



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Imshennik, Yu. I. Morozov, Структура ударной волны с учетом переноса импульса и энергии излучением,
Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., 1964, Volume 5, Issue 2, 8–21

<https://www.mathnet.ru/eng/pmtf8897>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

June 19, 2025, 21:34:08



СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА
ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В. С. Имшенник, Ю. И. Морозов

(Москва)

Существует широкий класс задач, где перенос излучения происходит в движущейся среде. Строгий учет влияния движения вещества на процессы переноса излучения дает релятивистски ковариантное уравнение переноса излучения, выведенное впервые Томасом [1] (см. также [2-4]). В наиболее общей постановке задача о переносе излучения в движущейся среде, в свою очередь оказывающего влияние на характер движения вещества, сводится к решению системы уравнений релятивистской радиационной гидродинамики совместно с упомянутым уравнением переноса излучения.

В данной работе будет решена одна из таких нелинейных задач — задача о структуре фронта ударной волны с излучением в случае сравнительно малых скоростей движения вещества, когда $\beta = v/c \ll 1$. При этом в релятивистском уравнении переноса излучения будут сохранены только члены $\sim \beta$, а система уравнений радиационной гидродинамики будет сформулирована в нерелятивистском виде. Следует сразу же отметить, что малые дополнительные члены в уравнении переноса $\sim \beta$ не являются, вообще говоря, малыми поправками в уравнениях радиационной гидродинамики. Например, в состояниях, близких к равновесным, они дают поток излучения, который сравнивается с потоком энергии вещества при тем более низких температурах, чем ниже плотность среды. Например, для нормальной плотности воздуха равновесные энергии излучения и вещества сравниваются при температуре около 3 млн. градусов. При этом $\beta_0 \approx 10^{-3}$.

Таким образом, нетривиальной областью применения рассматриваемой теории для случая $\beta \ll 1$ являются достаточно разреженные среды (если плотность газа ρ отлична от нормальной плотности воздуха ρ_0 , то β , соответствующее равенству энергий излучения и вещества, пропорциональна $\rho^{1/4}$).

Ниже будет показано, что учет членов $\sim \beta$ в уравнении переноса приводит к качественному изменению представлений о структуре фронта ударной волны. Рассмотрению структуры фронта с использованием обычного уравнения переноса излучения посвящены работы Зельдовича [5] и Райзера [6]. Некоторые качественные выводы о структуре фронта, не зависящие от вида уравнений переноса излучения, сформулированы в работе одного из авторов [7].

В постановке задачи, отчасти из-за математических сложностей, приходится вводить ряд упрощающих предположений. Перечислим их, имея в виду рассматриваемую задачу о плоской, стационарной, одномерной ударной волне.

1) Невозмущенная среда постоянной плотности ρ_0 имеет нулевую температуру, т. е. давление вещества перед ударной волной полагается пренебрежимо малым.

2) Коэффициент поглощения излучения одинаков для всех частот (серая материя), а рассеянием излучения пренебрегается вообще.

3) В качестве уравнений состояния вещества берутся только уравнения состояния идеального газа, но показатель адиабаты произволен в пределах $1 < \gamma < 2$, чтобы эффективно учитывать процесс ионизации вещества.

4) Угловое распределение интенсивности излучения усредняется путем обобщения известного метода Эддингтона. Параллельно рассмотрение повторяется с другой, более грубой угловой аппроксимацией — диффузионным приближением — для доказательства слабой чувствительности результатов к способу усреднения по углам.

§ 1. Постановка задачи. Полная система уравнений структуры фронта ударной волны состоит из уравнения состояния, уравнений радиационной гидродинамики и уравнения переноса излучения.

Будем использовать безразмерные величины

$$A = \frac{RT_1}{D^2}, \quad q = \frac{D}{c}, \quad \eta = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad r = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (1.1)$$

а также δ_1 и t из (А.14) (см. приложение А). Уравнение состояния идеального газа запишется в виде

$$p = 2At / \eta \quad (1.2)$$

Здесь T_1 — температура газа на бесконечности ($\tau = -\infty$) за ударной волной, D — скорость ударной волны, ρ_0 — начальная ($\tau = \infty$) плотность газа, R — газовая постоянная, ρ — переменная плотность, γ — эффективный показатель адиабаты, p — давление газа, измеренное в единицах $1/2\rho_0 D^2$.

Первые интегралы нерелятивистской радиационной гидродинамики, приведенные, например, в работе [7], в принятых выше обозначениях имеют вид

$$\beta = -q\eta, \quad At = \eta \left(1 - \eta - \frac{K}{2}\right) \\ S = \frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - K\eta \frac{1+r}{2} \right] \quad (1.3)$$

где S и K определены в (А.14) и удовлетворяют уравнениям (А.17)

$$\frac{dK}{d\tau} = - [S + q\eta (K + 3\delta_1 t^4)] \quad (1.4) \\ \frac{dS}{d\tau} = - 3(K - \delta_1 t^4) - q\eta [S + q\eta (K + 3\delta_1 t^4)]$$

Те же уравнения, но в диффузионном приближении, согласно (А.23) (как показано ниже в приложении А), имеют вид

$$\frac{d^2 K}{d\tau^2} = 3(K - \delta_1 t^4), \quad S = - \frac{dK}{d\tau} - 4q\eta K \quad (1.5)$$

Граничные условия за ударной волной для S и K даны в (А.18)

$$K|_{\tau=-\infty} = \delta_1, \quad S|_{\tau=-\infty} = -4q\eta_1 \delta_1 \quad (1.6)$$

Здесь η_1 — величина предельного сжатия. Подставляя (1.6) в (1.3), найдем, что условия Гюгонио для ударной волны с учетом излучения сводятся к следующим соотношениям

$$A = r \frac{(1 - \eta_1)(1 - 7\eta_1)}{1 - 7r}, \quad \delta_1 = \frac{2}{\eta_1} \frac{(1 - \eta_1)(\eta_1 - r)}{1 - 7r} \quad (1.7)$$

Величины A и δ_1 — существенно положительные величины, поэтому из (1.7) следует

$$r \leq 1/7, \quad r \leq \eta_1 \leq 1/7; \quad r \geq 1/7, \quad r \geq \eta_1 \geq 1/7 \quad (1.8)$$

Из (1.7) следует, что предельному случаю, когда излучение играет основную роль за ударной волной, соответствует

$$\delta_1 = 12/7, \quad A = 0, \quad \eta_1 = 1/7 \quad (K \gg 2A t/\eta)$$

В другом предельном случае

$$\delta_1 = 0, \quad A = r(1 - r), \quad \eta_1 = r \quad (K \ll 2A t/\eta)$$

Таким образом, полная система уравнений в приближении Эддингтона имеет вид

$$At = \eta \left(1 - \eta - \frac{K}{2}\right), \quad S = \frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - K\eta \frac{1+r}{2} \right] \\ \frac{dK}{d\tau} = -S - q\eta (K + 3\delta_1 t^4) \quad (1.9) \\ \frac{dS}{d\tau} = -3(K - \delta_1 t^4) - q\eta [S + q\eta (K + 3\delta_1 t^4)]$$

В диффузионном приближении гидродинамические уравнения сохраняются, а дифференциальные заменяются на (1.5).

