

Общероссийский математический портал

А. С. Алиев, А. И. Баркин, Алгоритмическое и программное обеспечение для вычисления точной границы устойчивости нелинейной дискретной системы, *ИТuBC*, 2011, выпуск 4, 39–44

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

26 марта 2025 г., 17:57:41



Алгоритмическое и программное обеспечение для вычисления точной границы устойчивости нелинейной дискретной системы

А.С. Алиев, А.И. Баркин

Аннотация. Приводится алгоритм вычисления максимальной области абсолютной устойчивости по величине сектора, ограничивающего нелинейность в нелинейной дискретной системе. Используется метод гармонического баланса по элементам тригонометрического полинома. Разработано прикладное программное обеспечение для исследования устойчивости нелинейных дискретных систем.

Ключевые слова: алгоритмы вычислений, нелинейные системы управления, импульсные системы, абсолютная устойчивость, частотные характеристики.

Введение

В предыдущей работе [1] был рассмотрен алгоритм вычисления периодических колебаний в непрерывных системах с ключом. Поскольку такие системы являются частным случаем систем, изучаемых в теории абсолютной устойчивости [2,3], то отсутствие периодических колебаний является необходимым условием абсолютной устойчивости. Для непрерывных систем второго и третьего порядка доказано [4,5], что условие отсутствия простых периодических колебаний является одновременно достаточным условием абсолютной устойчивости. Эти свойства сохраняются и в дискретных системах [6,7].

В настоящей работе представлен алгоритм и программное обеспечение для получения точных условий существования периодических колебаний в импульсных системах с ключом. Необходимые условия отсутствия таких колебаний можно рассматривать как необходимые условия абсолютной устойчивости нелинейных систем с нестационарной нелинейностью.

1. Условия существования периодических колебаний

Рассмотрим систему (Рис.1), где $G(z)$ - дискретная передаточная функция линейной части; K - ключ, периодически с периодом N замыкающийся на R тактов ($R \leq N$). Предполагается, что ключ работает синфазно с импульсным элементом. Вход $x[n]$ и выход $y[n]$ связаны соотношением:

$$y[n] = kx[n], \text{ если ключ замкнут; } y[n] = 0, \text{ если ключ разомкнут, } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Рассматриваются возможные периодические колебания периода $2N$, обладающие симметрией $x[n+N] = -x[n]$, $y[n+N] = -y[n]$. Такие колебания могут быть представлены [2] тригонометрическими полиномами

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{r=1}^g [A_{2r-1} \sin((2r-1)\bar{\omega}n) + B_{2r-1} \cos((2r-1)\bar{\omega}n)], \\ y[n] &= \sum_{r=1}^g [y_{2r-1} \sin((2r-1)\bar{\omega}n) + y'_{2r-1} \cos((2r-1)\bar{\omega}n)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{\omega} = \pi/N$, $g = (N + 1)/2$, если N - нечетное, и $g=N/2$, если N - четное. Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$y_r = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N y[n] \sin(r\bar{\omega}n), \quad (3)$$

$$y'_r = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N y[n] \cos(r\bar{\omega}n).$$

В отличие от непрерывного случая, где периодические колебания описываются тригонометрическими полиномами (т.е. конечными отрезками ряда Фурье) *приближенно*, формулы (2, 3) являются точными. При $N = 1$ и $N = 2$ суммы в (2) состоят из одного слагаемого ($g = 1$), однако число слагаемых растет по мере роста N .

В силу условия (1) получаем

$$y_r = k \sum_{s=1}^N [A_s \psi_{rs} + B_s \varphi_{rs}], \quad (4)$$

где

$$\psi_{rs} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^R \sin(r\bar{\omega}n) \sin(s\bar{\omega}n), \quad (5)$$

$$\varphi_{rs} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^R \sin(r\bar{\omega}n) \cos(s\bar{\omega}n).$$

Введем следующие обозначения:

$$\vartheta(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^R \cos(r\bar{\omega}n) = \frac{\cos[(R+1)r\bar{\omega}/2] \sin(Rr\bar{\omega}/2)}{N \sin(r\bar{\omega}/2)},$$

$$\eta(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^R \sin(r\bar{\omega}n) = \frac{\sin[(R+1)r\bar{\omega}/2] \sin(Rr\bar{\omega}/2)}{N \sin(r\bar{\omega}/2)}.$$

