Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 4, с. 40–53

УДК 517.9+512.5

Йордановы алгебры и интегрируемые системы

© 1993. С. И. Свинолупов

Введение

Классическими примерами скалярных нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния, являются уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$w_t = w_{xxx} - 6ww_x\,, \tag{0.1}$$

модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (МКдФ)

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x \tag{0.2}$$

и уравнение sine-Gordon (sG)

$$w_{xy} = \exp(2w) + \exp(-2w)\,. \tag{0.3}$$

Связь между этими уравнениями прослеживается не только на языке соответствующих спектральных задач, но и в терминах самих уравнений. Уравнение КдФ связано с уравнением МКдФ преобразованием Миуры

$$w = u_x + u^2. \tag{0.4}$$

Связь МКдФ с уравнением sG заключается в следующем. После введения потенциала $u = w_x$ из уравнения МКдФ получается уравнение ПМКдФ

$$w_t = w_{xxx} - 2w_x^3, \tag{0.5}$$

которое является симметрией уравнения (0.3).

Известны различные обобщения скалярного уравнения КдФ на многополевой случай [1–5]. В частности, в работе [5] указан класс йордановых систем КдФ, т.е. систем вида

$$w_t^i = w_{xxx}^i - 6a_{jk}^i w^j w_x^k, \qquad i = 1, \dots, N \tag{0.6}$$

(здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам), где a_{jk}^i — структурные константы произвольной йордановой алгебры (см. [6, 7]). Йордановы системы КдФ обладают полным набором алгебраических свойств, характеризующих их интегрируемость методом обратной задачи теории рассеяния. Они имеют бесконечную алгебру высших симметрий, бесконечную серию локальных законов сохранения, оператор рекурсии [5]. В [4] рассматривались системы вида (0.6), обладающие L-A-парами в неприводимых эрмитовых симметрических пространствах. Эти системы являются йордановыми системами КдФ, соответствующими простым йордановым алгебрам.

Настоящая работа посвящена построению йордановых аналогов скалярных уравнений МКдФ и sG. Показано, что всякая система (0.6) допускает дифференциальную подстановку

$$w^i = u^i_x + a^i_{jk} u^j u^k, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{0.7}$$

которая является естественным обобщением преобразования Миуры (0.4). В результате дифференциальной подстановки (0.7) из (0.6) получается йорданова система МКдФ

$$u^i_t = u^i_{xxx} - 6 a^i_{nm} a^n_{jk} u^j u^k u^m_x, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{0.8}$$

Показано, что системы (0.8) содержатся в более широком классе многополевых аналогов уравнения (0.2), который соответствует йордановым тройным системам (см. [7, 8]).

Построены йордановы аналоги скалярного уравнения ПМКдФ (0.4) — системы вида

$$\begin{aligned} w^i_t = w^i_{xxx} &- 3 a^i_{jr} P^r_m w^j_x w^m_{xx} + 3 a^i_{jr} P^r_n a^n_{ks} P^s_m w^j_x w^k_x w^m_x \\ &- \tfrac{3}{2} a^i_{jn} a^n_{rs} P^r_k P^s_m w^j_x w^k_x w^m_x, \qquad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{0.9}$$

где $P(w) = Q^{-1}$, Q — матрица размера $N \times N$, компоненты которой определяются формулой

$$(Q)^i_j = a^i_{jk} w^k.$$

В отличие от скалярного уравнения (0.2) система (0.8) в случае общего положения не допускает введения потенциала $u^i = w^i_x$. Системы (0.9) связаны с (0.8) нетривиальным обобщением введения потенциала — подстановкой

$$u^i = P^i_k w^k_x. \tag{0.10}$$

Дифференциальная подстановка (0.10) разлагается в суперпозицию введения потенциала и обратимого преобразования лишь тогда, когда соответствующая йорданова алгебра является ассоциативной.

Всякая система (0.9) является симметрией гиперболической системы

$$w^i_{xy} = a^i_{jr} P^r_m w^j_y w^m_x + c_1 a^i_{jk} w^j w^k + c_2 b^i, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{0.11}$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные константы, а константы b^i определяются из линейной системы

$$a^i_{jr} b^r = \delta^i_j, \qquad i, j = 1, \dots, N, \tag{0.12}$$

где δ^i_j — символы Кронекера (если a^i_{jr} — структурные константы йордановой алгебры с единицей, то система (0.12) имеет решение). Системы (0.11) являются йордановыми аналогами уравнения sine-Gordon. При $N = 1$ (0.11) представляет собой рациональную запись уравнения (0.3). Отметим, что в отличие от хорошо известных обобщений уравнения sine-Gordon (двумеризованные цепочки Тоды) йордановы системы sG (0.11), вообще говоря, нельзя записать в таком виде, чтобы их правая часть не зависела от производных w^i.