Граничные условия в начальном равновесном состоянии ($\tau = \infty$)

$$(1) \quad K = S = t = 0, \quad \eta = 1 \quad (1.10)$$

Граничные условия в конечном равновесном состоянии ($\tau = -\infty$)

$$(2) \quad K = \delta_1, \quad S = -4q\eta_1\delta_1, \quad t = 1, \quad \eta = \eta_1 \quad (1.11)$$

§ 2. Приближенное решение задачи. Система уравнений (1.9) сводится к сложному нелинейному дифференциальному уравнению, которое может быть исследовано обычными методами качественного анализа. Это проведено в следующем разделе. Здесь же привлекаются дополнительные упрощения физического характера, предложенные Райзером [6] для построения приближенного решения. С этой целью вся область ударной волны разбивается на три части, в каждой из которых сделано упрощающее предположение для уравнений (1.9). Предполагается существование вязкого скачка, который помещается в начале координат. На границах всех областей, в том числе и на вязком скачке, непрерывны S и K .

1) *Область сильной неравновесности* ($\tau > \tau_k > 0$). Давление излучения, приходящего из нагретых областей, значительно больше давления излучения слабо сжатого газа $K \gg \delta_1 t^4$. При этом оказывается, что K порядка малого параметра q . В самом деле, пренебрегая в дифференциальных уравнениях (1.9) членом $\delta_1 t^4$ и членами, содержащими q , получим

$$K = Fe^{-V\bar{z}}, \quad S = \sqrt{3}K \quad (2.1)$$

где F — постоянная интегрирования. А из гидродинамических уравнений системы (1.9) видно, что $S \sim q$, поэтому, согласно (2.1), имеем $K \sim q$. Следовательно, члены, содержащие q , в дифференциальных уравнениях (1.9) имеют порядок q^2 и отброшены законно. Пренебрегая малым K и в гидродинамических уравнениях, найдем

$$\eta = 1/2(1+r) + \sqrt{1/4(1+r)^2 - r(S/q+1)}, \quad t = \eta(1-\eta)/A \quad (2.2)$$

Выражения (2.1) и (2.2) соответствуют результатам работы [6].

2) *Прогретая излучением равновесная область перед вязким скачком* ($0 < \tau < \tau_k$). Почти все излучение обусловлено равновесным излучением газа, т. е. $K \approx \delta_1 t^4$.

Уравнение для $dS/d\tau$ в (1.9) заменяется алгебраическим уравнением $K = \delta_1 t^4$, что означает переход к приближению лучистой теплопроводности с пренебрежением членами вязкости излучения $\sim O(q^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\delta_1 t^4) &= -\frac{q}{r} \left[(1-\eta)(\eta-r) - \delta_1 t^4 \eta \frac{1-7r}{2} \right] \\ S &= \frac{q}{r} \left[(1-\eta)(\eta-r) - \delta_1 t^4 \eta \frac{1+r}{2} \right] \\ \eta &= 1/2(1 - 1/2 \delta_1 t^4) + \sqrt{1/4(1 - 1/2 \delta_1 t^4)^2 - At} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) легко поддается численному счету. В этой области происходит постепенное увеличение роли давления излучения по мере приближения к вязкому скачку, т. е. к $\tau = 0$. Если вблизи $\tau = 0$ будет $K \sim \eta^{-1}(1-\eta)(\eta-r) \sim 1$ (интересующий нас случай), то $S \sim qK$. Сшивка решений первой и второй областей является непрерывной по всем величинам и делается при $\tau = \tau_k$. В первой области $K \sim q$ и $S \sim K$, поэтому и во второй области вблизи границы ($\tau \leq \tau_k$), $S \sim K$. Это означает, что в равновесной области происходит уменьшение плотности излучения в q^{-1} раз, в то время как S остается одного порядка величины ($\sim q$).

Из дифференциального уравнения (2.3) видно, что, грубо говоря, $\tau_k \sim \delta_1 q^{-1}$. Оптическая толщина второй области весьма велика. η (τ_k) и t (τ_k) определяются одними и теми же формулами с обеих сторон, если пренебречь поправками порядка q . Из условий непрерывности S и K определяются τ_k и F , точнее, из соотношения $S = \sqrt{3\delta_1 t^4}$ находится τ_k , а затем F — из соотношения $F \exp(-\sqrt{3}\tau_k) = \delta_1 t^4$.

3) Область за вязким скачком ($\tau < 0$) с постоянной плотностью излучения, равной предельной $J_1 = 3\delta_1$, но в непосредственной близости к скачку, существенно отклоняющейся от равновесной плотности излучения $3\delta_1 t^4$. Таким образом, полагается $K = \delta_1$ и пренебрегается производной $dK/d\tau$. Система (1.9) имеет тогда вид

$$\begin{aligned} At &= \eta(1 - \eta - 1/2 \delta_1) \\ S &= q/r [(1 - \eta)(\eta - r) - 1/2(1 + r)\eta\delta_1] \\ dS/d\tau &= -3\delta_1(1 - t^4) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение (2.4) можно получить при этом в виде зависимости τ от η , исходя из дифференциального уравнения, следующего из (2.4)

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{3\delta_1 r}{2q} \frac{1 - t^4}{\eta + 1/4 \delta_1(1 + r) - 1/2(1 + r)} \quad (2.5)$$

Эффективная оптическая толщина третьей области по порядку величины, согласно (2.5), равна $q\delta_1^{-1}$, т. е. обратна оптической толщине второй области. Диффузионное приближение дает несколько отличное от (2.5) уравнение, хотя оценка толщины области не изменяется.

Рассмотрим условия сшивки на вязком скачке. Все величины из второй области на скачке ($\tau = 0$) снабдим индексом плюс, а величины из третьей области на скачке ($\tau = 0$) — индексом минус. Условия непрерывности K и S можно записать в виде $t_+ = 1$ ($K_+ = \delta_1 t_+^4 = \delta_1$) и $S_+ = S_-$.

Первое условие дает постоянную интегрирования уравнений (2.3). Тогда из последнего уравнения (2.3) найдем

$$\eta_+ = 1/2(1 - 1/2\delta_1) + \sqrt{1/4(1 - 1/2\delta_1)^2 - A} \quad (2.6)$$

При помощи (2.3) и (2.4) условие непрерывности S на скачке запишется в виде

$$\eta_+^2 - (1 + r)(1 - 1/2\delta_1)\eta_+ = \eta_-^2 - (1 + r)(1 - 1/2\delta_1)\eta_- \quad (2.7)$$

Из (2.7) следуют два решения

$$\eta_-^{(1)} = (1 + r)(1 - 1/2\delta_1) - \eta_+, \quad \eta_-^{(2)} = \eta_+ \quad (2.8)$$

Только решение $\eta_-^{(1)}$ дает скачок, тогда как $\eta_-^{(2)}$ имеет смысл непрерывного решения. Из (2.4) видно, что в случае разрывного решения

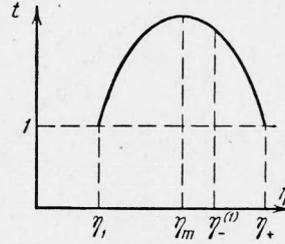
$$\begin{aligned} t_- &= A^{-1} \eta_-^{(1)} (1 - \eta_-^{(1)} - 1/2 \delta_1) = \\ &= A^{-1} [(1 + r)(1 - 1/2 \delta_1) - \eta_+] [\eta_+ - r(1 - 1/2 \delta_1)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь η_+ определяется по формуле (2.6). Отсюда получается величина температурного скачка $\Delta t = t_- - 1$.