Тогда получаем

$$\psi_{rs} = \vartheta(r-s) - \vartheta(r+s), \quad r \neq s,$$

$$\psi_{rr} = R/N - \vartheta(2r), \quad (6)$$

$$\varphi_{rs} = \eta(r+s) - \eta(s-r), \quad r \neq s,$$

$$\varphi_{rr} = \eta(2r).$$

Аналогично

$$y'_r = k \sum_{s=1}^N [A_s \varphi_{sr} + B_s \mu_{rs}], \quad (7)$$

где

$$\mu_{rs} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^R \cos(r\bar{\omega}n) \cos(s\bar{\omega}n). \quad (8)$$

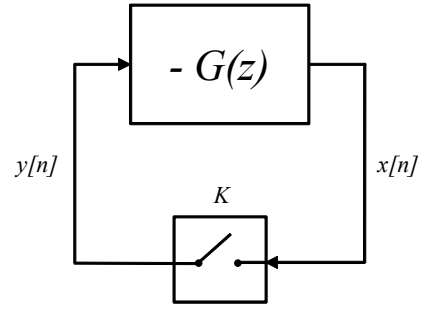


Рис. 1.

Используя введенные выше обозначения, получим

$$\mu_{rs} = \vartheta(r-s) + \vartheta(r+s), \quad r \neq s, \quad (9)$$

$$\mu_{rr} = R/N + \vartheta(2r).$$

Нетрудно убедиться в том, что при фиксированном отношении $\gamma = R/N$ и при увеличении N коэффициенты $\psi_{rs}, \varphi_{rs}, \mu_{rs}$ стремятся к одноименным коэффициентам, выведенным в [1] для непрерывного случая.

Уравнения баланса получаются как соотношения, связывающие вход $y[n]$ и выход $x[n]$ линейной части с частотной характеристикой $-G(e^{i\bar{\omega}})$:

$$-A_{2r-1} = y_{2r-1} X_{2r-1} - y'_{2r-1} Y_{2r-1}, \quad (10)$$

$$-B_{2r-1} = y_{2r-1} Y_{2r-1} + y'_{2r-1} X_{2r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, g,$$

где $X_p = \text{Re} G(\exp(pi\bar{\omega}))$, $Y_p = \text{Im} G(\exp(pi\bar{\omega}))$.

Подстановка (4) и (7) в (10) приводит к линейной однородной системе уравнений относительно амплитуд A_{2r-1}, B_{2r-1} .

Эта система имеет определитель

$$\det(kD + I_{2g}) = \det \left(k \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,2g} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{2g,1} & \dots & d_{2g,2g} \end{bmatrix} + I_{2g} \right), \quad (11)$$

где I_{2g} - единичная матрица размера $2g$, а элементы d_{pq} вычисляются по следующей таблице.

	q - нечетное	q - четное
p -нечетное	$d_{pq} = X_p \psi_{p,q} - Y_p \varphi_{q,p}$	$d_{pq} = X_p \varphi_{p,q-1} - Y_p \mu_{p,q-1}$
p - четное	$d_{pq} = X_{p-1} \varphi_{q,p-1} + Y_{p-1} \psi_{q,p-1}$	$d_{pq} = X_{p-1} \mu_{q-1,p-1} + Y_{p-1} \varphi_{p-1,q-1}$

Условием существования периодического режима (2) является равенство нулю определителя (11).

2. Алгоритм вычисления границы абсолютной устойчивости по параметру k

1. Задаем начальным значением $k = k_{ini}$, при котором $\Delta = \det(kD + I_{2p}) > 0$, максимальным значением $N = N_{max}$ и шагом Δk .

2. Для каждого N из интервала $[1, N_{max}]$ проверяется условие $\Delta > 0$ при значениях $R \in [1, N]$.

3. Если при всех $R \in [1, N]$ и $N \in [1, N_{max}]$ это условие выполняется, то величина k увеличивается до $k + \Delta k$ и происходит возвращение к п. 2, в противном случае происходит останова и принимается $k_{max} = k$.

4. Для повышения точности рекомендуется повторить вычисления с уменьшенным шагом Δk .

