КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

КАЦ Б. А.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В настоящей статье исследуется однородная задача Римана, коэффициент которой $G(t)$ допускает разрывы в конечном числе точек контура, причем не существует, вообще говоря, ни конечных, ни бесконечных пределов $G(t)$ в этих точках. Модуль и аргумент такого коэффициента как бы осциллирует в окрестностях точек разрыва, поэтому обладающие этим свойством функции ниже для краткости будут называться осцилляторами.

1°. Опишем точнее класс осцилляторов. Положительную функцию $v(x, y)$, определенную при $x>0$, $y>0$, будем называть допустимой, если для любых $x>0$, $y>0$, $k>0$ выполняется тождество

$$v(kx, \ ky)=v(x, y)=v(y, x)$$

и сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{v(1, u)\,du}{1-u}=A_v<\infty .$$

Пусть $\{t_j\}_{j=1}^m$ есть конечный набор точек замкнутого гладкого контура L, а $v(x, y)$ — допустимая функция. Введем класс осцилляторов $K_v(t_1, \ldots, t_m)$, состоящий из всех определенных на $L\diagdown\{t_j\}_{j=1}^m$ вещественных функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих таким двум условиям:

I) для любого набора $\{N_j\}_{j=1}^m$ окрестностей точек $\{t_j\}_{j=1}^m$

$$\varphi(t)\in H(L\diagdown\{N_j\}_{j=1}^m)$$

(т. е. удовлетворяет условию Гельдера при $t\in L\diagdown\{N_j\}_{j=1}^m$);

II) существует такая постоянная $A_\varphi>0$, что для любых точек $t', t''\in L\diagdown\{t_j\}_{j=1}^m$, лежащих в одной полуокрестности точки t_j, выполняется неравенство

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')|\leqslant A_\varphi\, v(|t-t_i|, \ |t''-t_j|).$$

Примером допустимой функции может служить

$$v_\lambda(x, y) = \begin{cases} |\ln(x/y)| \text{ при } \lambda = 1; \\ |(x-y)/\min(x, y)|^\lambda \text{ при } 0 < \lambda < 1; \end{cases}$$

соответствующие ей классы осцилляторов обозначим $K_\lambda(t_1, \ldots, t_m)$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Нетрудно показать, что эти классы содержат как ограниченные осцилляторы (например, $|\sin \ln |t-t_0||^\lambda \in K_\lambda(t_0)$), так и неограниченные (например,

$$|(\ln|t-t_0|)\sin\ln|\ln|t-t_0|||^\lambda \in K_\lambda(t_0)).$$

Согласно [1] (с. 457) для каждой точки t_0 гладкого контура L найдется такое число $r(t_0) > 0$, что любая окружность $|z-t_0| = r \leqslant r(t_0)$ пересекает L в двух точках. Фиксируем $r_0 > 0$ так, чтобы $r_0 \leqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} r(t_j)$ и дуги $l_j = L \cap \{z : |z-t_j| \leqslant r_0\}$ попарно не пересекались. Точка t_j делит l_j на две части l_j^- и l_j^+ таким образом, что при положительном обходе L сначала приходится l_j^-, а затем l_j^+. По определению r_0 на каждой из дуг $l_j^\pm$ в качестве параметра можно выбрать расстояние $|t-t_j| = r$, т. е. на $l_j^\pm$ можно положить $t = t_j^\pm(r) = t_j + r \exp i\theta_j^\pm(r)$, где $\theta_j^\pm(r)$ — полярный угол $\arg(t-t_j)$, $r \in (0, r_0]$; в силу гладкости контура L существуют и равны друг другу пределы

$$\lim_{r\to 0} \theta_j^+(r) = \lim_{r\to 0} \theta_j^-(r) = \theta_j.$$

Обозначим $l_j(\rho) = L \cap \{z : \rho \leqslant |z-t_j| \leqslant r_0\}$, $l_j^\pm(\rho) = l_j(\rho) \cap l_j^\pm$, $\varphi_j^\pm(r) = \varphi[t_j^\pm(r)]$ и опишем поведение интегралов типа Коши с плотностями классов K_v в окрестности точек разрыва плотностей.