Выясним, при каких условиях будет осуществляться каждое из решений (2.8) и рассмотрим их более подробно. На фиг. 1 построена зависимость $t = A^{-1}\eta(1 - \eta - 1/2\delta_1)$. Значению $t = 1$ соответствуют значения

$$\eta_1 = 1/2(1 - 1/2\delta_1) - \sqrt{1/4(1 - 1/2\delta_1)^2 - A} \quad (2.10)$$

(предельное сжатие) и сжатие перед скачком η_+ .

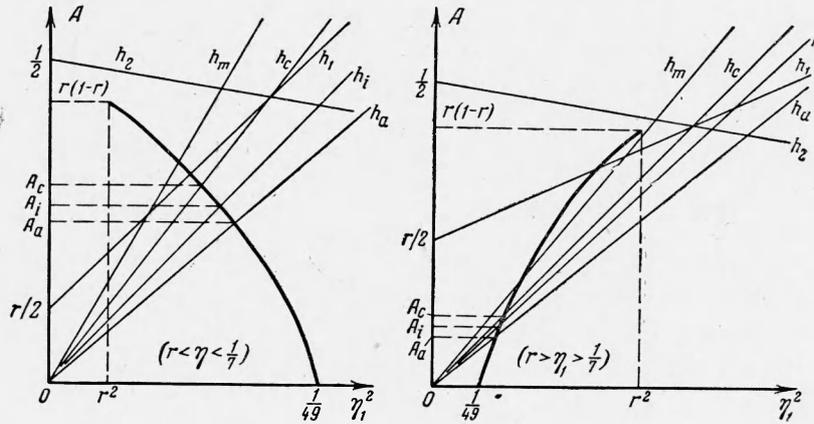


Фиг. 1

Для величины t имеем

$$\max t = 1/4 A^{-1} (1 - 1/2 \delta_1)^2 \text{ при } \eta_m = 1/2 (1 - 1/2 \delta_1)$$

Область от η_+ до $\eta_-^{(1)}$ проходится скачком, область от $\eta_-^{(1)}$ до η_1 соответствует непрерывному изменению параметров за фронтом ударной волны. Совпадение $\eta_-^{(1)}$ и η_+ будет означать исчезновение скачка. При фиксированном r картина зависит только от одного из параметров δ_1, η_1, A . Целесообразнее всего оказалось в качестве независимого параметра выбрать A .



Фиг. 2 а, б

Увеличение силы ударной волны соответствует уменьшению параметра A . Потребуем теперь, чтобы в согласии с теоремой Цемплена в вязком скачке отсутствовало разрежение

$$\eta_- \leq \eta_+ \tag{2.11}$$

Из формул (1.7) вытекает связь

$$\left(1 - \frac{1}{2} \delta_1\right) = \frac{A + \eta_1^2}{\eta_1} \tag{2.12}$$

При подстановке η_+ из (2.6) в (2.8) и исключении из него δ_1 при помощи (2.12), получим эквивалентные выражения

$$\eta_-^{(1)} = \frac{Ar + \eta_1^2(1+r)}{\eta_1} \text{ при } A \geq \eta_1^2, \quad \eta_-^{(2)} = \eta_+ = \begin{cases} A / \eta_1 & \text{при } A \geq \eta_1^2 \\ \eta_1 & \text{при } A \leq \eta_1^2 \end{cases} \tag{2.13}$$

Тогда становится ясно, что условие (2.11) для корня $\eta_-^{(1)}$ сводится к требованию

$$A \geq h_c = \eta_1^2 \frac{1+r}{1-r} \tag{2.14}$$

Условия (2.11) недостаточно для отбора решения в случае $A \geq h_c$, так как непрерывное решение $\eta_-^{(2)}$ совместимо с этим условием. Поэтому наложим дополнительно условие отсутствия разрежения в третьей области $d\eta / d\tau \geq 0$.

Так как $1 - t^4 \leq 0$, то из (2.5) вытекает, что при этом

$$\eta \leq 1/2 (1+r) (1 - 1/2 \delta_1) \tag{2.15}$$

В диффузионном приближении (уравнения (1.5)) получится несколько иное условие

$$\eta \leq 1/2 (1+r) - 1/4 \delta_1 (1 - 7r) \tag{2.16}$$

Очевидно, что достаточно доказать справедливость (2.15) и (2.16) для $\eta = \eta_-^{(1)}$ или $\eta = \eta_-^{(2)}$ как максимальных значений η в третьей области.

Используя (2.12) и (2.13), получим из (2.15) и (2.16) условия справедливости решений $\eta_-^{(1)}$ и $\eta_-^{(2)}$: в приближении Эддингтона решение $\eta_-^{(1)}$ справедливо, если $A \geq h_c$, а решение $\eta_-^{(2)}$ — в случае $A \leq h_c$; в диффузионном приближении $\eta_-^{(1)}$ справедливо при $A \leq h_2 = 1/2 - \eta_1^2 (1 + 1/2 r^{-1})$, а $\eta_-^{(2)}$ при $A \leq h_1 = 1/2 (\eta_1^2 + r)$.

Области справедливости этих решений в зависимости от A показаны на фиг. 2а и б; весь интервал изменений параметра A можно разбить на три области:

- 1) Область $r(1-r) \geq A > A_c = h_c$ справедливости решения $\eta_{-}^{(1)}$, т. е. область существования скачка.
- 2) Область $A_c \geq A > A_i = h_i = \eta_1^2$ непрерывного решения $\eta_{-}^{(2)} = \eta_+ > \eta_1$.
- 3) В третьей области $A_i \geq A \geq 0$ будет $\eta_{-}^{(2)} = \eta_1$.

