точка $0\in\partial\Omega$ и h - функция из $C(\bar{\Omega})\cap L^1_{p,\mu}(\Omega)$. Для решения $u(x)\in L^1_{p,\mu}(\Omega)$ задачи (I.3) справедливы оценки:*)

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_r} u \le \operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap\mathcal{D}_\rho} h + c\cdot\operatorname*{osc}_{\partial\Omega} h\cdot\exp\left\{-K\int_r^\rho [\varphi(t)]^{q-1}t^{-1}dt\right\}, \qquad (3.I)$$

если выполнено условие (2.I), и

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_r} u \le \operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap\mathcal{D}_\rho} h + c\cdot\operatorname*{osc}_{\partial\Omega} h\cdot\left\{\int_0^r [\mu(t)t^{n-1}]^{1-q}dt\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^\rho [\mu(t)t^{n-1}]^{1-q}dt\right\}^{-\frac{1}{q}},$$

если

$$\int_0^1 [\mu(t)t^{n-1}]^{1-q}dt < \infty, \qquad (3.2)$$

где $r<\alpha\rho$, $0<\alpha\ll 1$, c и K - положительные постоянные, зависящие от λ , n , p и

$$\varphi(t)=\left\{\int_0^t \mu(\tau)p\text{-}\operatorname{cap}C_\tau\frac{d\tau}{\tau}\right\}\left\{\int_0^t \mu(\tau)\tau^{n-p-1}d\tau\right\}^{-1}.$$

Для линейных уравнений оценки максимума модуля решения типа (3.I) были доказаны В.Г.Мазьей [9] ,[I0]с помощью интегральных неравенств, и в дальнейшем Е.М.Ландисом [II] и Г.Н.Блохиной [I2], использовавшими барьеры.

Из доказанной теоремы следует, что если условие (2.I) выполнено и

---

*) $\operatorname{osc} w = \sup w - \inf w$

$$\int_0 [\varphi(t)]^{q-1}\,dt = \infty, \tag{3.3}$$

то решение $u(x)$ задачи (I.3), где $h \in C(\bar{\Omega}) \cap L^1_{p,\mu}(\Omega)$, непрерывно в точке $0 \in \partial\Omega$. Действительно, для любого $\rho > 0$ в силу (3.I)

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\, |u(x) - h(0)| \le \operatorname*{osc}_{\mathcal{D}_\rho \cap \partial\Omega} h + c \cdot \operatorname*{osc}_{\partial\Omega} h \cdot$$

$$\cdot \overline{\lim_{x\to 0}} \cdot \exp\left\{-\kappa \int_r^\rho [\varphi(t)]^{q-1} t^{-1}\,dt\right\} = \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap \mathcal{D}_\rho} h,$$

так что $u(x) \longrightarrow h(0)$ при $x \to 0$.

В силу того же неравенства (3.I), совокупности условий (2.I), $h \in C^\delta(\bar{\Omega}) \cap L^1_{p,\mu}(\Omega)$ и

$$\underline{\lim_{r\to 0}}\, \frac{1}{\ln \frac{1}{r}} \int_r^1 [\varphi(t)]^{q-1} t^{-1}\,dt > 0 \tag{3.4}$$

достаточно для того, чтобы решение задачи (I.3) удовлетворяло в точке $0 \in \partial\Omega$ условию Гельдера.

Действительно, при $r < d\rho$

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_r} u \le \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap \mathcal{D}_\rho} h + c \cdot \operatorname*{osc}_{\partial\Omega} h \cdot \exp\left\{-\kappa \int_r^1 [\varphi(t)]^{q-1} t^{-1}\,dt\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\kappa \int_\rho^1 [\varphi(t)]^{q-1} t^{-1}\,dt\right\} \le c(\rho^\delta + r^\gamma \rho^{-\beta}),$$

где β, γ, δ – положительные постоянные, Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Положим $\rho = r^\varepsilon$. Тогда

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_r} u \le c(r^{\varepsilon\delta} + r^{\gamma - \varepsilon\beta}) \le c r^{\varkappa}, \quad \varkappa > 0.$$

Если же выполнено условие (3.2) и $h \in C^\delta(\bar{\Omega}) \cap L^1_{p,\mu}(\Omega)$, то решение задачи (I.3) удовлетворяет условию Гельдера, каково бы ни было множество Ω.