Лемма 1. *Если $\varphi(t)$ есть ограниченная функция класса $K_v(t_1, \ldots, t_m)$, то при $|z-t_j| \leqslant r_1 \leqslant r_0$ разность*

$$\int\limits_{l_j} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \int\limits_{l_j(|z-t_j|)} \frac{\varphi(t)}{t-t_j}\,dt \tag{1}$$

ограничена.

Доказательство. Рассмотрим сначала интеграл

$$\int\limits_{l_j^+} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \varphi_j^+(\rho)\int\limits_{l_j^+} \frac{dt}{t-z} + \int\limits_\rho^{r_0} [\varphi_j^+(r) - \varphi_j^+(\rho)]\,\frac{dt_j^+(r)}{t_j^+(r)-t_j} +$$

$$+ \int\limits_0^\rho [\varphi_j^+(r) - \varphi_j^+(\rho)]\,\frac{dt_j^+(r)}{t_j^+(r)-z} + \int\limits_\rho^{r_0} [\varphi_j^+(r) - \varphi_j^+(\rho)] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-t_j}\right] dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где $\rho = |z - t_j|$, $r = |t - t_j|$. Очевидны формулы

$$I_1 = \varphi_j^+(\rho) \ln [(t_j^+(r_0) - z) / (t_j - z)],$$

$$I_2 = \int\limits_{l_j^+(|z-t_j|)} \frac{\varphi(t)}{t - t_j} dt + \varphi_j^+(\rho) \ln [(t_j^+(r_0) - t_j) / (t_j^+(\rho) - t_j)].$$

Отсюда

$$I_1 + I_2 = \int\limits_{l_j^+(|z-t_j|)} \frac{\varphi(t)}{t - t_j} dt + \varphi_j^+(\rho) \ln \frac{t_j^+(r_0) - z}{t_j^+(r_0) - t_j} \cdot \frac{t_j^+(\rho) - t_j}{t_j - z}. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что при ограниченной функции φ второе слагаемое в (2) ограничено. Перейдем к оценке I_3 и I_4. Из гладкости L следует существование такой константы $A_L > 0$, что $|dt_j^{\pm}(r)| \leqslant A_L dr$. Значит,

$$|I_3| \leqslant A_\varphi A_L \int\limits_0^\rho v(\rho, r) \frac{dr}{\rho - r} = A_\varphi A_L \int\limits_0^1 \frac{v(\rho, \rho u)}{1 - u} du < \infty,$$

$$|I_4| \leqslant A_\varphi A_L \int\limits_\rho^{r_0} v(\rho, r) \frac{\rho}{r} \cdot \frac{dr}{r - \rho} = A_\varphi A_L \int\limits_{\rho/r_0}^1 \frac{v(\rho, \rho u^{-1})}{1 - u} du < \infty.$$

Из этих оценок и из равенства (2) следует, что разность интегралов (1), взятых по l_j^+, ограничена при достаточно малых $|z - t_j|$. Точно так же доказывается ограниченность разности (1) интегралов по l_j^-. Лемма доказана.

С помощью очевидной формулы

$$\frac{dt_j^{\pm}(r)}{t_j^{\pm}(r) - t_j} = \frac{dr}{r} + i d\theta_j^{\pm}(r)$$

из этой леммы выводится следующая

Лемма 2. *Если $\varphi(t)$ есть ограниченная функция класса $K_v(t_1, \dots, t_m)$, то имеют место следующие предложения:*
а) *при $|z - t_j| \leqslant r_1 < r_0$ ограничены суммы*

$$\operatorname{Re} \int\limits_{l_j} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt + \int\limits_{|z-t_j|}^{r_0} [\varphi_j^-(r) - \varphi_j^+(r)] \frac{dr}{r}, \quad (3)$$

$$\operatorname{Im} \int\limits_{l_j} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt + \int\limits_{|z-t_j|}^{r_0} [\varphi_j^-(r) \frac{d\theta_j^-}{dr} - \varphi_j^+(r) \frac{d\theta_j^+}{dr}] dr; \quad (4)$$

б) $$\lim_{z \to t_j} \frac{1}{\ln |z - t_j|} \operatorname{Im} \int\limits_{l_j} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z} = 0;$$

в) *если контур L (или хотя бы малая дуга, содержащая t_j) является контуром Ляпунова, то при $|z-t_j|\leqslant r_1<r_0$ ограничена величина* $\operatorname{Im}\int\limits_{l_j}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$.