В диффузионном приближении, кроме того, появляется область неоднозначного выбора решения, заключенная между линиями h_1 и h_c . На фиг. 2 показана также прямая

$$h_m = \eta_1^2 (1 + 2r) (1 - 2r)^{-1} \quad (2.17)$$

которая соответствует совпадению η_m и $\eta_{-}^{(1)}$. Она пересекает график $A(\eta_1^2)$ при $r < 1/4$ и лежит выше его при $r > 1/4$. Если $A < h_m$, то $\eta_{-}^{(1)} > \eta_m$, т. е. для газа с $r > 1/4$ температура за скачком для ударной волны любой силы имеет максимум, а при $r < 1/4$ этот максимум имеется только для достаточно сильных ударных волн, как это изображено на фиг. 1. Точные значения границ A_c и A_i определяются сразу, если применить вытекающее из (1.7) выражение

$$\eta_1 = 4/7 - \sqrt{9/49 + A(1-7r)/7r} \quad (2.18)$$

Тогда из (2.13) находится величина

$$A_c = \frac{r(1+r)}{(1-13r)^2} [1 + 19r - 32r^2 - 8\sqrt{r(1-r)(1+3r-16r^2)}] \quad (2.19)$$

Соответствующие ей величины η_1 и δ_1 определяются из (2.14) и (2.12)

$$\begin{aligned} \eta_c &= \frac{\sqrt{r(1-r)(1+3r-16r^2)} - 4r(1-r)}{1-13r} \\ \delta_c &= \frac{(1-r)(1-5r) - 2\sqrt{r(1-r)(1+3r-16r^2)}}{2(1-r)(1-13r)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Величина A_i определяется из условия $A = \eta_1^2$ и имеет вид

$$A_i = r \frac{1 + 18r - 8\sqrt{r(1+2r)}}{(1-14r)^2} \quad (2.21)$$

и соответственно этому

$$\eta_i = \frac{\sqrt{r(1+2r)} - 4r}{1-14r}, \quad \delta_i = 2 \frac{1 - 6r - 2\sqrt{r(1+2r)}}{1-14r} \equiv 2 \frac{2 + \sqrt{2+r^{-1}}}{4 + \sqrt{2+r^{-1}}} \quad (2.22)$$

Когда $A_c \geq A > A_i$, $t_- = 1$ в числителе уравнения (2.5), и, следовательно, $d\eta/d\tau = 0$ на скачке. Формально это означает непрозрачность третьей области, т. е. некорректность сделанного приближения. Фактически же здесь расходящийся несобственный интеграл

$$\tau = \int_{\eta_{-}^{(2)}}^{\eta_1} f(\eta) d\eta$$

переводится в сходящийся изменением нижнего предела: вместо $\eta_{-}^{(2)}$ берется $\eta_{-}^{(2)} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \ll \eta_{-}^{(2)}$.

Таким образом, скачок исчезает, когда $A \leq A_c$, и все величины из третьей области непрерывно сшиваются с величинами из равновесной второй области. При $A = A_i$ величины в третьей области равны предельным, само понятие третьей области теряет смысл. Выбор начала координат при $A < A_i$ делается произвольно. Появление непрерывного решения в задаче о структуре ударной волны с излучением является основным качественным отличием от результатов работ [5,6], где не учитывалось влияние движения вещества на перенос излучения. Следует отметить, что в изложенных приближениях граница непрерывного и разрывного решений не согласуется с физическим смыслом условия исчезновения скачка [7]. Из определения A следует, что $A = A_i$ эквивалентно ра-

венству изотермической скорости звука скорости вещества в равновесном состоянии за ударной волной ($c_{1i} = v_1$), а $A = A_c$ — равенству $c_{1a} = \gamma v_1$, где c_{1a} — адиабатическая скорость звука. На самом деле, ввиду непрерывности K и S на скачке, должно выполняться иное условие $c_{1a} = v_1$, или в терминах A и η_1 , условие $A_a = h_a = \eta_1^2 (1-r)/(1+r)$. Качественный анализ исходной системы уравнений (1.9) доказывает выполнение этого необходимого физического критерия.

§ 3. Качественный анализ уравнений. В качественном анализе диффузионного приближения, как менее обоснованного, касаться не будем.

Разберем гидродинамические уравнения точной системы (1.9)

$$At = \eta(1 - \eta - \frac{1}{2}K), \quad S = q/r[(1 - \eta)(\eta - r) - \frac{1}{2}(1 + r)K\eta] \quad (3.1)$$

Предельные точки начального (1) и конечного (2) равновесия определены в (1.10) и (1.11). Из второго уравнения (3.1) найдем выражение для η через непрерывные параметры K , S , а, подставив это выражение в первое уравнение, определим t через те же параметры. Отбор знаков должен производиться в соответствии с (1.10) и (1.11). В результате получим, что в точке (1) и в ее окрестности выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2}(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K) + \sqrt{\frac{1}{4}(1 + r)^2(1 - \frac{1}{2}K)^2 - r(S/q + 1)} \\ At &= r(S/q + 1) - \frac{1}{2}r(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K)^2 - \\ &\quad - r(1 - \frac{1}{2}K)\sqrt{\frac{1}{4}(1 + r)^2(1 - \frac{1}{2}K)^2 - r(S/q + 1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В окрестности точки (2) сохраняются уравнения (3.2), если величина A , характеризующая силу ударной волны, удовлетворяет неравенству $A < A_a$. Это легко доказать, если в неравенство $\eta < \frac{1}{2}(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K)$, следующее из (3.2), подставить предельные величины η_1 и δ_1 , а затем использовать соотношение (2.12).

Если же имеет место неравенство $A > A_a$, то в точке (2) и ее окрестности справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2}(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K) - \sqrt{\frac{1}{4}(1 + r)^2(1 - \frac{1}{2}K)^2 - r(S/q + 1)} \\ At &= r(S/q + 1) - \frac{1}{2}r(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K)^2 + \\ &\quad + r(1 - \frac{1}{2}K)\sqrt{\frac{1}{4}(1 + r)^2(1 - \frac{1}{2}K)^2 - r(S/q + 1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уже отсюда можно заключить, что условием разрывного решения будет

$$A > A_a = \eta_1^2(1 - r)(1 + r)^{-1} \quad (3.4)$$

Строго это можно показать следующим образом. Допустим противное, т. е. пусть в области стыка решений выполняется соотношение

$$r(S/q + 1) = \frac{1}{4}(1 + r)^2(1 - \frac{1}{2}K)^2$$

Тогда из (3.2) и (3.3) найдем

$$\eta_+ = \eta_- = \frac{1}{2}(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K), \quad At_+ = At_- = \frac{1}{4}(1 - r^2)(1 - \frac{1}{2}K)^2$$

Однако из первого уравнения (3.1), учитывая граничные условия (1.10) и (1.11), можно найти, что при выполнении (3.4) справедливы выражения

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}K) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}K)^2 - At}$$

Здесь верхний знак соответствует окрестности точки (1), а нижний — окрестности точки (2). Подстановка полученных выше выражений для $At_+ = At_-$ дает

$$\eta_+ = \frac{1}{2}(1 + r)(1 - \frac{1}{2}K) \neq \eta_- = \frac{1}{2}(1 - r)(1 - \frac{1}{2}K)$$

Это противоречие доказывает, что подкоренное выражение в (3.2) и (3.3) не обращается в нуль, т. е. имеется скачок в величинах t , η .