Как указывалось выше, при $N = 1, 2$ в представлениях (2) присутствует единственная гармоника частоты $\bar{\omega}$:

$$\begin{aligned} x[n] &= A_1 \sin(\bar{\omega}n) + B_1 \cos(\bar{\omega}n), \\ y[n] &= y_1 \sin(\bar{\omega}n) + y_1' \cos(\bar{\omega}n). \end{aligned} \quad (12)$$

Для этого случая из (11) получаем условие существования колебаний

$$\det(kD + I_2) = (\gamma^2 - u^2 - v^2)k^2(X_1^2 + Y_1^2) + 2\gamma kX_1 + 1 = 0, \quad (13)$$

$$\text{где } \gamma = R/N, \quad u = \frac{\sin(\pi\gamma) \cos(\pi\gamma + \pi/N)}{N \sin(\pi/N)},$$

$$v = \frac{\sin(\pi\gamma) \sin(\pi\gamma + \pi/N)}{N \sin(\pi/N)}.$$

При $N = 1$ имеем $R = 1, \gamma = 1, u = 1, v = 0$.

В данном случае $\gamma^2 - u^2 - v^2 = 0$. Поэтому из (13) следует неравенство $kG(e^{i\pi}) > -1/2$ как необходимое условие отсутствия колебаний частоты $\bar{\omega} = \pi$.

При $N = 2$ имеем $R = 1, 2; \gamma = 0.5, 1; u = -0.5, 0; v = 0, 0$. Из (13) получаем неравенство

$$k \operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) > -1, \text{ если } R = 1,$$

$$\text{и } kG(e^{i\pi/2}) \neq -1 \text{ при } R = 2.$$

В *приложении* (см. ниже) дано описание программы вычислений.

Пример 1. Пусть передаточная функция непрерывной линейной части равна

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 2}.$$

При отсутствии импульсного элемента предельное значение сектора абсолютной устойчивости, определенное в [1], равно $k_{max} = 6.98$. Используя приведенную выше методику, определим соответствующий коэффициент при наличии фиксатора с периодом $T = 0.1$. Дискретная передаточная функция линейной части имеет вид

$$G(z) = 4.829415 \cdot 10^{-3} \frac{z + 0.967197}{z^2 - 1.885837z + 0.9048374}.$$

Проведенные расчеты приводят к следующим результатам:

$k_{max} = 5.688, N = 15, R = 7$. Круговой критерий дает $k_{max} = 3.4251$.

Пример 2. Рассмотрим ту же систему, что в примере 1, но при $T = 1$. Дискретная передаточная функция линейной части теперь имеет вид

$$G(z) = 0.3144632 \frac{z + 0.7016423}{z^2 - 0.2976716z + 0.3678795}.$$

Результаты расчетов:

$k_{max} = 2.09455, N = 2, R = 1$. Круговой критерий дает $k_{max} = 2.0944$. В данном случае величины максимального сектора устойчивости, вычисленные по двум критериям, практически совпадают. Этот результат объясняется тем, что, как показано выше, при $N=2, R=1$ устойчивость определяется неравенством $k \operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) > -1$. Для данной системы $\operatorname{Re} G(e^{i\pi/2}) = -0.4774387$, что близко к минимуму действительной части.

Заключение

Предложен способ получения оценки параметрической области устойчивости, базирующийся на применении метода гармонического баланса к исследованию простых нелинейных колебаний в дискретных системах.

Разработана программа, позволяющая с любой точностью для систем любого порядка вычислять необходимую границу устойчивости по величине сектора нелинейности.

Для систем второго и третьего порядка эта граница является и достаточной.

Для вычисления оценки области устойчивости нужна только частотная характеристика дискретного линейного блока, которая может быть задана как формулой, так и в виде массива экспериментальных данных.

Приложение Описание программы вычислений

Для расчетов использовалась усовершенствованная версия программы из [1], оформленная как независимое Windows-приложение.

Программа может работать в двух режимах – для непрерывных и дискретных систем. Внешний вид основного окна в каждом режиме представлен на Рис. 2 и Рис.3.

В обоих режимах целью является определение величины максимального сектора абсолютной устойчивости — числа $k = k^*$, при котором определитель (11) достигает нуля.

Выбор режима осуществляется переключателем *Pulse system* в правом верхнем углу окна.

Перед расчетом требуется задать следующие данные.