Не останавливаясь на доказательстве этих предложений, сделаем несколько замечаний. Вторые слагаемые в суммах (3) и (4) можно записать в иной форме, если ввести обозначение

$$q_j^{\varphi}(\rho)=(\ln\rho^{-1})^{-1}\int\limits_{\rho}^{r_0}[\varphi_j^{-}(r)-\varphi_j^{+}(r)]\,\frac{dr}{r}. \tag{5}$$

Суммы (3) и (4) примут вид

$$\operatorname{Re}\int\limits_{l_j}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}-q_j^{\varphi}(|z-t_j|)\ln|z-t_j|, \tag{3^1}$$

$$\operatorname{Im}\int\limits_{l_j}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}-q_j^{\tilde{\varphi}}(|z-t_j|)\ln(z-t_j|, \tag{4^1}$$

где $\tilde{\varphi}_j^{\pm}(r)=r\varphi_j^{\pm}(r)\dfrac{d\theta_j^{\pm}}{dr}$. Из (5) ясно, что для ограниченного осциллятора φ функции q_j^{φ} также ограничены, т. е. существуют конечные пределы

$$\Delta_j\varphi=\varliminf_{\rho\to 0}q_j^{\varphi}(\rho),\quad \overline{\Delta}_j\varphi=\varlimsup_{\rho\to 0}q_j^{\varphi}(\rho) \tag{6}$$

Если существует предел $\lim\limits_{r\to 0}[\varphi_j^{-}(r)-\varphi_j^{+}(r)]$ (в частности, если φ имеет в точке t_j разрыв первого рода), то он совпадает с $\Delta_j\varphi$ и $\overline{\Delta}_j\varphi$, т. е. эти величины можно рассматривать как обобщения скачка функции в точке разрыва. Утверждение (б) леммы 2 означает, что $\Delta_j\tilde{\varphi}=\overline{\Delta}_j\tilde{\varphi}=0$, $j=1,\ldots,m$; при его доказательстве используется вытекающая из гладкости L формула $\lim\limits_{r\to 0}r\dfrac{d\theta_j^{\pm}}{dr}=0$. Можно привести пример контура, теряющего гладкость в точках t_j, для которого утверждение (б) неверно. Доказательство утверждения (в) основано на том, что для контура Ляпунова функции $d\theta_j^{\pm}/dr$ допускают оценку вида $|d\theta_j^{\pm}/dr|\leqslant Cr^{-\lambda}$, $0<\lambda<1$, т. е. абсолютно интегрируемы на отрезке $[0,r]$. Существуют гладкие контуры, для которых предложение (в) теряет справедливость.

Сейчас мы покажем, что часть утверждения (а) леммы 2 переносится на неограниченные осцилляторы.

Л е м м а 3. *Если $\varphi\in K_v(t_1,\ldots,t_m)$ и существуют такие постоянные $B_\varphi>0$, $\mu>0$, что при достаточно малом*

$|t-t_j|$ *имеет место оценка* $|\varphi(t)| \leqslant B_\varphi \ln^\mu |t-t_j|^{-1}$, *то при* $|z-t_j| \leqslant r_1 < r_0$ *разность* (3[1]) *ограничена.*

Доказательство. Проведем те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1. Интегралы I_3 и I_4 ограничены для любого, в том числе неограниченного осциллятора класса K_v, сохраняет справедливость и формула (2). Оценим действительную часть второго слагаемого в (2). Очевидно,

$$|\operatorname{Re}\varphi_j^+(\rho)\ln\frac{t_j^+(r_0)-z}{t_j^+(r_0)-t_j}\cdot\frac{t_j^+(\rho)-t_j}{t_j-z}| = |\varphi_j^+(\rho)\ln|\frac{t_j^+(r_0)-z}{t_j^+(r_0)-t_j}|\leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_j^+(\rho)|\ln[1+r_0^{-1}|z-t_j|] \leqslant r_0^{-1}|\varphi_j^+(\rho)||z-t_j| \leqslant$$

$$\leqslant r_0^{-1}B_\varphi\,\rho\ln^\mu\rho^{-1}.$$

Отсюда просто получается результат леммы.

