А. М. Тезин, Качественный анализ методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2005, часть 3, 227–230

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Goldfarb I, Sazhin S, and Zinoviev A.* Delayed thermal explosion in flammable gas containing fuel droplets: asymptotic analysis // Journal of Engineering Mathematics, No. 0, 2004. P. 1–16
2. *Sobolev V.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System & Control Letters, Vol. 5. 1984. P. 169–179.
3. *Gol'dshtein V., Sobolev V.* Integral manifolds in chemical kinetics and combustion // Singularity theory and some problems of functional analysis, AMS Translations, Series. Vol 2. No. 153. 1992. P. 73–92.

*Работа частично поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы».*

УДК 517.925

***А.М. Тезин***

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется расположение траекторий в пространстве $R^n((t,x)$. Идеи методов выражены в [1–12].

I. Локальный метод нелинейного анализа с помощью нормальных форм [1, 2]. Система рассматривается в векторном виде

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), i = \overline{1,n},\ X = (x_1,...,x_n), \tag{1}$$

$\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i$ – аналитические в окрестности $V(0)$ точки $O$ с помощью нормальных форм

$$\dot{Y} = \psi(Y). \tag{2}$$

При $n = 2$ автономная система (1) допускает применение метода Фроммера или обобщенные методы [3, 8–12].

**Пример 1 [1, с.70]**. $x^2 y' = y - x$ при переходе к уравнению $y' = \dfrac{y-x}{x^2}$ показывает изоклину нуля $y = x$ и бесконечности $x = 0$. Полуоси системы ( $xy$ ) и два луча $y = x$ $(x > 0, x < 0)$ разбивают плоскость на 6 углов; по знакам $y'$ внутри углов устанавливается, что $O$ – седло – узел, тогда как А. Д. Брюно утверждает иное.

**Пример 2 [1, с. 143].**

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2^2 - x_2^3,\ \dot{x}_2 = \omega x_1 + \left(1+\omega^2\right) x_1 x_2^2 - x_2^3 . \tag{3}$$

Если переобозначить $x_1 = x,\ x_2 = y$, то в плоскости ( $xy$ ) получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega x - \left(1+\omega^2\right) x y^2 + y^3}{x y^2 + y^3} . \tag{4}$$

Исследуем (4) методом критических ветвей [8, 9]. В (4) ставим $y = kx^{\alpha}, \alpha > 0$; получим:

$$k x^{\alpha-1} = \frac{-\omega x - \left(1+\omega^2\right) k^2 x^{2\alpha} + k^3 x^{3\alpha}}{k^2 x^{2\alpha+1} + k^3 x^{3\alpha}} . \tag{5}$$

Из (5) получим:

$$x^{4\alpha-1} = \frac{\omega - \left(1+\omega^2\right) k^2 x^{2\alpha} + k^3 x^{3\alpha}}{k^3 + k^4 x^{\alpha}} . \tag{6}$$

Из (6) находим порядки малости $\alpha > 0$ и меры малости $k \neq 0$ $O$–кривых $y(x) \to 0$ при $x \to 0$. Поскольку при этом $A(k) \equiv +\infty$, то уравнение мер малости имеет вид: $F(x) = \dfrac{\omega}{k^3} = \infty$. Аналогично получено противоречие при рассмотрении «перевернутого» уравнения $\dfrac{dx}{dy} = \dots$ .

Причина противоречий состоит в том, что метод сведения системы сводится к сходящимся нормализующим преобразованиям, а это не работает даже при $n = 2$ .

II. Рассмотрение методов исследования Е. В. Воскресенского по качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений [4, 5].

1. На с. 34 [5] имеется система: $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = f(t, y)$; эта запись в векторной форме; $O = (0,...,0),\ \ f(t, x) \in R^n$. Систему можно развернуть в перевернутом виде покоординатно

$$\frac{0}{f_i(t, x)} = 0, i = \overline{1, n} .$$

Ясно, эта система бессодержательна; особенно это четко видно при $n = 2$ .