Все построенные в работе многополевые интегрируемые системы интерпретируются как уравнения в йордановых алгебрах, что позволяет записывать их в компактном и инвариантном относительно линейных преобразований виде. Координатная запись используется лишь во введении и примерах интегрируемых систем малой размерности.

Автор благодарит В. В. Соколова за интерес к работе, обсуждение результатов и ряд полезных замечаний относительно изложения материала, а также Р. И. Ямилова за полезные обсуждения, стимулировавшие рассмотрение дифференциальных подстановок типа (0.10).

§1. Йордановы аналоги уравнений КдФ и МКдФ. Преобразование Миуры

В [5, 9] был предложен способ построения многополевых аналогов интегрируемых[1] скалярных уравнений в частных производных, который применим для любых скалярных уравнений с полиномиальной правой частью. Кратко напомним, в чем он заключается, на примере скалярного уравнения КдФ (0.1). Рассмотрим многополевую систему

$$w^i_t = w^i_{xxx} - 6a^i_{jk}w^j w^k_x, \quad a^i_{jk} = a^i_{kj}, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.1}$$

Будем называть (1.1) обобщением скалярного уравнения КдФ, если она обладает высшими симметриями и локальными законами сохранения. Рассмотрим N-мерную коммутативную алгебру J (умножение в J будем обозначать $(\ \circ\ )$), структурные константы которой совпадают с константами a^i_{jk} системы (1.1). Более точно, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в J, то умножение в J определено формулой

$$(e_j \circ e_k) = a^i_{jk}e_i. \tag{1.2}$$

Переход к новому базису в алгебре J соответствует линейным преобразованиям

$$w^i = M^i_k\widetilde{w}^k, \qquad i = 1, \dots, N, \ \det M \neq 0,$$

системы (1.1). Поэтому корректно установлено взаимно однозначное соответствие между N-мерными алгебрами и системами вида (1.1). Системы, которые соответствуют одной и той же алгебре J при различных выборах базиса, будем называть *эквивалентными.* Полагая $W = w^i e_i$, систему (1.1) мы можем записать в инвариантном относительно выбора базиса виде

$$W_t = W_{xxx} - 6(W \circ W_x). \tag{1.3}$$

[1]Интегрируемость понимается в рамках симметрийного подхода, см. [10].

Таким образом, систему (1.1) можно интерпретировать как уравнение (1.3) на алгебре J. Все вычисления и рассуждения, которые приходится проделывать при исследовании интегрируемости уравнений (1.3), фактически повторяют аналогичные вычисления и рассуждения в скалярном случае. Единственное, но существенное отличие заключается в том, что умножение ($\circ$), вообще говоря, не является ассоциативным.

Требование наличия у системы (1.3) высших симметрий или локальных законов сохранения накладывает жесткие условия на константы a^i_{jk}. Для того чтобы сформулировать эти условия в инвариантных алгебраических терминах, напомним определение йордановой алгебры. Заранее условимся, что все определяемые алгебраические структуры предполагаются конечномерными и рассматриваются над полем $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Коммутативная алгебра J называется *йордановой*, если умножение в ней удовлетворяет тождеству

$$(x\circ((x\circ x)\circ z)) = ((x\circ x)\circ(x\circ z)). \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 (см. [5]). *Для того чтобы система* (1.3) *имела невырожденные высшие симметрии или законы сохранения, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей коммутативная алгебра J была йордановой.*

Системы (1.3), где ($\circ$) — умножение в йордановой алгебре, будем называть для краткости *йордановыми системами КдФ*.

Йордановы алгебры не являются столь экзотическим объектом, как это может показаться на первый взгляд. Тождество (1.4) является ослабленным тождеством ассоциативности. Большой набор примеров (не исчерпывающий, однако, всех йордановых алгебр) можно построить, исходя из ассоциативных алгебр. Пусть A — ассоциативная алгебра с умножением $*$. Определив на ней новое умножение

$$(x\circ y) = \tfrac{1}{2}(x*y+y*x), \tag{1.5}$$

получаем йорданову алгебру $A^{(+)}$.

Пример 1.1. Пусть A — ассоциативная алгебра матриц размера $N\times N$. Тогда система (1.3), соответствующая йордановой алгебре $A^{(+)}$, представляет собой хорошо известное матричное уравнение КдФ

$$W_t = W_{xxx} - 3WW_x - 3W_xW, \tag{1.6}$$

где W — матрица размера $N\times N$ с компонентами $w_{ij}(t,x)$.

Йордановы алгебры малой размерности нетрудно классифицировать, исходя непосредственно из определения. Ниже мы приводим полный, с точностью до преобразований базиса, список двумерных йордановых алгебр и соответствующих им йордановых КдФ.