Заметим, что пределы (6) (один или оба) могут оказаться конечными и в случае неограниченности осциллятора φ.

2°. Рассмотрим теперь следующую краевую задачу. Пусть L — гладкий замкнутый контур, разбивающий комплексную плоскость на области D^+ и D^-, $\{t_j\}_{j=1}^m$ — конечный набор точек L. Зададим на $L\setminus\{t_j\}_{j=1}^m$ функцию

$$G(t) = |G(t)|\exp 2\pi i\,\varphi(t),$$

удовлетворяющую двум условиям:

а) $\varphi(t)\in K_v(t_1,\dots,t_m)$, $|G(t)|\in K_v(t_1,\dots,t_m)$,

б) функции $\varphi(t)$, $|G(t)|$, $|G(t)|^{-1}$ ограничены,

и рассмотрим задачу о нахождении регулярных в областях D^+ и D^- ограниченных в $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$ и непрерывных в $\overline{D}^+\setminus\{t_j\}_1^m$, $\overline{D}^-\setminus\{t_j\}_1^m$ функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ соответственно по условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t),\quad t\in L\setminus\{t_j\}_{j=1}^m. \tag{7}$$

Введем функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln|G(t)|}{t-z}\,dt + \int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt.$$

Из условий, наложенных на $G(t)$, следует, что $\ln|G(t)|\in K_v(t_1,\dots,t_m)$. Поэтому из леммы 2 следует, что при достаточно малых $|z-t_j|$ ограничена разность

$$\operatorname{Re}\Gamma(z) - q_j^\gamma(|z-t_j|)\ln|z-t_j|,$$

где

$$\gamma_j^\pm(r) = \varphi_j^\pm(r) + \frac{r}{2\pi}\frac{d\theta_j^\pm}{dr}\ln|G[t_j^\pm(r)]|.$$

Следовательно, для функции $X_0(z) = \exp\Gamma(z)$ найдутся такие постоянные $C>0$, $c>0$, что при достаточно малом

$|z-t_j|$ имеет место оценка

$$c|z-t_j|^{q_j^\gamma(|z-t_j|)} \leqslant |X_0(z)| \leqslant C|z-t_j|^{q_j^\gamma(|z-t_j|)}. \qquad (8)$$

Очевидно, функция $X_0(z)$ удовлетворяет соотношению (7); поэтому если $\Phi(z)$ есть решение нашей задачи, то функция $\Phi(z)X_0^{-1}(z)$ регулярна во всей плоскости за исключением, возможно, точек $\{t_j\}_{j=1}^m$. Из предложения (б) леммы 2 следует, что $\Delta_j\gamma=\Delta_j\varphi$, $j=1,\dots,m$; предположим, что число $\Delta_j\varphi$ нецелое, обозначим $\varkappa_j=[\Delta_j\varphi]$ и докажем, что тогда особенность функции $\Phi(z)X_0^{-1}(z)(z-t_j)^{\varkappa_j}$ в точке t_j устранимая. Для этого фиксируем некоторое число ω так, чтоб $1>\omega>$ $>\Delta_j\varphi-\varkappa_j$.