Теперь обратимся к полной системе уравнений (1.9) и проведем фазовый анализ в плоскости KS . Из алгебраических уравнений, в которых K и S рассматриваются как независимые переменные, легко получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial S} &= -\frac{r}{q\Delta}, & \frac{\partial \eta}{\partial K} &= -\eta \frac{1+r}{2\Delta}, & \frac{\partial t}{\partial S} &= -\frac{r}{qA} \frac{1-2\eta-\frac{1}{2}K}{\Delta} \\ \frac{\partial t}{\partial K} &= \frac{\eta^2 r}{A\Delta}, & \Delta &= 2\eta - (1+r) \left(1 - \frac{K}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дифференциальные уравнения системы (1.9) представим в виде разложения в окрестности точек (1) и (2)

$$\begin{aligned} dK/d\tau &= a(K_j, S_j)(K - K_j) + b(K_j, S_j)(S - S_j) \\ dS/d\tau &= c(K_j, S_j)(K - K_j) + d(K_j, S_j)(S - S_j) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где индекс j принимает два значения, а коэффициенты разложения равны

$$\begin{aligned} a &= \frac{q\eta_j}{\Delta_j} \left[3\delta_1 t_j^3 \left(t_j \frac{1+r}{2} - 4 \frac{\eta_j^2 r}{A} \right) + K_j \frac{1+r}{2} - \Delta_j \right] \\ b &= \frac{1}{\Delta_j} \left[12 \frac{\delta_1 r t_j^3 \eta_j}{A} \left(1 - 2\eta_j - \frac{K_j}{2} \right) + r(K_j + 3\delta_1 t_j^4) - \Delta_j \right] \\ c &= \frac{1}{\Delta_j} \left(12 \frac{\delta_1 r t_j^3 \eta_j^2}{A} - 3\Delta_j \right) + q\eta_j a, & d &= -\frac{12\delta_1 r t_j^3 (1 - 2\eta_j - \frac{1}{2}K_j)}{qA\Delta_j} + q\eta_j b \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь о свойствах исходной нелинейной системы (1.9) можно судить по свойствам «грубой» линейной системы (3.6) с коэффициентами (3.7).

Известно, что знак детерминанта $P = ad - bc$ определяет характер особой точки. Если $P < 0$, то эта точка седло, а при $P > 0$ — узел (если $(a + d)^2 > P$) или фокус (если $(a + d)^2 < P$).

В рассматриваемом случае определитель системы (3.6)

$$P = -\frac{3}{\Delta_j} \left\{ \Delta_j - r(K_j + 3\delta_1 t_j^4) + \frac{4\delta_1 r t_j^3 \eta_j}{A} \left[\frac{3}{2} (K_j - \delta_1 t_j^4) + 7\eta_j - 4 \right] \right\} \quad (3.8)$$

Для точки начального равновесия (1) будем иметь $\eta = 1, K = t = 0$, $P = -3 < 0$. Таким образом, в фазовой плоскости переменных KS эта точка имеет характер седла. Сепаратрисы седла даются формулой

$$\sigma_{1,2} = \frac{d-a}{2b} \pm \left[\left(\frac{d-a}{2b} \right)^2 + \frac{c}{b} \right]^{1/2} \equiv \frac{d-a}{2b} \pm \left[\left(\frac{d+a}{2b} \right)^2 - \frac{P}{4b^2} \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

и для точки (2) имеют вид

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3+q^2}} \quad (3.10)$$

Интегральная кривая соответствует сепаратрисе со знаком плюс, так как вблизи точки начального равновесия должно быть $K > 0$ и $S > 0$.

Особая точка (2), соответствующая конечному состоянию равновесия, характеризуется параметрами $\eta = \eta_1, t = 1, K = \delta_1, S = -4q\delta_1\eta_1$.

Подставляя их в (3.8) и используя соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{1+r}{\eta_1} (A - A_a), & \delta_1 \frac{1-7r}{2} + 2\eta_1 - (1+r) &= \frac{\eta_1^2 - r}{\eta_1} \\ \frac{\delta_1 \eta_1 r}{A} &= 2 \frac{\eta_1 - r}{1-7\eta_1} \end{aligned}$$

являющиеся следствиями (1.7), найдем, что для точки (2)

$$P = C (A - A_a)^{-1} \quad (3.11)$$

где

$$C = \frac{3}{1+r} \left[\eta_1^2 - r + 8\eta_1(7\eta_1 - 4) \frac{\eta_1 - r}{1 - 7\eta_1} \right] < 0 \quad (3.12)$$

Величина C отрицательна при всех допустимых значениях η_1 . Это можно показать, переписав (3.12) в тождественном виде

$$C = -\frac{3}{1+r} \left[r(1 - \eta_1) + \eta_1(31 - 49\eta_1) \frac{\eta_1 - r}{1 - 7\eta_1} \right]$$

Так как $\eta_1 < 31/49$ и $(\eta_1 - r)(1 - 7\eta_1)^{-1} > 0$, то, очевидно, $C < 0$.

Таким образом, характер особой точки (2) зависит от знака знаменателя в (3.11): при $A > A_a$ — седло с сепаратрисами, определяемыми по формуле (3.9), а при $A < A_a$ — узел, так как $(d+a)^2 P^{-1} \sim q^{-2} \gg 1$. Знак в (3.9) выбирается по условию минимальности потока в точке (2) [8].

Для случая малых δ_1 , который соответствует условию $A > \eta_1^2$, это требование однозначно дает $dS/dK = \sigma < 0$. При этом $(d-a)/2b \sim -1/q$, $c/b \sim +1$, угловые коэффициенты сепаратрис отличаются знаком, в (3.9) отбрасывается знак минус перед корнем, т. е. $\sigma_2 \sim -1/q$. Следовательно, при этих условиях имеется резкое увеличение S при относительно малом изменении K , что и оправдывает введение в приближенном решении (§ 2) третьей области по τ .

При $A = \eta_1^2$ будет $(d-a)/2b \sim +q$, $c/b \sim +1$ и $\sigma_2 \sim -1$. Коэффициент d меняет знак при $A = \eta_1^2 - O(q)$. В области $\eta_1^2 > A \geq A_a$ коэффициент b тоже меняет знак для $r > 1/7$ при некотором $A = A_*$. Пока $A_* \leq A \leq \eta_1^2 - O(q)$ величины имеют порядок: $(d-a)/2b \sim +1/q$, $c/b \sim +1$, $\sigma_2 \sim -q$.

В точке, в которой коэффициент b равен нулю, следует перейти к корню σ_1 со знаком плюс в (3.9), чтобы обеспечить непрерывное изменение dS/dK с изменением параметров ударной волны. В области, в которой коэффициент b сменил знак, $(d-a)/2b \sim -1/q$, $c/b \sim -1$, $\sigma_1 \sim -q$.

Таким образом, в области $\eta_1^2 > A \geq A_a$ большому изменению K отвечает малое изменение S , что является характерным признаком равновесной области. Теперь становится понятно, почему непрерывное решение в § 2 наступает при меньших значениях A , нежели здесь.