Пример 1.2. Двумерные йордановы алгебры исчерпываются списком, состоящим из следующих пяти алгебр, заданных таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{array}{llll}
J_2(1): & (e_1 \circ e_1) = e_1, & (e_1 \circ e_2) = \frac{1}{2} e_2, & (e_2 \circ e_2) = 0; \\
J_2(2): & (e_1 \circ e_1) = e_1, & (e_1 \circ e_2) = e_2, & (e_2 \circ e_2) = 0; \\
J_2(3): & (e_1 \circ e_1) = e_2, & (e_1 \circ e_2) = 0, & (e_2 \circ e_2) = 0; \\
J_2(4): & (e_1 \circ e_1) = e_1, & (e_1 \circ e_2) = 0, & (e_2 \circ e_2) = e_2; \\
J_2(5): & (e_1 \circ e_1) = e_1, & (e_1 \circ e_2) = 0, & (e_2 \circ e_2) = 0.
\end{array}
\tag{1.7}
$$

Алгебры $J_2(4)$ и $J_2(5)$ являются прямой суммой своих идеалов. Соответствующие им системы состоят в случае алгебры $J_2(4)$ из двух независимых скалярных уравнений КдФ, а в случае алгебры $J_2(5)$ — из скалярного уравнения КдФ и линейного уравнения. Алгебрам $J_2(1)$, $J_2(2)$ и $J_2(3)$ соответствуют системы

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad v_t = v_{xxx} - 3uv_x - 3vu_x, \tag{1.8}$$

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad v_t = v_{xxx} - 6uv_x - 6vu_x, \tag{1.9}$$

$$u_t = u_{xxx}, \quad v_t = v_{xxx} - 6uu_x. \tag{1.10}$$

Замечание 1.1. Термин «йорданова система КдФ» применительно к (1.10) не совсем удачен, так как из вида этой системы никакой связи со скалярным КдФ углядеть нельзя. Более того, такой связи и быть не может, так как дифференциальной подстановкой

$$u = \tilde{u}_x, \quad v = \tilde{v}_x + \tilde{u}^2 \tag{1.11}$$

система (1.10) сводится к системе двух независимых линейных уравнений $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx}$, $\tilde{v}_t = \tilde{v}_{xxx}$. Поэтому правильнее было бы называть йордановыми системами КдФ лишь те системы (1.3), из которых при какой-либо редукции можно получить скалярное уравнение КдФ. Но, надеясь, что данное замечание позволит избежать недоразумений, мы будем продолжать называть йордановыми системами КдФ все системы (1.3), порожденные йордановыми алгебрами.

Легко видеть, что все системы из примера 1.2 содержат независимые скалярные уравнения. Для (1.8) и (1.9) таковым является скалярное уравнений КдФ, для (1.10) — линейное уравнение. Этот факт объясняется тем, что во всех трех случаях соответствующие йордановы алгебры имеют идеал $\{e_2\}$. Будем называть *приводимой* систему $\mathfrak{U}$ вида (1.3), если она имеет подсистему $\mathfrak{U}_0$ такого же вида, но меньшей размерности. Визуально убедиться в наличии такой подсистемы $\mathfrak{U}_0$ не всегда так просто, как в рассмотренных примерах. Нетрудно проверить, что система $\mathfrak{U}$ приводима тогда и только тогда, когда соответствующая алгебра J имеет идеал J_0. При этом автономная подсистема $\mathfrak{U}_0$ соответствует факторалгебре J/J_0. Простым алгебрам J соответствуют неприводимые системы.

Вопрос о конструктивном построении всех неприводимых йордановых систем КдФ полностью решен, так как известна классификация простых йордановых алгебр (см. [11, 6]). Имеется четыре бесконечные серии простых йордановых алгебр и одна исключительная простая йорданова алгебра.

Пример 1.3. Пусть V — векторное пространство, $\dim V = N$, и $\langle\ ,\ \rangle$ — обычное скалярное произведение на V. Зададим умножение

$$(x \circ y) = \langle a, x\rangle y + \langle a, y\rangle x - \langle x, y\rangle a\,. \tag{1.12}$$

Нетрудно проверить, что векторное пространство V с таким умножением является йордановой алгеброй. При $\langle a, a\rangle \neq 0$, $N > 2$ эта алгебра простая. Серию построенных простых йордановых алгебр будем обозначать D_N. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_N$ — базис в V. Если $\langle a, a\rangle \neq 0$, то ортогональными преобразованиями можно добиться, чтобы $a = e_1$. Тогда умножение (1.12) задается таблицей

$$\begin{gathered}(e_1 \circ e_i) = e_i, \quad (e_i \circ e_i) = -e_1, \qquad i = 1, \dots, N,\\ (e_i \circ e_j) = 0, \qquad i \neq j,\ i \neq 1,\ j \neq 1\,.\end{gathered} \tag{1.13}$$

При $N = 3$, $a = (1, 0, 0)^t$ йорданова система КдФ, соответствующая алгебре с умножением (1.13), имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} - 3\,(u^2 - v^2 - w^2)_x\,,\\ v_t &= v_{xxx} - 6\,(uv)_x\,,\\ w_t &= w_{xxx} - 6\,(uw)_x\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Отметим, что системой (1.14) исчерпываются все неприводимые йордановы системы КдФ размерности $N = 3$.