Отметим, что если точка $0 \in \partial\Omega$ принадлежит континууму, содержащемуся в $C\Omega$, то условие (3.4) выполнено, если имеет место (2.I) и $p > n-1$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\mu(t) = t^\beta$, область Ω в окрестности точки 0 есть тело вращения, граница которого задана уравнением $|x'| = f(x_n)$, где $f(t)$ – непрерывная возрастающая функция,

такая что $0<f(t)<t$, ось Ox_n направлена в $C\Omega$, $0<x_n<c$.

Тогда условие (3.3) для области такого вида выполнено, если:

$$\int_0 [t^{-1}f(t)]^{\frac{n+\beta-p-1}{p-1}} t^{-1}\,dt = \infty \qquad \text{при } p<n+\beta-1,$$

$$\int_0 |\log f(t)|^{-1} t^{-1}\,dt = \infty \qquad \text{при } p=n+\beta-1.$$

В случае $p>n+\beta-1$ всегда выполнено условие (0.16); если $f(t)\geq ct$, то (3.4) выполнено и при $p\leq n+\beta-1$.

§ 4. О поведении решений эллиптических уравнений вблизи "нулевых" заострений границы.

Пусть, как и ранее, Ω – ограниченное открытое подмножество R^n с границей $\partial\Omega$. Будем говорить, что $\partial\Omega$ в окрестности точки $0\in\partial\Omega$ имеет "нулевое заострение наружу", если диаметр проекции множества $\Omega\cap\partial\mathcal{D}_\rho$ на $\partial\mathcal{D}_1$ стремится к нулю при $\rho\to 0$.

Теорема. Пусть $\partial\mathcal{D}$ в окрестности точки 0 имеет "нулевое заострение наружу". Тогда для решения $u(x)\in L^1_{p,\mu}(\Omega)$ задачи (1.3), $h=0$ на $\partial\Omega$, в окрестности точки 0 справедлива оценка:

$$\sup_{x\in\Omega_\tau}|u(x)|\leq c\cdot\exp\left\{-\int_\tau^\rho \log\left[k\inf_{\tau<t}\frac{\tau}{d(t)}\right]t^{-1}dt\right\} \tag{4.1}$$

при $\tau<4^{-1}\rho$; где c и k – положительные постоянные, зависящие только от λ, n, p, $\max\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$.

Доказательство. Пусть, как и ранее,

$$M(t)=\sup_{\Omega_t}|u(x)|.$$

Следуя Дж.Серрину [2], получим оценку:

$$M(\rho/2)\leq c\rho^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L_p(\Omega_\rho\setminus\Omega_{\rho/4})}. \tag{4.2}$$

В силу неравенства Фридрихса:

$$\|u\|_{L_p(\Omega\cap\partial\mathcal{D}_\rho)}\leq c\,d(\rho)\|Du\|_{L_p(\Omega\cap\partial\mathcal{D}_\rho)},$$

откуда, интегрируя от $4^{-1}\rho$ до ρ, получаем:

$$\|u\|_{L_p(\Omega_\rho\setminus\Omega_{\rho/4})} \le c\cdot \sup_{r\le d} d(r)\|Du\|_{L_p(\Omega_\rho\setminus\Omega_{\rho/4})}. \qquad (4.3)$$