Согласно (6) найдется такая сходящаяся к нулю последовательность $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, что величины $q_n=q_j^\gamma(\rho_n)$ сходятся к $\Delta_j\varphi$, причем $|q_n-\Delta_j\varphi|<\omega-(\Delta_j\varphi-\varkappa_j)$, $n=0,1,\dots$ Пусть функция Φ ограничена постоянной A_Φ; тогда, согласно (8),

$$|\Phi(z)X_0^{-1}(z)(z-t_j)^{\varkappa_j}| \leqslant A_\Phi c^{-1}|z-t_j|^{\varkappa_j-q_n} \leqslant A_\Phi c^{-1}|z-t_j|^{-\omega},$$
$$|z-t_j|=\rho_n.$$

Из этой оценки можно заключить (подобно тому, как это делается в [2], с. 76), что изолированная особая точка t_j не является ни существенно особой для функции $\Phi(z)X_0^{-1}(z)(z-t_j)^{\varkappa_j}$, ни полюсом, т. е. она устранима. Можно сделать и обратное заключение, что если $F(z)$ — любая регулярная в точке t_j функция, то функция $\Phi(z)=F(z)X_0(z)(z-t_j)^{-\varkappa_j}$ ограничена в окрестности точки t_j; это просто следует из формулы (8). Пусть теперь число $\Delta_j\varphi$ целое. Так же, как это сделано выше, можно доказать, что функция $F(z)=\Phi(z)X_0^{-1}(z)(z-t_j)^{\Delta_j\varphi}$ регулярна в точке t_j, но обратное заключение, вообще говоря, перестает быть верным. Действительно, если функция $F(z)$ регулярна в точке t_j и $F(t_j)=a\neq 0$, а функция $\Phi(z)=$ $=F(z)X_0(z)(z-t_j)^{-\Delta_j\varphi}$ ограничена константой A_Φ, то при достаточно малом $|z-t_j|$

$$|X_0(z)(z-t_j)^{-\Delta_j\varphi}| \leqslant 2A_\Phi|a|^{-1}.$$

Согласно (8) отсюда следует

$$[q_j^\gamma(\rho)-\Delta_j\varphi]\ln\rho^{-1} \geqslant \ln(|a|/2A);$$

ясно, что не для всякого осциллятора ψ величина $[q_j^\psi(\rho)-$ $-\Delta_j\psi]\ln\rho^{-1}$ ограничена снизу. В связи с этим выделим один подкласс осцилляторов. Именно, будем называть осциллятор ψ особым в точке t_j, если величина $[q_j^\psi(\rho)-\Delta_j\psi]\ln\rho^{-1}$ неограничена снизу при малых ρ, и неособым в противном случае.

Используя приведенные выше рассуждения, можно показать, что если число $\Delta_j \varphi$ целое и осциллятор γ неособый в точке t_j, то из регулярности $F(z)$ в точке t_j следует ограниченность $\Phi(z) = F(z) X_0(z)(z-t_j)^{-\Delta_j \varphi}$. Если осциллятор γ особый в точке t_j, то функция $F(z) = \Phi(z) X_0^{-1}(z)(z-t_j)^{-1+\Delta_j \varphi}$ регулярна в точке t_j, и наоборот, из регулярности F следует ограниченность $\Phi(z) = F(z) X_0(z)(z-t_j)^{1-\Delta_j \varphi}$. Введем обозначение

$$\varkappa_j = \begin{cases} \Delta_j \varphi - 1, & \text{когда число } \Delta_j \varphi \text{ целое, и осциллятор} \\ & \gamma \text{ особый в точке } t_j; \\ [\Delta_j \varphi] & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Согласно предложению (в) леммы 2, если L — контур Ляпунова, то осцилляторы γ и φ являются особыми или неособыми в какой-либо точке одновременно. Поэтому в случае контура Ляпунова в первой строке формулы (9) γ можно заменить на φ, т. е. осцилляция $|G(t)|$ не влияет на величины $\varkappa_j$.

Из всего сказанного следует, что функция $P(z) = \Phi(z) X_0^{-1}(z)(z-t_1)^{\varkappa_1} \dots (z-t_m)^{\varkappa_m}$ регулярна в конечной части плоскости, а на бесконечности имеет порядок

$$\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m, \tag{10}$$

так что $P(z) = P_\varkappa(z)$ есть при $\varkappa \geqslant 0$ полином степени не выше $\varkappa$, а при $\varkappa < 0$ эта функция тождественно равна нулю. Обратно, всякая функция вида $\Phi(z) = X_0(z) P_\varkappa(z) \prod_{j=1}^{m} (z-t_j)^{-\varkappa_j}$ есть решение задачи (7). Итак, получен следующий результат.