- Источник для частотной характеристики. Это либо поле *Input File*, либо поле с аналитическим выражением *Expression for W(p)* (или *Expression for G(z)* для дискретного случая). Имя файла можно ввести вручную, а можно выбрать обычным образом по кнопке *Choose*. Что именно использовать (файл или формулу) определяет переключатель *Use an expression instead of input file*.

- Начальное значение (*min*), шаг (*step*) и максимальное значение (*max*) на панели *k*. Максимальное значение служит для гарантированного останова программы, если не будет найден отрицательный определитель.

- Для непрерывных систем: заполнить панель *Gamma* – начальное (*min*) и конечное (*max*) значение для γ , а также количество значений (*number of*) на этом интервале (Рис. 2). Шаг определяется отношением величины интервала к числу значений, и, задавая различное их число, можно регулировать точность поиска.

Для дискретных систем: заполнить панель *N* – начальное (*min*) и конечное (*max*) значения (Рис. 3).

- Число гармоник (поле *Number of harmonics* на Рис. 2) – только для непрерывных систем.

По кнопке *Run*, начиная с минимального *k*, пробегается все значения частоты и параметров (для непрерывной системы – из панели *Gamma*, для дискретной – из панели *N* и по всем *R*). Для них рассчитывается определитель (11), и при отрицательном значении результат выводится на экран и строится график зависимости определителя от частоты для тех параметров, при которых случилось первое отрицательное значение определителя.

В нижней части окна, под полем *Expression for W(p)*, собраны элементы управления для создания файла с частотной характеристикой по заданному выражению. Требуется ввести имя файла в поле *Output file*, заполнить панель *omega* – начальное значение (*min*), количество значений (*number*) и шаг между ними (*step*) – после чего нажать кнопку *Prepare file*.

Файл с частотной характеристикой должен быть текстовым, с тремя колонками чисел, разделённых пробелами или табуляторами. Первая колонка – значения частоты (ω), две других – действительная и мнимая части частотной характеристики $W(i\omega)$ или $G(e^{i\omega})$. Значения частоты должны быть упорядочены по возрастанию.

Выражение в поле *Expression for W(p)* задаётся как формула от p в стиле языка программирования, что в большинстве случаев совпадает с "естественной" записью.

Аналогично для дискретного случая выражение в поле *Expression for G(z)* задается как формула от z . Примеры заполнения этого поля приведены на Рис. 2 и Рис.3.