Пусть, далее, $\eta(\rho)\in C_0^\infty(\mathcal{D}_\rho)$, $\eta=1$ в $\mathcal{D}_{\rho/2}$, $0\le\eta_0\le 1$ в $\mathcal{D}_\rho\setminus\mathcal{D}_{\rho/2}$, $|D\eta|\le c\rho^{-1}$. Так как $(u\eta)\in \overset{\circ}{L}_{p,\mu}(\Omega_\rho)$, то

$$\int_\Omega a(x,u,Du)D(u\eta)dx=0,$$

откуда с помощью неравенств 2),3) получим:

$$\|\eta Du\|_{L_{p,\mu}(\Omega_\rho)}\le c\|uD\eta\|_{L_{p,\mu}(\Omega_\rho)}.$$

Из последнего неравенства следует оценка:

$$\|Du\|_{L_{p,\mu}(\Omega_\rho)}\le c\mathcal{M}(\rho)\left\{\int_{\rho/2}^{\rho}\mu(t)t^{n-p-1}dt\right\}^{\frac{1}{p}}\le c\mathcal{M}(\rho)\mu^{\frac{1}{p}}(\rho)\rho^{-1+\frac{1}{q}}. \qquad (4.4)$$

Объединяя неравенства (4.2)-(4.4), получим оценку:

$$\mathcal{M}(\rho/2)\le c\rho^{-1}\sup_{r\le\rho} d(r)\mathcal{M}(\rho)\le c\sup_{r\le\rho}\frac{d(r)}{r}\mathcal{M}(\rho). \qquad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что

$$\log\mathcal{M}(t)-\log\mathcal{M}(t/2)\ge-\log\left[c\cdot\sup_{r\le t}\frac{d(r)}{r}\right].$$

Умножая последнее неравенство на t^{-1} и интегрируя от $2r$ до ρ, получим:

$$\int_{\rho/2}^{\rho}\log\mathcal{M}(t)\frac{dt}{t}-\int_{r}^{2r}\log\mathcal{M}(t)\frac{dt}{t}\ge-\int_{2r}^{\rho}\log\left[c\sup_{r\le t}\frac{d(r)}{r}\right]\frac{dt}{t},$$

откуда

$$(\log 2)[\log\mathcal{M}(\rho)-\log\mathcal{M}(r)\ge-\int_{2r}^{\rho}\log\left[c\cdot\sup_{r\le t}\frac{d(r)}{r}\right]\frac{dt}{t}.$$

Последнее неравенство эквивалентно (4.I).

ЛИТЕРАТУРА

I. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, 1964.

2. J.Serrin. Local behavior of solutions of quasilinear equations, Acta Matematica, III,1964,247-302.

3. J.Serrin. Isolated singularities of solutions of quasilinear equations, Acta matematica, II3,1965, 219-240.

4. В.Г.Мазья. О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, № I3, 1970, 42-55.

5. J.Leray, J.-L.Lions. Qulques resultats de Visik sur les problemes elliptiques non lineaires par le methodes de Minty-Browder, Bull.Soc.math.France,1965,93-107.

6. O.D.Kellogg, F.Vasilesco. A contribution to the theory of capacity. Amer. Journ.of Math., 5I, 1929.

7. H.Royden. The growth of a fundemental solution of an elliptic divergence structure equation. Studies in Mathematical Analysis and Related Topics: Essays in Honor of George Polya, Stanford, 1962, 333-340.

8. W.Littman, G.Stampacchia, H.F.Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann.Sc.Norm Super.Pisa, s.III, v.XVII, f.I-2, 1963, 45-79. (Русский перевод: Математика,9:2,1965,72-97)

9. В.Г.Мазья. О модуле непрерывности решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы, В кн. "Проблемы математического анализа", Л., 1966, 45-58.

10. В.Г.Мазья. О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме. Математ.заметки, 2, № 2, 1967, 209-220.

II. Е.М.Ландис. Уравнения с частными производными, ч.I.П. М., 1967-1968.

I2. Г.Н.Блохина. Теоремы типа Фрагмена-Линделефа для линейного эллиптического уравнения второго порядка, ДАН СССР, I62, № 4, 1965, 727-730.