Теорема 1. *Если индекс* $\varkappa$, *вычисленный по формулам* (9) и (10), *отрицателен, то задача* (7) *не имеет нетривиальных решений; если* $\varkappa \geqslant 0$, *то задача* (7) *имеет* $\varkappa + 1$ *линейно независимых решений, и общий вид ее решения есть*

$$\Phi(z) = P_\varkappa(z) X_0(z)(z-t_1)^{-\varkappa_1} \dots (z-t_m)^{-\varkappa_m},$$

где $P_\varkappa$ — *полином степени не выше* $\varkappa$.

Как уже отмечалось, величину $\Delta_j \varphi$ можно считать обобщением скачка функции в точке разрыва первого рода. Естественно сравнить теорему 1 с известными результатами [2] (с. 472) о задаче Римана с коэффициентом, допускающим разрывы первого рода.

Следствие 1. *Если в* (7) *заменить* $G(t)$ *на имеющий в точках* $\{t_j\}_{j=1}^m$ *разрывы первого рода коэффициент* $\hat{G}(t) = |\hat{G}(t)| \exp 2\pi i \hat{\varphi}(t)$ со свойством $\hat{\varphi}(t_j - 0) - \hat{\varphi}(t_j + 0) = \Delta_j \varphi$

и обозначить индекс полученной задачи в классе ограниченных функций через $\hat{\varkappa}$, *то* $\hat{\varkappa} - \varkappa$ *есть число тех точек из набора* $\{t_j\}_{j=1}^m$, *в которых числа* $\Delta_j \varphi$ *являются целыми, а осциллятор* γ — *особым.*

Доказательство получается непосредственно из формулы (9). Отметим, что если число $\Delta_j \varphi$ целое и осциллятор γ в точке t_j является особым, то функция $X_0(z)$ $(z - t_j)^{-\Delta_j \varphi}$ хотя и не ограничена в окрестности точки t_j, но интегрируема там в любой степени.

Коэффициент $G(t)$ в задаче (7) является интегрируемым; задача Римана с интегрируемым коэффициентом рассматривалась в ряде работ (см., например, [3, 4, 5]); в этих работах неизвестные функции отыскивались в классах В. И. Смирнова или в других сходных классах. Как мы видели, замена этих классов на класс ограниченных функций приводит к существенным изменениям картины разрешимости.

3°. Рассмотрим теперь ту же краевую задачу, когда аргумент коэффициента является неограниченным осциллятором. Пусть в соотношении (7) $|G(t)| \in H(L)$ и $|G(t)| \neq 0$, $\varphi \in K_v(t_1, \dots, t_m)$ и

$$|\varphi(t)| \leqslant B_\varphi \ln^\mu |t - t_j|^{-1}, \quad \mu > 0,$$

при малых $|t - t_j|$. Задачу об отыскании ограниченной функции Φ по соотношению (7) с таким коэффициентом будем называть задачей (7А). Согласно лемме 3 для канонической функции $X_0(z)$ этой задачи при малых значениях $|z - t_j|$ справедлива оценка

$$c|z - t_j|^{q_j^\varphi(|z-t_j|)} \leqslant |X_0(z)| \leqslant C|z - t_j|^{q_j^\varphi(|z-t_j|)}. \qquad (11)$$