Скалярное уравнение КдФ (0.1) связано со скалярным уравнением МКдФ (0.2) дифференциальной подстановкой Миуры (0.4). Известно (см., например, [4]), что матричное уравнение КдФ (1.6) связано дифференциально подстановкой

$$W = U_x + U^2 \tag{1.15}$$

с матричным уравнением МКдФ

$$U_t = U_{xxx} - 3U^2 U_x - 3U_x U^2. \tag{1.16}$$

Как будет показано ниже, дифференциальную подстановку, обобщающую подстановку Миуры (0.4), допускает любая йорданова система (1.3). Более того, оказывается, что наличие такой дифференциальной подстановки выделяет среди систем вида (1.3) йордановы системы КдФ.

Теорема 1.2. *Пусть* α *и* J *— коммутативные алгебры, умножение в которых обозначается соответственно* $\alpha(\ \circ\ )$, $(\ \circ\ )$, *причем* $\dim\alpha = \dim J = N$ *и алгебра* J *имеет единицу* e. *Система*

$$W_t = W_{xxx} + \alpha(W \circ W_x) \tag{1.17}$$

допускает дифференциальную подстановку

$$W = U_x + (U \circ U) \tag{1.18}$$

тогда и только тогда, когда J *— йорданова алгебра, а умножение в алгебре* α *определено формулой*

$$\alpha(x \circ y) = -6\,(x \circ y)\,. \tag{1.19}$$

Модифицированная система, связанная с (1.17) *дифференциальной подстановкой* (1.18), *имеет вид*

$$U_t = U_{xxx} - 6\left((U \circ U) \circ U_x\right). \tag{1.20}$$

Доказательство. Пусть система (1.17) допускает дифференциальную подстановку (1.18), в результате которой получается некоторая система $U_t = H(U, U_x, U_{xx}, U_{xxx})$. Существование такой дифференциальной подстановки эквивалентно тому, что вектор-функция H является решением системы дифференциальных уравнений

$$D_x(H) + 2(U \circ H) - F = 0, \tag{1.21}$$

где $D_x = d/dx$ — оператор взятия полной производной по переменной x, а F — правая часть системы (1.17), в которой $W, W_x, \ldots$ выражены через $U, U_x, \ldots$ с помощью соотношения (1.18). Таким образом, мы должны получить условия разрешимости системы дифференциальных уравнений (1.21) и указать решение H. Удобно выбрать нестандартный набор динамических переменных (см., например, [10]) $U, W, W_x, W_{xx}, \ldots$, полагая, что производные U по x выражаются через эти динамические переменные с помощью (1.18) ($U_x = W - (U \circ U)$, $U_{xx} = W_x - 2(W \circ U) + 2((U \circ U) \circ U)$ и так далее). Алгоритм решения систем вида (1.21) указан в [12]. Следуя этому алгоритму, мы получаем, что для разрешимости системы (1.21) необходимо и достаточно, чтобы умножения в алгебрах J и α удовлетворяли тождествам

$$(x \circ \alpha(y \circ y)) + 6(x \circ (y \circ y)) = 0, \tag{1.22}$$

$$(y \circ (x \circ (x \circ x))) + 2(x \circ (x \circ (x \circ y))) - 3(x \circ (y \circ (x \circ x))) = 0, \tag{1.23}$$

$$((x \circ (x \circ x)) \circ (x \circ x)) - (x \circ ((x \circ x) \circ (x \circ x))) = 0. \tag{1.24}$$

Полагая в (1.22) $x = e$, получаем, что это тождество эквивалентно тому, что умножение в алгебре α должно быть определено формулой (1.19). При выполнении тождеств (1.23) и (1.24) правая часть модифицированной системы записывается в виде

$$\begin{aligned} H = W_{xx} &- 2(U \circ W_x) - 2(W \circ W) - 2(W \circ (U \circ U)) + 4(U \circ (U \circ W)) \\ &+ ((U \circ U) \circ (U \circ U)) - (U \circ (U \circ (U \circ U))) + c, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где c — такой элемент алгебры J, что $(c \circ x) = 0$ для любого $x \in J$. Полагая $x = e$, получаем, что $c = 0$.

Покажем, что если J — йорданова алгебра, то тождества (1.23) и (1.24) выполнены. Положив $z = (x \circ x)$ в (1.4), получаем (1.24). Произведя линеаризацию тождества (1.4), получаем тождество

$$(y \circ (z \circ (x \circ x))) + 2(x \circ (z \circ (x \circ y))) - 2((x \circ y) \circ (x \circ z)) - ((x \circ y) \circ (x \circ z)) = 0. \tag{1.26}$$

Положив $z = x$ в (1.26), получаем

$$(y \circ (x \circ (x \circ x))) + 2(x \circ (x \circ (x \circ y))) - 3((x \circ y) \circ (x \circ x)) = 0.$$

В силу (1.4) последнее тождество можно переписать в виде (1.23).