Теперь можно представить ход интегральных кривых в плоскости KS . Так как особые точки типа седла не могут быть соединены одной сепаратрисой [8], то случай $A > A_a$ соответствует наличию скачка и интегральная кривая осуществляется пересечением двух сепаратрис, выходящих из точек (1) и (2). Точка пересечения, представляющая собой угловую точку для зависимости $S(K)$, будет точкой скачка. В случае $A < A_a$, когда точка (2) имеет характер узла, осуществляется непрерывное решение. В любом случае интегральная кривая расположена ниже кривой, определяемой уравнением

$$r(S/q + 1) = 1/4(1+r)^2(1 - 1/2K)^2 \quad (3.13)$$

или эквивалентным ему

$$At = \eta^2 A_a \eta_1^{-2} \quad (3.14)$$

так как при

$$r(S/q + 1) > 1/4(1+r)^2(1 - 1/2K)^2$$

выражения (3.2) и (3.3) теряют смысл. Исследуемое уравнение в фазовой плоскости KS имеет вид

$$\frac{dS}{dK} = \frac{3(K - \delta_1 t^4) + q\eta(S + q\eta K + 3q\eta\delta_1 t^4)}{S + q\eta K + 3q\eta\delta_1 t^4} \quad (3.15)$$

Так как области лучистого равновесия занимают весьма существенное место в общем решении, то в значительной своей части интегральная кривая близка к кривой лучистого равновесия, определяемой уравнением $K = \delta_1 t^4$, в котором пренебрежено членами радиационной вязкости, имеющими порядок q^2 . Выражая из этого уравнения t через K , можно из

(3.1) найти, что для окрестности точки (1) для любых A и для окрестности точки (2) в случае $A \ll \eta_1^2$ кривая лучистого равновесия имеет вид

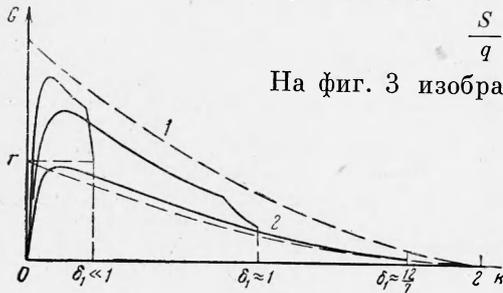
$$r \left(\frac{S}{q} + 1 \right) = A \left(\frac{K}{\delta_1} \right)^{1/4} + \frac{r}{2} \left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 + \frac{r}{2} \left(1 - \frac{K}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 - 4A \left(\frac{K}{\delta_1} \right)^{1/4} \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

а для точки (2) в случае $A \gg \eta_1^2$

$$r \left(\frac{S}{q} + 1 \right) = A \left(\frac{K}{\delta_1} \right)^{1/4} + \frac{r}{2} \left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 - \frac{r}{2} \left(1 - \frac{K}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 - 4A \left(\frac{K}{\delta_1} \right)^{1/4} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

Для предельно сильных ударных волн $A = 0$ и (3.16) принимает особенно простой вид

$$\frac{S}{q} + 1 = \left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 \quad (3.18)$$



Фиг. 3

На фиг. 3 изображена качественная картина хода интегральных кривых для трех наиболее характерных случаев ($\delta_1 \ll 1$, $\delta_1 \sim 1$, $\delta_1 \approx 12/7$). По оси ординат отложена величина $G = r(S/q + 1)$. Там же приведены предельная кривая 1, соответствующая уравнению (3.13), и равновесная кривая 2, соответствующая (3.18). Точный ход интегральных кривых в

каждом конкретном случае может быть получен методами численного интегрирования уравнения (3.15) с определенными выше значениями производной в точках (1) и (2).

Приложение А. Угловые аппроксимации уравнения переноса излучения. В приближении «серой материи» уравнение переноса излучения в лабораторной системе отсчета имеет вид [4]¹

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \right) I_\nu = - \alpha_0 L I_\nu + \alpha_0 \frac{B_{\nu_0}}{L^2} \quad (A.1)$$

где

$$L = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi_0} = \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (A.2)$$

В (A.1) учтено, что массовые коэффициенты поглощения α_ν и излучательная способность ϵ_ν в лабораторной системе отсчета связаны с коэффициентом поглощения α_0 в собственной системе отсчета соотношениями (1.19)*, а именно $\epsilon_\nu = \epsilon_{\nu_0} L^{-2} = \alpha_0 B_{\nu_0} L^{-2}$, $\alpha_\nu = \alpha_0 L$ (α_0 для «серой материи» не зависит от частоты, B_{ν_0} — функция Планка).

Проинтегрировав (A.1) по $d\nu$, получим

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \right) I = - \alpha_0 L I + \alpha_0 \frac{B_0}{L^3}, \quad I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad B_0 = \int_0^\infty B_{\nu_0} d\nu_0 = \sigma T_0^4 / \pi \quad (A.3)$$

Здесь T_0 — температура газа в собственной системе отсчета. При получении второго члена в правой части (A.3) была использована, согласно (1.7)*, связь $d\nu = d\nu_0 L^{-1}$, применяя которую к (1.10)*, получим зависимость между интегральными интенсивностями излучения в лабораторной и собственной системах отсчета

$$I = I_0 L^{-4} \quad (A.4)$$

¹ Ниже формулы из работы [4] будут отмечаться звездочками.

Так как по (1.15)* и (1.18)*

$$\frac{1}{\alpha_0 L} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \right)$$

то в собственной системе отсчета уравнение (A.3) примет вид

$$\frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \frac{I_0}{L^4} = \frac{B_0 - I_0}{L^4} \quad (\text{A.5})$$

Далее упростим уравнения (A.5) и (A.3), введя условие стационарности. Из соотношения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} - \beta \frac{\partial}{\partial x_0} \right)$$

согласно (1.13)*, следует, что условия стационарности в лабораторной системе отсчета и в собственной системе имеют соответственно вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} = \beta \frac{\partial}{\partial x_0}$$

и (A.5) запишется

$$\frac{\beta + \cos \varphi_0}{\alpha_0} \frac{\partial I_0}{\partial x_0} \frac{1}{L^4} = \frac{B_0 - I_0}{L^4} \quad (\text{A.6})$$

В собственной системе отсчета можно ввести понятие оптической глубины $d\tau_0 = \alpha_0 dx_0$. В лабораторной системе отсчета введение аналогичной величины $d\tau' = \alpha dx = \alpha_0 L dx$ привело бы к некоторым затруднениям ввиду зависимости $d\tau'$ от угла через L , что приходилось бы учитывать при рассмотрении угловой зависимости интенсивности излучения. Поэтому в качестве оптической глубины в лабораторной системе отсчета вводится иная величина $d\tau = \alpha_0 dx$, не зависящая от угла и отличающаяся от $d\tau_0$ в членах порядка β^2 , так как $dx = dx_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

В терминах оптической глубины уравнения переноса излучения (A.3) и (A.5) имеют вид

$$\frac{\cos \varphi}{L} \frac{dI}{d\tau} = \frac{B_0}{L^4} - I \quad (\text{A.7})$$

$$(\beta + \cos \varphi_0) L^4 \frac{dI_0}{d\tau_0 L^4} = B_0 - I_0 \quad (\text{A.8})$$

Разлагая L по малым β и учитывая только члены первого порядка, получим отсюда

$$\cos \varphi (1 + \beta \cos \varphi) \frac{dI}{d\tau} = B_0 (1 + 4\beta \cos \varphi) - I \quad (\text{A.9})$$

$$(\cos \varphi_0 + \beta) \frac{dI_0}{d\tau} + 4 \cos^2 \varphi_0 I_0 \frac{d\beta}{d\tau} = B_0 - I_0 \quad (\text{A.10})$$

Первое уравнение служит исходным пунктом приближения Эддингтона [9], второе — модифицированного диффузионного приближения.