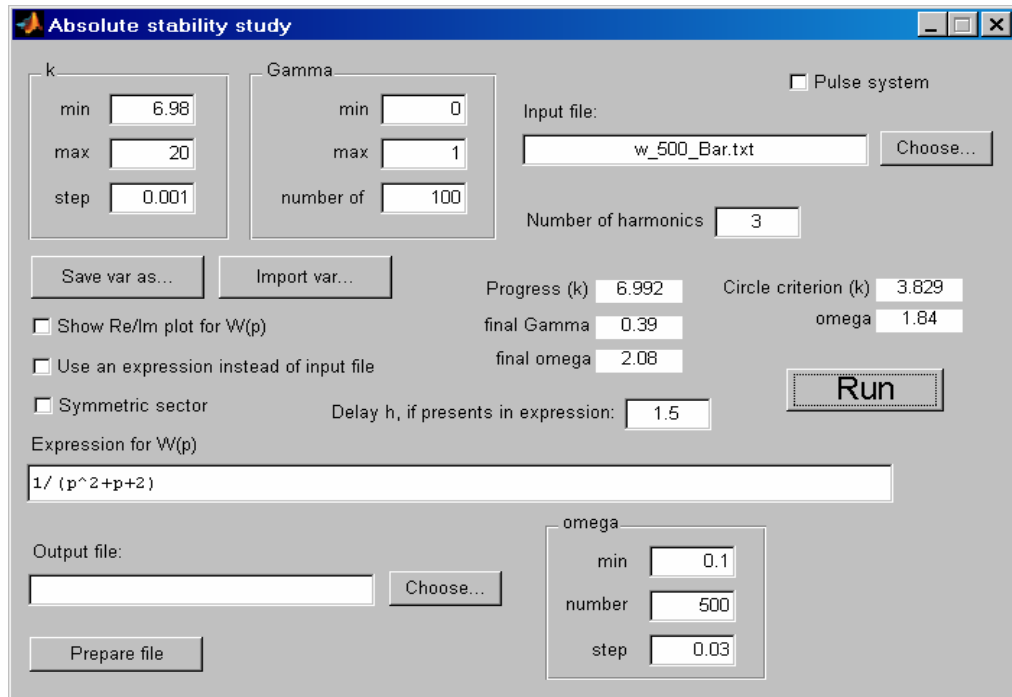


Рис. 2. Непрерывная система

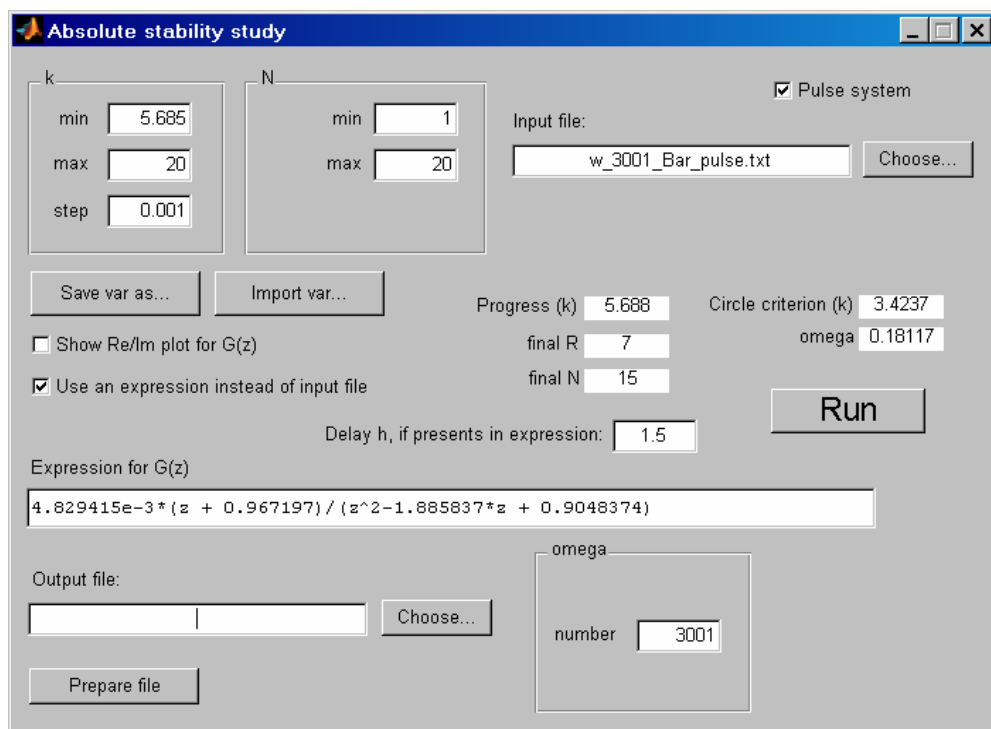


Рис. 3. Дискретная система

Литература

1. Алиев А.С., Баркин А.И. Алгоритм вычисления максимальной величины области абсолютной устойчивости//Информационные технологии и вычислительные системы 3/2009, С. 3-11.
2. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования// Автоматика и телемеханика.1968.№6. С.5-36.
3. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости//Автоматика и телемеханика. 2006. №10. С. 86-119.
4. Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б. Существование периодических движений и критерии абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае // Автоматика и телемеханика. 1991.№5.С. 68-79.
5. Рапопорт Л.Б. Антипериодические движения и алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае. // Автоматика и телемеханика .1993. №7. С. 38-54.
6. Молчанов А.П. Критерий абсолютной устойчивости импульсных систем с нестационарной нелинейностью. I// Автоматика и телемеханика. 1983. №5.С. 73-81.
7. Молчанов А.П. Критерий абсолютной устойчивости импульсных систем с нестационарной нелинейностью. II// Автоматика и телемеханика. 1983. №6.С. 42-52.

Алиев Александр Семенович. Старший научный сотрудник ИСА РАН, кандидат технических наук. E-mail: ali@isa.ru.

Баркин Александр Иванович. Главный научный сотрудник ИСА РАН, доктор технических наук, профессор. E-mail: barkin@isa.ru.