Доклады Академии наук СССР
1963. Том 151, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

1. Обратные задачи математической физики часто приводят к некорректно поставленным задачам. Типичным примером является уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, z(s)] = \int_a^b K(x, s) z(s)\, ds = u(x), \quad c \leqslant x \leqslant d. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет решение не для всякой функции $u(x)$. Очевидно, что если $K(x, s)$ имеет определенный порядок гладкости по x, то не существует функции $z(s) \in L_2$, удовлетворяющей уравнению (1), если $u(x)$ имеет меньший порядок гладкости. Будем предполагать единственность решения уравнения (1), т. е. предположим, что если для некоторой функции $\bar{u}(x)$ уравнение (1) имеет решение $\bar{z}(s)$, то только одно.

Пусть функция $\bar{u}(x)$ такова, что уравнение (1) имеет решение $\bar{z}(s)$. Целью настоящей статьи является изложение алгоритма для построения равномерного приближения функции $\bar{z}(s)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\bar{z} \in \overline{C}_1$, где $\overline{C}_1$ — класс непрерывных кусочно-гладких функций.

Обозначим U класс функций $u(x) = A[x, z(s)]$, $z(s) \in \overline{C}_1$. Норму уклонения в $\overline{C}_1$ будем брать

$$\|z\| = \max |z(s)| \qquad (a \leqslant s \leqslant b)$$

и норму уклонения в U

$$\|u(x)\| = \left[\int_c^d u^2(x)\, dx\right]^{1/2}.$$

Если ядро $K(x, s)$ непрерывно, то отображение $\overline{C}_1 \to U$ непрерывно.

Следует иметь в виду, что обратная задача — задача нахождения $z(s)$ по заданной функции $u(x)$ — некорректна. В самом деле, функциям $z_1(s)$ и $z_2(s) = z_1(s) + p \cos \omega s$, $z_1(s), z_2(s) \in \overline{C}_1$, где p — любое (как угодно большое) фиксированное число, будут соответствовать функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, норма уклонения которых $\|u_1(x) - u_2(x)\|$ как угодно мала, если ω достаточно велика. Однако, если классом допустимых решений является компактный класс $\overline{Z}$, то обратное отображение $\overline{U} \to \overline{Z}$ будет устойчиво ([1]). Иными словами, каково бы то ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta(\varepsilon, \overline{Z})$, что из $\|u_1 - u_2\| < \delta(\varepsilon, \overline{Z})$ следует $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon$, если $u_1, u_2 \in \overline{U} = \{u(x) = A[x, z(s)], z \in \overline{Z}\}$, где $\overline{Z}$ — компактный класс функций.

Построение алгоритма для получения приближенного решения, равномерно аппроксимирующего $\bar{z}(s)$, базируется на следующем принципе регуляризации: семейство функций $z^\alpha(s)$, зависящее от параметра α, мы будем называть *регуляризованным семейством приближенных решений*, если: 1) $u_\alpha(x) = A[x, z^\alpha(s)] \to \bar{u}(x)$ при $\alpha \to 0$; 2) функции $z^\alpha(s)$ при любом α принадлежат компактному классу функций $\overline{Z}$, содержащему $\bar{z}(s)$. Регуляризованное семейство приближенных решений равномерно сходится к $\bar{z}(s)$ при $\alpha \to 0$.

2. Пусть задана функция $\bar{u}(x)$. Рассмотрим функционал

$$M^\alpha [z(s), \bar{u}(x)] = N[z(s), \bar{u}(x)] + \alpha\Omega[z(s)], \qquad (2)$$

где функционал N представляет квадратическое уклонение $\bar{u}(x)$ от $A[x, z(s)]$

$$N[z(s), \bar{u}(x)] = \int_c^d [A[x, z(s)] - \bar{u}(x)]^2\, dx,$$

$$\Omega[z(s)] = \int_a^b [k(s)\, z'(s)^2 + p(s)\, z^2(s)]\, ds \qquad (k(s) > 0,\ p(s) > 0).$$

Мы будем называть $\Omega[z]$ регуляризующим и M^α сглаживающим функционалами.