Теперь покажем, что если алгебра J имеет единицу e и ее умножение удовлетворяет тождествам (1.23) и (1.24), то J — йорданова алгебра. Линеаризовав тождество (1.24), получаем

$$((y\circ(x\circ x))\circ(x\circ x))+2((x\circ(x\circ y))\circ(x\circ x))+2((x\circ(x\circ x))\circ(x\circ y)) \\ -(y\circ((x\circ x)\circ(x\circ x)))-4(x\circ((x\circ x)\circ(x\circ y)))=0. \quad (1.27)$$

Положив $y=e$ в (1.27), получаем, что

$$((x\circ x)\circ(x\circ x))-(x\circ(x\circ(x\circ x)))=0. \quad (1.28)$$

Линеаризация тождества (1.28) дает нам тождество

$$4((y\circ x)\circ(x\circ x))-(y\circ(x\circ(x\circ x)))-2(x\circ(x\circ(x\circ y)))-(x\circ(y\circ(x\circ x)))=0.$$

Сложив это тождество с (1.23), получаем (1.4), т.е. алгебра J йорданова.

Заменив W и ее производные по x в формуле (1.25) с помощью (1.18) и воспользовавшись тождеством (1.4), получаем, что модифицированная система имеет вид (1.20).

Следствие 1.1. *Всякая йорданова система КдФ* (1.3) *допускает дифференциальную подстановку Миуры* (1.18)*, в результате которой получается йорданова система МКдФ* (1.20)*.*

Пример 1.4. Системы (1.8) и (1.9) связаны дифференциальными подстановками Миуры вида (1.18) с системами МКдФ

$$u_t=u_{xxx}-6u^2u_x, \quad v_t=v_{xxx}-3u^2v_x-3vuu_x, \quad (1.29)$$

$$u_t=u_{xxx}-6u^2u_x, \quad v_t=v_{xxx}-6u^2v_x-12vuu_x. \quad (1.30)$$

Система МКдФ, связанная с (1.14), имеет вид

$$\begin{aligned} u_t&=u_{xxx}+6(u^3+uv^2+uw^2)_x-12u(u^2)_x,\\ v_t&=v_{xxx}+6(u^2+v^2+w^2)v_x-12u(uv)_x,\\ w_t&=w_{xxx}+6(u^2+v^2+w^2)w_x-12u(uw)_x. \end{aligned} \quad (1.31)$$

В отличие от скалярного случая обобщенное преобразование Миуры «обслуживает» и линеаризуемые системы. Это видно из примера, приведенного в замечании 1.1 (см. формулу (1.10)). На случай систем произвольной размерности пример обобщается следующим образом.

Предложение 1.1. *Пусть J — коммутативная нильпотентная алгебра, удовлетворяющая тождеству*

$$(x\circ(y\circ z))=0.$$

Тогда соответствующая ей система (1.3) *линеаризуется дифференциальной подстановкой* (1.18).

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что коммутативная алгебра, удовлетворяющая приведенному выше тождеству, является йордановой.

Системы МКдФ, которые получаются из йордановых систем МКдФ при помощи дифференциальных подстановок Миуры (1.18), не исчерпывают всех интегрируемых систем вида

$$u_t^i = u_{xxx}^i - 6b_{jkm}^i u^j u^k u_x^m, \qquad i = 1, \dots , N. \tag{1.32}$$

Пример 1.5. Неприводимая система

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} - 6(u^2 + v^2)u_x, \\ v_t &= v_{xxx} - 6(u^2 + v^2)v_x \end{aligned} \tag{1.33}$$

обладает бесконечной серией высших симметрий и локальных законов сохранения. Так как все МКдФ, которые получены из КдФ размерности $N = 2$, приводимы, то (1.33) преобразованием $u^i = M_k^i \tilde{u}^k$ не сводится ни к одной из этих систем.

Приведенный пример показывает, что, исходя непосредственно из йордановых алгебр, нельзя построить всех интегрируемых систем вида (1.32). Тем не менее условия интегрируемости этих систем формулируются в терминах йордановых структур, а именно, йордановых тройных систем [7, 8].