2. На с.25 изучается уравнение: $\dot{y} = Ay + f(t, y)$. Если обозначить $t = x$, тогда изучаем уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Теорема 1.2.2 утверждает, что при большом $x_0 > 0$ на $[0, \infty)$ и многих прочих условиях любое решение $y(x)$ ограничено на $[x_0, \infty)$. В $R^2$ это неверно. Контрпример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15} a\left(ax^5\right)^{\frac{1}{3}} x^4, \ a > 0 .$$

Ясно $y'(x) > 1$ при $x > 1$; поэтому $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

3. На с.46 [5] утверждается, что при $t \to +\infty$

$$\frac{x(t) - y(t)}{Q(t - t_0)} \to 0$$

при $Q > 0$. Контрпример: $Q = \frac{t}{t^2 + 1} > 0$. Тогда это утверждение не имеет четкого смысла, так как неясно поведение $x(t) \Gamma y(t)$ при $t \to +\infty$.

4. Обобщенный метод Фроммера в работах Е. В. Воскресенского [4, 5]. Лишь упоминаются немного имен создателей этих обобщений, но, считает Воскресенский, что им внесен здесь чуть ли не главный вклад. Между тем это не так. В течении многих десятилетий на основе неполноты и некорректности проблем Фроммера шел процесс многих обобщений этого метода. Сам автор излагает метод Фроммера в старых понятиях и посторонних для дела проблем.

5. Примером полного исследования класса обобщенного уравнения считается: $\frac{dy}{dx} = x^n F\left(\frac{x}{y}\right)$, вид $y' = x^n F_1\left(\frac{y}{x}\right)$, где $F_1 = F\left(\frac{1}{yx^{-1}}\right)$. Это вся теория; остальное в [12].

6. Исправление формул (3) в [12, с. 210 - 212]. Исправленные формулы:

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{1}{2} m_2 m_3 (2y_1) - \frac{3}{2}, \ \frac{\partial H}{\partial y_3} = 0 .$$

Это значит, что ранее пропущенные числовые множители не влияли на результирующие выводы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Брюно А.Д.* Элементы нелинейного анализа. Самарканд: Самарк. ун-т, 1973. С. 3–159.
2. *Брюно А.Д.* Локальные методы нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. С. 3–253.
3. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // УМН, 1941. Т. 9.
4. *Воскресенский Е.В., Артемьева Е.Н., Белоглазов В.А., Мурюмин С.М.* Качественные и асимптотические методы в интегрировании дифференциальных уравнений. Саранск: изд-во Саратовского ун-та (филиал), 1988. С. 3–187.
5. *Воскресенский Е.В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: изд-во Саратовского ун-та (филиал), 1990. С. 3–224.
6. *Тезин А.М.* Алгоритм исследования состояний равновесий автономных систем // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. 9-й межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 1999. Ч. 3. С. 125–127.
7. *Тезин А.М.* Критические ветви и их применение в качественном исследовании дифференциальных уравнений // Учен. записки Барнаульского пед. инст., 1968. Т. 9 (матем.-физика). С. 57–62.
8. *Тезин А.М.* Асимптотика О–кривых, определяемых многомерными системами // Аналитические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Куйбышев: КГУ, 1987. С. 98–111.
9. *Тезин А.М.* Критические ветви и проблемы различения Фроммера // Докл. на 4-м съезде математиков СССР. Л.: АН СССР, 1961. С. 65.
10. *Тезин А.М.* Интегральные кривые обобщено – однородного уравнения первого порядка // Дифференциальные уравнения, 1965. Т. 1. № 6 С. 742–757.
11. *Тезин А.М., Кучма Л.В.* К проблеме существования центра и фокуса одного класса дифференциальных уравнений // Диф. уравнения (математ. физика). Куйбышев: КГПИ, 1981. С. 43–49
12. *Тезин А.М.* Качественное исследование гамильтоновых систем. Задача трех и более тел // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Всерос. научн. конф. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 210–212.