Теорема 1. *Для любой функции $\bar{u}(x) \in L_2$ существует единственная непрерывная, дифференцируемая функция $z^\alpha(s)$, реализующая минимум сглаживающего функционала $M^\alpha[z(s), \bar{u}(x)]$.*

Функция $z^\alpha(s)$ определяется уравнением Эйлера для функционала $M^\alpha[z, \bar{u}]$:

$$L^\alpha[z] = \alpha\left\{\frac{d}{ds}\left[k\frac{dz}{ds}\right] - pz\right\} - \left\{\int_a^b \bar{K}(s, \zeta)\, z(\zeta)\, d\zeta - \bar{b}(s)\right\} = 0,\ z'(a) = z'(b) = 0, \qquad (3)$$

где

$$\bar{K}(s, \zeta) = \int_c^d K(\xi, s),\ K(\xi, \zeta)\, d\xi, \qquad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s)\, \bar{u}(\xi)\, d\xi.$$

С помощью функции Грина для краевой задачи

$$L^\omega[z] = \frac{d}{ds}\left[k(s)\frac{dz}{ds}\right] - p(s)\, z(s) = f(s), \qquad z'(a) = z'(b) = 0, \qquad (4)$$

определяемой оператором Эйлера для регуляризующего функционала, уравнение (3) может быть преобразовано в уравнение Фредгольма 2-го рода, для которого при $\alpha > 0$ однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение: отсюда и следует существование $z^\alpha(s)$.

Теорема 2. *Если $\bar{z}(s) \in \bar{C}_1$, $\bar{u}(x) = A[x, \bar{z}(s)]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha(\varepsilon, \bar{z})$, что*

$$|z^\alpha(s) - \bar{z}(s)| < \varepsilon$$

для всех $\alpha < \alpha_0(\varepsilon, \bar{z})$.

В самом деле,

$$M^\alpha[z^\alpha(s); \bar{u}(x)] \leqslant N[\bar{z}, \bar{u}] + \alpha\Omega[\bar{z}] = \alpha C^2 \qquad (C^2 = \Omega[\bar{z}]),$$

откуда следует, что $z^\alpha(s)$ удовлетворяет неравенству

1) $\Omega[z(s)] \leqslant C^2$,

определяющему компактный класс функции $\bar{Z}$, а также

2) $\| u^\alpha(x) - \bar{u}(x) \| \leqslant \alpha C \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Отсюда и следует теорема 2.

Теорема 3. *Если $\bar{z} \in \bar{C}_1$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любых вспомогательных чисел $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ существует такое $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, что если: 1) норма уклонения функции $\tilde{u}_\delta(x)$ от функции $\bar{u}(x)$ меньше δ*

$$\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\| < \delta;$$

2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ *удовлетворяет условиям*

$$\gamma_1 \leqslant \delta^2/\alpha \leqslant \gamma_2 \quad (\text{или } \delta^2/\gamma_2 < \alpha < \delta^2/\gamma_1),$$

то $\tilde{z}_\delta^{\bar{\alpha}}(s)$, *реализующая минимум сглаживающего функционала* $M^{\bar{\alpha}}[z, \tilde{u}_\delta(x)]$, *принадлежит* ε-*окрестности функции* $\bar{z}(s)$

$$|\tilde{z}_\delta^{\bar{\alpha}}(s) - \bar{z}(s)| < \varepsilon$$

при $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$.

Нетрудно убедиться на примерах, что функция $\tilde{z}_\delta^\alpha(s)$, соответствующая фиксированной функции $\tilde{u}_\delta(s)$ при малом δ, при $\alpha \to 0$ может выходить из ε-окрестности $\bar{z}(s)$.

3. Перейдем к приближенным методам решения уравнения (1). Рассмотрим метод конечных разностей. Возьмем сетку на (a, b): $s_j = jh - 0{,}5\,h$ $(j = 1, \ldots, n)$ и на (c, d): $x_i = ih_1 - 0{,}5\,h_1$ $(i = 1, \ldots, m)$, где $h = \frac{1}{n}(a - b)$ и $h_1 = \frac{1}{m}(c - d)$. Обозначим $z_j = z(s_j)$, и пусть

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} z_j h = \int_a^b K(x_i, s)\, z(s)\, ds + O(h^\gamma)$$

какая-либо интеграционная формула порядка γ.

Рассмотрим разностный сглаживающий функционал

$$\hat{M}_h^\alpha[\hat{z}, \hat{u}] = \sum_{i=1}^{m} \left\{\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\hat{z}_j h - \hat{u}_i\right\}^2 h_1 + \alpha \sum_{j=1}^{n} \left\{k_j(\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j)^2 \frac{1}{h} + p_j \hat{z}_j^2 h\right\},$$

где $\hat{u} = \{\hat{u}_i\}$ — заданная сетчатая функция на $\{x_i\}$, $\hat{z} = \{\hat{z}_j\}$ — сетчатая функция на $\{s_j\}$ и $k_j > 0$, $p_j > 0$.