Определение 1.2. *Йордановой тройной системой* называется векторное пространство T, на котором определено тернарное умножение $T \times T \times T \to T$, $(x, y, z) \to \{x\, y\, z\}$, удовлетворяющее тождествам

$$\{x\, y\, z\} = \{z\, y\, x\}, \tag{1.34}$$

$$\{x\, y\, \{s\, v\, z\}\} - \{s\, v\, \{x\, y\, z\}\} = \{\{x\, y\, s\}\, v\, z\} - \{s\, \{y\, x\, v\}\, z\}. \tag{1.35}$$

Так же, как и в случае систем (1.1), будем считать, что константы b_{jkm}^i, определяющие правую часть системы (1.32), являются структурными константами некоторой тернарной алгебры T с умножением $\{\ ,\ ,\ \}$. Тем самым мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между системами (1.32) и N-мерными тернарными алгебрами. Пусть $e_1, e_2, \dots , e_N$ — базис в T. Полагая $U = u^i e_i$, систему (1.32) можно записать как уравнение на тернарной алгебре T

$$U_t = U_{xxx} - 6\{U\, U\, U_x\}. \tag{1.36}$$

Теорема 1.3. *Для того чтобы система* (1.36) *обладала бесконечной серией невырожденных высших симметрий или локальных законов сохранения, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей тернарная алгебра* T *была йордановой тройной системой.*

Мы не будем приводить доказательство теоремы 1.3, так как в идейном плане оно не имеет существенных отличий от доказательства теоремы 1.1. подробно изложенного в [5].

Йордановы тройные системы тесно связаны с йордановыми алгебрами. В частности, всякая йорданова алгебра J является йордановой тройной системой относительно тройного йорданова произведения

$$\{x\, y\, z\} = (x \circ (y \circ z)) + (z \circ (y \circ x)) - (y \circ (x \circ z)) \tag{1.37}$$

(см., например, [7]). Пусть система МКдФ получена из системы КдФ преобразованием Миуры (1.18); первой соответствует тройная йорданова система T, а второй — йорданова алгебра J. Тогда умножение в T определяется (см. (1.20)) через умножение в J при помощи формулы (1.37). Наличие интегрируемых систем (1.32), не связанных дифференциальной подстановкой (1.18) с системой КдФ, объясняется тем, что йордановы тройные системы не исчерпываются алгебрами с умножением (1.37).

§ 2. Йордановы аналоги уравнения sine-Gordon

Цель этого параграфа — построение йордановых многополевых аналогов уравнения sine-Gordon (sG). Для произвольной йордановой алгебры с единицей мы построим эволюционные системы, обобщающие скалярное уравнение ПМКдФ, а затем укажем гиперболические системы, для которых построенные многополевые ПМКдФ являются симметриями.

Симметрией скалярного уравнения sG является уравнение ПМКдФ (0.7). Его можно получить из скалярного уравнения МКдФ (0.3) при помощи дифференциальной подстановки введения потенциала

$$u = w_x \, . \tag{2.1}$$

Казалось бы, что многополевыми системами ПМКдФ нужно называть системы, которые получаются из (1.20) при помощи «векторного» обобщения

$$U = W_x \tag{2.2}$$

дифференциальной подстановки (2.1). Но нетрудно проверить, что система (1.20) в случае общего положения не допускает дифференциальной подстановки (2.2). Поэтому для построения йордановых систем ПМКдФ приходится воспользоваться менее тривиальным, чем (2.2), обобщением скалярного введения потенциала (2.1) — дифференциальной подстановкой, которую достаточно просто можно записать в терминах операторов умножения в йордановой алгебре.

Определение 2.1. *Оператором умножения на элемент z* в йордановой алгебре J называется линейный оператор

$$L(z)\colon J \to J, \qquad L(z)y = (z \circ y)\, .$$

Теорема 2.1. *Пусть J — йорданова алгебра с единицей. Соответствующая ей йорданова система МКдФ* (1.20) *допускает дифференциальную подстановку*

$$U = -\tfrac{1}{2} L(W)^{-1} W_x \, . \tag{2.3}$$

В результате этой дифференциальной подстановки получается йорданова система ПМКдФ

$$\begin{aligned} W_t = W_{xxx} - 3(W_x \circ L(W)^{-1} W_{xx}) + 3(W_x \circ L(W)^{-1}(W_x \circ L(W)^{-1} W_x)) \\ - \tfrac{3}{2}(W_x \circ (L(W)^{-1} W_x \circ L(W)^{-1} W_x))\, . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что так как алгебра J имеет единицу, то $\det L(W) \not\equiv 0$ и формула (2.3) имеет смысл. Пусть система (1.20) связана дифференциальной подстановкой (2.3) с некоторой системой $W_t = H(W, W_x, W_{xx}, W_{xxx})$. Тогда вектор-функция H удовлетворяет уравнению

$$D_x(H) + 2(U \circ H) + 2(W \circ F) = 0, \tag{2.5}$$

где $F = U_{xxx} - 6((U \circ U) \circ U_x)$ — правая часть МКдФ. Дифференциальную подстановку (2.3) удобно переписать в виде