Введем безразмерные величины

$$J = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} I d\mu, \quad S = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu, \quad K = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} I \mu^2 d\mu \quad (\text{A.11})$$

($\mu = \cos \varphi$)

Здесь ρ_0 — плотность невозмущенного газа, D — величина с размерностью скорости, J , S , K — безразмерные плотности энергии излучения, потока энергии излучения (деленного на c) и потока импульса излучения, определенные в лабораторной системе отсчета. Согласно (3.8)* — (3.10)* они связаны с соответствующими величинами в собственной системе отсчета соотношениями

$$J = J_0 + 2\beta S_0, \quad S = S_0 + \beta (J_0 + K_0), \quad K = K_0 + 2\beta S_0 \quad (\text{A.12})$$

справедливыми с точностью до членов порядка β^2 .

Величина B_0 также может быть представлена в безразмерном виде

$$\frac{8\pi}{\rho_0 D^2 c} B_0 = 3\delta_1 t^4, \quad \delta_1 = \frac{8\sigma T_1^4}{3c\rho_0 D^2}, \quad t = \frac{T}{T_1} \quad (\text{A.13})$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана, T и T_1 — температуры газа, причем T_1 — постоянная величина.

Отметим, что в (А.13) не делается различия между T_0 и T , так как они отличаются только в порядке β^2 (см. [10]).

Применив к уравнению (А.9) операторы

$$\frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} (\dots) d\mu, \quad \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} (\dots) \mu (1 - \beta\mu) d\mu \quad (\text{А.14})$$

получим, с точностью до β^2 ,

$$\frac{dS}{d\tau} + \beta \frac{dK}{d\tau} = 3\delta_1 t^2 - J, \quad \frac{dK}{d\tau} = -S + \beta K + 3\delta_1 t^4 \beta \quad (\text{А.15})$$

Система (А.15) остается незамкнутой, поэтому, следуя Эддингтону, введем дополнительную связь

$$J = 3K \quad (\text{А.16})$$

Это соответствует предположению

$$\langle J \rangle = \left(\frac{8\pi}{\rho_0 D^2 c} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\mu) \mu^2 d\mu \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu \right)^{-1} = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} I(\mu) d\mu = J$$

В собственной системе отсчета в условиях равновесия (А.16) выполняется тождественно. В неравновесных условиях связь $J = 3K$ также будет предположением, которое обычно принимается вслед за Эддингтоном. Соотношение (А.16) в неравновесных условиях следует связывать с процедурой усреднения уравнения переноса по углам. Этому вопросу посвящено Приложение Б.

Используя в (А.15) условие (А.16), получим в приближении Эддингтона

$$\frac{dK}{d\tau} = -S + \beta(K + 3\delta_1 t^4), \quad \frac{dS}{d\tau} = -3(K - \delta_1 t^4) + \beta S - \beta^2(K + 3\delta_1 t^4) \quad (\text{А.17})$$

Во втором уравнении сохранены члены $\sim \beta^2$ (которые, вообще говоря, следовало бы отбросить) только для точного выполнения равновесных условий, вытекающих из исходной системы (А.15) при $t = 1$ и $d/d\tau = 0$

$$K = \delta_1, \quad S = 4\beta_1 \delta_1 \quad (\text{А.18})$$

Уравнения, аналогичные (А.17), могут быть получены также из (А.10), решение которого ищется в виде, обобщающем (2.8)* для неравновесных условий

$$I_0 = U - (\cos \varphi_0 + \beta) \frac{dU}{d\tau} - 4 \cos^2 \varphi_0 U \frac{d\beta}{d\tau} \quad (\text{А.19})$$

где U — функция, не зависящая от $\cos \varphi_0$, вообще говоря, отличная от B_0 и совпадающая с последней только в условиях равновесия. Особенностью приближения (А.19) является наличие члена, квадратичного по $\cos \varphi_0$.

Введем обозначение

$$\delta = \frac{8\pi U}{3\rho_0 D^2 c} \quad (\text{А.20})$$

Подставив (А.19) в (А.10) и учитывая (А.14), получим интегрированием по φ_0

$$\frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = 3(\delta - \delta_1 t^4) \quad (\text{А.21})$$

Применив далее к (А.19) операторы

$$\frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} (\dots) d\mu_0, \quad \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} (\dots) \mu_0 d\mu_0, \quad \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c} \int_{-1}^{+1} (\dots) \mu_0^2 d\mu_0$$

получим

$$J_0 = 3\delta + O(\beta\delta), \quad S_0 = -d\delta/d\tau, \quad K_0 = \delta + O(\beta\delta)$$

где члены $O(\beta\delta)$ являются дифференциальными и дают в уравнениях радиационной гидродинамики малый вклад. Переход в лабораторную систему отсчета по формулам (А.12) приводит к соотношениям

$$J = 3\delta + O(\beta\delta), \quad S = -d\delta/d\tau + 4\beta\delta, \quad K = \delta + O(\beta\delta) \quad (\text{А.22})$$

Пренебрегая членами $O(\beta\delta)$ и заменяя δ на K , получим из (A.21) и (A.22) в диффузионном приближении

$$\frac{d^2K}{d\tau^2} = 3(K - \delta_1 t^4), \quad S = -\frac{dK}{d\tau} + 4\beta K \quad (\text{A.23})$$

Заметим, что связь $J = 3K$ приближенно выполняется в (A.22). При обобщении диффузионного приближения на случай $\beta \neq 0$ (A.23) встретилась существенная трудность, которая была преодолена в приведенном выводе путем выделения, а затем — пренебрежения членами $O(\beta\delta)$. В равновесном случае, когда функция U тождественно совпадает с B_0 , эти члены были сохранены и дали вклад в выражениях (3.18)*, (3.19)* для J , S , K , например в K , они имели смысл вязкости излучения. После того как в (A.22) члены $O(\beta\delta)$ были отброшены, стал невозможным предельный переход к равновесному случаю. Тем не менее, сохранение их в (A.22), по-видимому, нецелесообразно, во-первых, по отмеченной выше причине — малость вклада в уравнения радиационной гидродинамики, во-вторых, из-за способа получения уравнения (A.21) для функции U . При выводе уравнения (A.21) по сути дела усредняется член, пропорциональный $\cos^2\varphi_0$, а основной вклад в члены $O(\beta\delta)$ как раз происходит от членов $\sim \cos^2\varphi_0$ в (A.19). Наконец, члены $O(\beta\delta)$ очень сильно усложнили бы исходную систему уравнений (A.23). Однако приведенные мотивы не могут служить достаточным основанием сделанному пренебрежению. Поэтому во всех применениях будет отдаваться предпочтение приближению Эддингтона (A.17) перед недостаточно строгим диффузионным приближением (A.23).