Рассмотрим сначала случай, когда среди чисел $\Delta_1 \varphi, \dots, \Delta_m \varphi$ есть равные $-\infty$; пусть, например, $\Delta_j \varphi = -\infty$. Тогда существует такая последовательность $\rho_n \to 0$, что $q_j^\varphi(\rho_n) = -n$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ Пусть $\Phi(z)$ — ограниченное решение задачи (7А). Тогда функция $F(z) = \Phi(z) X_0^{-1}(z)$ имеет в точке t_j изолированную особенность и

$$|F(z)| \leqslant A_\Phi c^{-1} |z - t_j|^n, \quad |z - t_j| = \rho_n.$$

Применяя к функции $F(z)(z - t_j)^{-m}$ принцип максимума в кольцах $\rho_{n+1} \leqslant |z - t_j| \leqslant \rho_n$ при $n \geqslant m$, получаем

$$|F(z)| \leqslant A_\Phi c^{-1} |z - t_j|^m, \quad |z - t_j| \leqslant \rho_m, \quad m = n_0, n_0 + 1, \dots$$

Отсюда следует $F(z) \equiv 0$, т. е. задача (7А) в этом случае не имеет решений.

Пусть теперь среди чисел $\{\Delta_j \varphi\}_1^m$ есть только конечные величины и $+\infty$. Положим для конкретности, что конечны числа $\Delta_1 \varphi, \dots, \Delta_{m'} \varphi$, а $\Delta_{m'+1} \varphi = \dots = \Delta_m \varphi = +\infty$. Определим числа

$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{m'}$ по формулам (9), $\varkappa' = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{m'}$, и рассмотрим функцию

$$F(z) = \Phi(z) X_0^{-1}(z)(z - t_1)^{\varkappa_1} \ldots (z - t_{m'})^{\varkappa_{m'}}.$$

В рассуждениях, приведших к теореме 1, у осциллятора $\gamma(t)$ использовалось лишь свойство конечности чисел $\Delta_j\gamma = \Delta_j\varphi$, поэтому эти рассуждения применимы и здесь. С их помощью показывается, что функция F регулярна в точках $t_1, \ldots$ $\ldots, t_{m'}$. Таким образом, эта функция имеет порядок $\varkappa'$ на бесконечности и изолированные особенности в точках $t_{m'+1}, \ldots$ $\ldots, t_m$, поэтому она должна быть представима в виде

$$F(z) = P_{\varkappa'}(z) + \sum_{j=m'+1}^{m} F_j\left(\frac{1}{z - t_j}\right), \tag{12}$$

где $P_{\varkappa'}$ при $\varkappa' \geqslant 0$ есть полином степени не выше $\varkappa'$, при $\varkappa' < 0$ $P_{\varkappa'} \equiv 0$; F_j есть некоторые целые функции, удовлетворяющие при $\varkappa' < 0$ дополнительным условиям

$$\int\limits_{|\tau|=R} \left[\sum_{j=m'+1}^{m} F_j\left(\frac{1}{\tau - t_j}\right)\right] \tau^{k-1}\, d\tau = 0,\ k = 0, \ldots, |\varkappa'| - 1; \tag{13}$$

радиус R в (13) выбирается таким образом, чтоб $L \subset \{z : |z| < R\}$. Исследуем теперь целые функции F_j. Если $M_j(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |F_j(z)|$, то, очевидно,

$$\ln M_j(\rho) \leqslant c_j + q_j^{\varphi}(\rho^{-1}) \ln \rho,\ c_j = \text{const}.$$

Из (5) следует, что при наших ограничениях на φ $q_j^{\varphi}(\rho^{-1}) \leqslant B'_{\varphi} \ln^{\mu} \rho$. Поэтому все функции F_j должны иметь порядки, равные нулю. Далее, следуя схеме рассуждений работы [6], нетрудно показать, что для того чтобы произведение $X_0(z) F_j\left(\frac{1}{z - t_j}\right)$, где F_j — целая функция, было ограничено в окрестности точки t_j, необходимо и достаточно, чтоб порядок F_j был равен 0 и чтобы

$$\ln\left|F\left(\frac{1}{t - t_j}\right)\right| + q_j^{\varphi}(|t - t_j|) \ln|t - t_j| \leqslant \text{const},\ t \in l_j \setminus \{t_j\} \tag{14}$$

Итак, получен следующий результат.