$$W_x = -2(W \circ U). \tag{2.6}$$

В качестве независимого набора динамических переменных выберем W, U, $U_x, U_{xx}, \dots$, полагая, что производные W по x выражаются через эти динамические переменные с помощью (2.6) ($W_x = -2(W \circ U)$, $W_{xx} = -2(W \circ U_x) + 4((W \circ U) \circ U)$ и так далее). Существование рассматриваемой дифференциальной подстановки эквивалентно тому, что уравнение (2.5) имеет решение $H = H(W, U, U_x, U_{xx})$. Так же, как и при доказательстве теоремы 1.2, получаем, что для разрешимости уравнения (2.5) достаточно, чтобы умножение удовлетворяло некоторым тождествам, которые являются следствиями (1.4). Удовлетворяющая (2.5) вектор-функция H имеет вид[2]

$$\begin{aligned} H = {} & -2(W \circ U_{xx}) + 4(U \circ (W \circ U_x)) \\ & - 4(U_x \circ (W \circ U)) + 4(W \circ (U \circ (U \circ U))). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставив значения U и ее производных, вычисленных с помощью (2.3), в формулу (2.7), получаем правую часть уравнения (2.4).

Замечание 2.1. Требование теоремы 2.1, чтобы йорданова алгебра имела единицу, можно ослабить. Достаточно предполагать, что $\det L(U) \not\equiv 0$.

Замечание 2.2. Очевидно, скалярная дифференциальная подстановка вида (2.3) эквивалентна введению потенциала (2.1). Можно проверить, что в многополевом случае дифференциальная подстановка (2.3) эквивалентна введению потенциала (2.2) тогда и только тогда, когда соответствующая йорданова алгебра J ассоциативна. Сделав обратимое преобразование, системы (2.4), порожденные ассоциативными коммутативными алгебрами J, можно записать в более простом виде

$$W_t = W_{xxx} - 2(W_x \circ (W_x \circ W_x)). \tag{2.8}$$

Нетрудно проверить, что все системы МКдФ, порожденные коммутативными ассоциативными алгебрами J, приводимы. Поэтому приводимыми системами являются и все системы ПМКдФ вида (2.8).

Замечание 2.3. Можно показать, что простым йордановым алгебрам соответствуют неприводимые ПМКдФ (2.4).

Известно (см. [13]), что всякой скалярной дифференциальной подстановке первого порядка соответствует некоторое гиперболическое уравнение, симметриями которого являются эволюционные уравнения, допускающие эту дифференциальную подстановку. Обобщая это утверждение на многополевой случай,

[2] Вообще говоря, H определяется с точностью до прибавления вектор-функции $\varkappa(U)$, которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $(\partial\varkappa/\partial U)(z) = (L(U)^{-1}z \circ \varkappa)$. Но, в частности, можно считать, что $\varkappa = 0$.

построим гиперболическую систему, симметриями которой являются допускающие дифференциальную подстановку (2.3) эволюционные системы (2.4).

Теорема 2.2. *Система ПМКдФ* (2.4) *является симметрией гиперболической системы*

$$W_{xy} = (W_y \circ L(W)^{-1} W_x)\,. \tag{2.9}$$

Доказательство. Запишем систему (2.9) в виде двух систем

$$W_x = -2(W \circ U), \qquad U_y = 0\,. \tag{2.10}$$

В качестве набора независимых динамических переменных выберем вектор U со всеми его производными по переменной x и вектор W со всеми его производными по переменной y. Все остальные производные векторов U и W можно выразить с помощью системы (2.10). Система

$$\begin{aligned} W_t &= H(W, W_y, W_{yy}, \dots, U, U_x, U_{xx}, \dots), \\ U_t &= F(W, W_y, W_{yy}, \dots, U, U_x, U_{xx}, \dots) \end{aligned} \tag{2.11}$$

является симметрией для (2.10) тогда и только тогда, когда вектор-функции F, H удовлетворяют соотношениям

$$D_x(H) + 2(U \circ H) + 2(W \circ F) = 0, \quad D_y(F) = 0\,. \tag{2.12}$$

Первое из этих соотношений совпадает с (2.5). Поэтому, выбрав в качестве F правую часть йордановой системы МКдФ (1.20) и определив H формулой (2.7), мы получаем систему (2.11), которая является симметрией для (2.10). Тогда симметрией (2.9) является система $W_t = H$, где вектор U и его производные по x вычислены по (4.3).

В скалярном случае (2.9) представляет собой уравнение

$$w_{xy} = w^{-1} w_y w_x\,, \tag{2.13}$$

которое обратимым преобразованием

$$w = \exp(\widetilde{w}) \tag{2.14}$$

сводится к волновому уравнению $\widetilde{w}_{xy} = 0$. В случае систем (2.9) от квадратичных по производным слагаемым в правой части избавиться нельзя. Более того, простым йордановым алгебрам соответствуют неприводимые системы (2.9).