Аналогично предшествующему имеет место

Т е о р е м а 1′. *Для любой сетчатой функции* $\hat{u}$ *и* $\alpha > 0$ *существует сетчатая функция* $\hat{z}^\alpha$, *реализующая минимум сглаживающего функционала* $\hat{M}_h^\alpha[\hat{z}, \hat{u}]$.

Сетчатая функция $\hat{z}^\alpha$ определяется из системы уравнений

$$\hat{L}^\alpha[\hat{z}] = \alpha\left\{\frac{1}{h^2}[k_j(\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j) - k_{j-1}(\hat{z}_j - \hat{z}_{j-1})] - p_j \hat{z}_j\right\} - \left\{\sum_{l=1}^{n} \bar{K}_{jl}\hat{z}_l h - \hat{b}_j\right\} = 0, \qquad (3')$$

$$\hat{z}_0 = \hat{z}_1, \quad \hat{z}_{n+1} = \hat{z}_n,$$

где

$$\bar{K}_{jl} = \sum_{i=1}^{m} K_{ij}K_{il}h_1, \quad \hat{b}_j = \sum_{i=1}^{m} K_{ij}\hat{u}_i h_1$$

и k_j и p_j определяются через $k(x)$, $p(x)$ при помощи какой-либо однородной разностной схемы, сходящейся к задаче (4) (см. [2]). В частности, например, $k_j = k(s_j + 0{,}5\,h)$, $p_j = p(s_j)$.

Т е о р е м а 2′. *Если* $\bar{z}(s) \in \bar{C}_1$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любых вспомогательных чисел* $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2$ *существуют такие* $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ *и* $h_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, *что если:* 1) *норма уклонения функции* $\tilde{u}_\delta(x)$ *от* $\bar{u}(x)$ *меньше* δ:

$$\|\tilde{u}_\delta - \bar{u}\| < \delta;$$

2) $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ *удовлетворяет условиям*

$$\gamma_1 \leqslant \delta^2/\alpha \leqslant \gamma_2 \quad (\text{или } \delta^2/\gamma_2 \leqslant \alpha \leqslant \delta^2/\gamma_1),$$

то $z_\delta^{\bar{\alpha}}(s)$, *реализующая минимум разностного сглаживающего функционала* $\hat{M}_h^\alpha[\hat{z}, \hat{\tilde{u}}_\delta]$, *принадлежит* ε-*окрестности функции* $\bar{z}(s)$ *при* $\delta \leqslant \leqslant \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$, $h < h_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$.

Уравнение (3′) представляет алгоритм для решения уравнения (1), дающий весьма эффективные результаты с помощью электронных цифровых машин.

Построение функций $z^\alpha(s)$ можно проводить, пользуясь также разложением в ряды по ортогональным системам.

Изложенный выше метод применим к уравнениям типа

$$A[x, z(s)] = u(x), \tag{1′}$$

где $A[x, z(s)]$ — ограниченный оператор. Если обозначить

$$\alpha(x, s) = A[x, \eta_s(\zeta)], \qquad \eta_s(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \leqslant s, \\ 0, & \zeta > s, \end{cases}$$

то уравнение (3) может быть представлено в виде

$$\alpha\left\{k(s)\, z'(s) + \int_0^s p(\zeta)\, z(\zeta)\, d\zeta\right\} - \left\{\int_c^d A[x, z(\zeta)]\, \alpha(x, s)\, dx - \right.$$
$$\left. - \int_c^d \alpha(x, s)\, \bar{u}(x)\, dx\right\} = 0,$$
$$z'(a) = z'(b) = 0.$$

Регуляризующий функционал $\Omega[z]$ может выбираться как квадратический функционал (не обязательно дифференциальный) так, чтобы условие $\Omega(z) \leqslant C$ определяло компактное множество и чтобы оператор Эйлера для $\Omega(z)$ имел вполне непрерывный обратный оператор. Это относится и к тому случаю, когда областью определения $z(s)$ является область D n измерений (см. теорему Соболева — Кондрашева ([3])).

Сглаживающие функционалы представляют удобный аппарат для решения уравнений второго рода на изолированной точке спектра, а также при решении нелинейных задач.

Поступило
17 IV 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, **39**, № 5, 195 (1943); М. М. Лаврентьев, ДАН, **102**, № 2, 205 (1955); **106**, № 2, 389 (1956); **112**, № 2, 195(1957). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **1**, в. 1, 5 (1961). [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.