Теорема 2. *Имеют место следующие предложения:* а) *если* $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Delta_j \varphi = -\infty$ *или если* $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Delta_j \varphi < +\infty$ *и* $\varkappa' < 0$, *то задача* (7А) *не имеет нетривиальных решений;* б) *если* $|\Delta_j \varphi| < +\infty$ *при* $j = 1, \ldots, m$ *и* $\varkappa' \geqslant 0$, *то задача* (7А) *имеет* $\varkappa' + 1$ *линейно независимых решений, и общий вид ее решения есть*

$$\Phi(z) = P_{\varkappa'}(z) X_0(z)(z - t_1)^{-\varkappa_1} \ldots (z - t_m)^{-\varkappa_m};$$

в) *если* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \Delta_j \varphi = +\infty$, $\Delta_j \varphi > -\infty$, $j=1, \ldots, m$ *и* $\varkappa' \geqslant 0$, *то задача* (7А) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений, и общий вид ее решения есть*

$$\Phi(z) = X_0(z)\left[P_{\varkappa'}(z) + \sum_{j=m'+1}^{m} F_j\left(\frac{1}{z-t_j}\right) \right] \prod_{j=1}^{m'} (z-t_j)^{-\varkappa_j}, \tag{15}$$

где $P_{\varkappa'}$ — *любой полином степени не выше* $\varkappa'$, *а* F_j — *любые целые функции нулевого порядка, удовлетворяющие (14);*
г) *если* $\max \Delta_j \varphi = +\infty$, $\Delta_j \varphi > -\infty$, $j=1, \ldots, m$ *и* $\varkappa' < 0$, *то задача* (7А) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений, и общий вид ее решения* (15), *где* $P_{\varkappa'} \equiv 0$, *а* F_j — *любые функции нулевого порядка, удовлетворяющие условиям* (13) *и* (14).

Классы $K_\lambda(t_1, \ldots, t_m)$, введенные в начале работы как пример классов K_v, при $0 < \lambda < 1$ являются инвариантными относительно гельдеровых диффеоморфизмов контуров. Это значит, что если $\tau = f(t)$ есть диффеоморфизм контура L на контур Λ, $f'(t) \in H(L)$ и $f'(t) \neq 0$, а $\varphi \in K_\lambda(t_1, \ldots, t_m)$, $0 < \lambda < 1$, есть заданный на L осциллятор, то $\varphi[f^{-1}(\tau)] \in K_\lambda(f(t_1), \ldots \ldots, f(t_m))$, обобщенные скачки φ и $\psi = \varphi[f^{-1}]$ в соответствующих точках совпадают, и осциллятор ψ является особым в точке $\tau_j = f(t_j)$ тогда и только тогда, когда осциллятор φ особый в точке t_j. Этот факт позволяет перенести основные результаты теорем 1, 2 на однородную задачу Газемана на контуре Ляпунова, модуль и аргумент коэффициента которой есть осцилляторы классов K_λ, $0 < \lambda < 1$. Перенесение осуществляется непосредственным применением метода конформного склеивания; склеивающая функция (см., например, § 17 [2]) играет здесь роль диффеоморфизма f. Методом, сходным с примененным в работе [7], можно рассмотреть и задачу с невзаимнооднозначными сдвигами с коэффициентом, модуль и аргумент которого осциллируют.

В заключение автор выражает признательность профессору Л. А. Аксентьеву за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения М., „Наука", 1968.

2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

3. Симоненко И. Б. Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах с весами. — „Изв. АН. Математика", 1964, т. 28, №. 2.

4. Хайкин М. И. Исключительный случай однородной задачи Римана с конечным индексом коэффициента. — „Изв. вузов. Математика", 1972, № 5, с. 92—103.

5. Кокилашвили В. М., Пааташвили В. А. О краевой задаче линейного сопряжения с измеримыми коэффициентами. — „ДАН СССР“, 1975, т. 234, № 5, с. 1008 — 1011.

6. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше 1/2. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 6. Харьков, 1968, с. 151 — 176.

7. Кац Б. А. Краевая задача с негомеоморфным сдвигом. — „ДАН СССР“, 1974, т. 219, № 4, с. 781 — 784.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 года.