После обратимого преобразования (2.14) уравнение sine-Gordon

$$\widetilde{w}_{xy} = c_1 \exp(\widetilde{w}) + c_2 \exp(-\widetilde{w}),$$

записывается в рациональном виде

$$w_{xy} = w^{-1} w_y w_x + c_1 w^2 + c_2\,.$$

Такая запись позволяет угадать вид йордановых многополевых систем, обобщающих скалярное уравнение sine-Gordon.

Теорема 2.3. *Пусть J — йорданова алгебра с единицей e. Соответствующая ей гиперболическая система*

$$W_{xy} = (W_y \circ L(W)^{-1} W_x) + c_1 (W \circ W) + c_2 e \tag{2.15}$$

имеет симметрию (2.4).

Доказательство. В справедливости утверждения теоремы можно убедиться непосредственной проверкой. Все возникающие соотношения выполняются в силу йорданова тождества (1.10). Единственный нетривиальный момент заключается в использовании того, что операторы умножения $L(W)$ и $L(L(W)^{-1}e)$ коммутируют. Последнее следует из моноассоциативности йордановых алгебр.

Пример 2.1. В случае йордановой алгебры из примера 1.3, где $N = 3$, $a = (1, 0, 0)^t$, система (2.15) имеет вид

$$
\begin{aligned}
u_{xy} &= u^{-1}u_x u_y + c_1(u^2 - v^2 - w^2) + c_2 \\
&\quad + (u^2 + v^2 + w^2)^{-2}(uu_x + vv_x + ww_x)(uu_y + vv_y + ww_y), \\
v_{xy} &= u^{-1}v_x u_y + 2c_1 uv \\
&\quad + u^{-1}(u^2 + v^2 + w^2)^{-1}(uu_x + vv_x + ww_x)(uv_y - vu_y), \\
w_{xy} &= u^{-1}w_x u_y + 2c_1 uv \\
&\quad + u^{-1}(u^2 + v^2 + w^2)^{-1}(uu_x + vv_x + ww_x)(uw_y - wu_y),
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

где c_1, c_2 — произвольные константы.

В заключение работы отметим, что интегрируемые системы, связанные с йордановыми структурами, заведомо не исчерпываются рассмотренными в настоящей работе. В [9] было установлено взаимно однозначное соответствие между интегрируемыми системами, обобщающими нелинейное уравнение Шрёдингера (относительно таких систем см. также [14]), и йордановыми парами [15]. В [16] были построены системы дифференциально-разностных уравнений, связанные с йордановыми структурами. Есть основания предполагать, что для большинства скалярных уравнений, связанных дифференциальными подстановками с уравнением КдФ или нелинейным уравнением Шрёдингера, существуют йордановы аналоги.

Литература

1. *Calogero F., Degasperis A.* Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform // Nuovo Cimento B. – 1977. – V. 39. – P. 1–53.
2. *Dodd R. K., Fordy A. P.* On the integrability of a system of coupled KdV equations // Phys. Lett. A. – 1982. – V. 89, No. 4. – P. 168–170.
3. *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Современные проблемы математики. Том 24. – М.: ВИНИТИ, 1984. – С. 81–180.
4. *Athorn C., Fordy A. P.* Generalized KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces // J. Phys. A. – 1987. – V. 20. – P. 1377–1386.
5. *Свинолупов С. И.* Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега–де Фриза // ТМФ. – 1991. – Т. 87, №3. – С. 391–403.
6. *Jacobson N.* Structure and representation of Jordan algebras. – Providence, R. I., 1968.
7. *Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. П.* Общая алгебра. – М.: Наука. – 1990.
8. *Meyberg K.* Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren // Math. Z. – 1970. – B. 115, H. 1. – P. 58–78.

9. *Svinolupov S. I.* Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs // Comm. Math. Phys. – 1992. – V. 143. – P. 559–575.
10. *Mikhailov A. V., Shabat A. B., Sokolov V. V.* Symmetry approach to classification of integrable equations. — What is integrability. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
11. *Albert A.* A structure theory for Jordan algebras // Ann. of Math. – 1947. – V. 48. – P. 546–567.
12. *Svinolupov S. I.* On the analogues of the Burgers equation // Phys. Lett. A. – 1989. – V. 135, No. 1. – P. 32–36.
13. *Соколов В. В.* Псевдосимметрии и дифференциальные подстановки // Функц. анализ и его прилож. – 1988. – Т. 22, вып. 2. – С. 47–56.
14. *Fordy A. P., Kulish P.* Nonlinear Schrödinger equation and simple Lie algebras // Comm. Math. Phys. – 1983. – V. 89. – P. 427–443.
15. *Loos C.* Jordan pairs. – Lecture Notes in Math., Vol. 460. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1975,
16. *Svinolupov S. I., Yamilov R. I.* The multi-field Schrödinger lattices // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 160. – P. 548–552.

Институт математики
Уральского отделения РАН, г. Уфа

Поступило в редакцию
10 июля 1992 г.