Приложение Б. Усреднение уравнения переноса. Соотношение (A.16) в неравновесных условиях можно обосновать, обобщая известную процедуру усреднения уравнения переноса на случай $\beta \neq 0$ [11]. Запишем точное решение уравнения (A.7), в котором сохранены лишь члены $\sim \beta$, для безразмерных интенсивностей $I^* = 2I/\rho_0 D^2 c$ излучения:

«вперед» ($\theta = \varphi$, $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$)

$$I_1^*(\theta, \tau) = \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_1 t^4 (\sec \theta + 3\beta) \exp \left[\sec \theta (\tau - \tau') + \int_{\tau'}^{\tau} \beta d\tau'' \right] d\tau' \quad (\text{B.1})$$

«назад» ($\psi = \pi - \varphi$, $0 \leq \psi \leq 1/2\pi$)

$$I_2^*(\psi, \tau) = \frac{3}{4\pi} \int_{\tau}^{\infty} \delta_1 t^4 (\sec \psi - 3\beta) \exp \left[\sec \psi (\tau - \tau') + \int_{\tau'}^{\tau} \beta d\tau'' \right] d\tau' \quad (\text{B.2})$$

Если β и t постоянны везде или постоянны в какой-либо достаточно широкой области τ (например, для $\tau \rightarrow \pm \infty$), то и из (B.1), (B.2) следует

$$I^*(\varphi) = \frac{3}{4\pi} (1 + 4\beta \cos \varphi) \delta_1 t^4 \quad (\text{B.3})$$

При помощи (B.1) и (B.2) можно вычислить поток энергии излучения S

$$S = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_1 t^4 \exp \left(\int_{\tau'}^{\tau} \beta d\tau'' \right) [E_2(\tau - \tau') + 3\beta E_3(\tau - \tau')] d\tau' - \\ - \frac{3}{2} \int_{\tau}^{\infty} \delta_1 t^4 \exp \left(\int_{\tau'}^{\tau} \beta d\tau'' \right) [E_2(\tau' - \tau) - 3\beta E_3(\tau' - \tau)] d\tau' \quad (\text{B.4})$$

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \exp(-x\xi) \xi^{-n} d\xi$$

Сформулируем приближение для «среднего» $\cos \varphi = \langle \cos \varphi \rangle$. Пусть интенсивность излучения вперед $I_1^*(\theta, \tau) = J_1(\tau)$, т. е. не зависит от угла θ , и аналогично $I_2^*(\psi, \tau) = J_2(\tau)$ интенсивность излучения назад.

При этом в общем случае $J_1(\tau) \neq J_2(\tau)$. В выражениях (B.1) и (B.2) тогда полагаем $\cos \theta = \langle \cos \theta \rangle = \alpha$ и $\cos \psi = \langle \cos \psi \rangle = \alpha$, считая «средние» $\cos \varphi$ в обоих направлениях одинаковыми. Легко убедиться, что соответствующее изменение в (B.4) состоит в замене

$$2E_2(x) \text{ на } \frac{1}{\alpha} \exp \frac{-x}{\alpha}, \quad 2E_3(x) \text{ на } \exp \frac{-x}{\alpha} \quad \left(E_{n-1}(x) = -\frac{dE_n(x)}{dx} \right)$$

проделанной, например, в [6] с той же целью усреднения.

Величины $J_1(\tau)$ и $J_2(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha(1 + \beta\alpha) \frac{dJ_1}{d\tau} = -J_1 + \frac{3}{4\pi} \delta_1 t^4 (1 + 4\beta\alpha) \quad (\text{Б.5})$$

$$-\alpha(1 - \beta\alpha) \frac{dJ_2}{d\tau} = -J_2 + \frac{3}{4\pi} \delta_1 t^4 (1 - 4\beta\alpha) \quad (\text{Б.6})$$

Легко определить, что безразмерные моменты интенсивности излучения J , S и K из (А.11) будут равны

$$J = 2\pi(J_1 + J_2), \quad S = \pi(J_1 - J_2), \quad K = \frac{2}{3}\pi(J_1 + J_2) \quad (\text{Б.7})$$

При этом соотношение (А.16) справедливо при любом значении $\langle \cos \varphi \rangle$. Однозначный выбор величины α можно сделать, подобно [11], путем сопоставления точного уравнения для $dK/d\tau$ из (А.17) с соответствующим уравнением, полученным из (Б.5), (Б.6) и (Б.7). Это сопоставление дает $\alpha = 2/3$, как и в обычном случае [11]. Весьма существенно, что только при таком определении α моменты J , S и K имеют правильные значения в области постоянства β и t . В самом деле, подставляя $I^*(\varphi)$ из (Б.3) в (А.11), имеем точные значения

$$J = 3\delta_1 t^4, \quad S = 4\delta_1 t^4 \beta, \quad K = \delta_1 t^4 \quad (\text{Б.8})$$

С другой стороны, из (Б.5) и (Б.6) при $d/d\tau = 0$ определяем

$$J_1 = \frac{3}{4\pi} \delta_1 t^4 \left(1 + \frac{8}{3} \beta\right), \quad J_2 = \frac{3}{4\pi} \delta_1 t^4 \left(1 - \frac{8}{3} \beta\right) \quad (\text{Б.9})$$

Отсюда при помощи (Б.7) доказываются формулы (Б.8) или, что то же самое, (А.18), если $t = 1$.

Введя средний косинус $\alpha = 2/3$, можно представить уравнения (Б.5) и (Б.6) в ином виде: для моментов S и K . Так как одно из уравнений для $dK/d\tau$ было уже использовано при определении α , остается найти уравнение для $dS/d\tau$. Складывая (Б.5) с (Б.6), используя (Б.7) и выражение для $dK/d\tau$ из (А.17), найдем

$$\frac{dS}{d\tau} = -\frac{9}{4}(K - \delta_1 t^4) + \beta S - \beta^2(K + 3\delta_1 t^4) \quad (\text{Б.10})$$

Уравнение (Б.10) отличается от второго уравнения из (А.17) тем, что вместо коэффициента 3 перед скобкой $(K - \delta_1 t^4)$ стоит численно близкий коэффициент $9/4$.

Таким образом, процедура усреднения $\cos \varphi$ в уравнении переноса излучения (А.7) приводит к уравнениям для моментов (А.17) с небольшим отклонением в численном коэффициенте, отмеченном выше, но существенно отличается от соответствующих уравнений диффузионного приближения (А.23).

Поступила 10 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas L. H. The radiation field in a fluid in motion. Quart. J. Math., Oxford series, 1930, vol. 1.
2. Синдж Д. Л. Релятивистский газ. ИЛ, 1960.
3. Прокофьев В. А. Уравнение переноса в релятивистской радиационной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5.
4. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Тензор энергии — импульса излучения в движущейся среде при условиях, близких к равновесным. ПМТФ, 1963, № 3.
5. Зельдович Я. Б. Ударные волны большой амплитуды в воздухе. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, № 5.
6. Райзер Ю. П. О структуре фронта сильных ударных волн в газах, Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, № 6.
7. Имшенник В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 1.
8. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний ОНТИ, М. — Л., 1937.
9. Унзольд А. Физика звездных атмосфер. ИЛ, 1949.
10. Паули В. Теория относительности. Гостехтеоретиздат., М. — Л., 1947.
11. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика. Гостехтеоретиздат, 1952.