N. P. Evlampiev, A. M. Sidorov, I. E. Philippov, On a generalization of Ambartsumyan's equation, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, Volume 156, Book 4, 25–30

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ АМБАРЦУМЯНА

Н.П. Евлампиев, А.М. Сидоров, И.Е. Филиппов

Аннотация

В статье рассмотрено функционально-дифференциальное уравнение

$$y'(t) + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda_j t), \quad t > 0,$$

где $a > 0,\ b_j \in R,\ \lambda > 1$. Такое уравнение возникает при обобщении модели В.А. Амбарцумяна поглощения света в межзвёздном пространстве. Доказано существование решения этого уравнения, которое может быть записано в виде ряда.

Ключевые слова: уравнение Амбарцумяна, функционально-дифференциальное уравнение, рекуррентное соотношение, теорема существования.

В работе [1] была рассмотрена задача о поглощении света в межзвёздном пространстве в случае, когда имеются n типов поглощающих облаков, равномерно распределенных в экваториальной плоскости Галактики и имеющих различные оптические плотности. Было показано, что плотность распределения яркости $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y'(t) + y(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y\left(\frac{t}{q_j}\right), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $q_1, \ldots, q_n$ – оптические прозрачности, $0 < q_j < 1,\ b_j > 0$ – некоторые числа, $j = 1, \ldots, n$. При $n = 1$ уравнение (1) является уравнением В.А. Амбарцумяна [2]. Разрешимость этого уравнения была исследована в [3] (см. также [4, 5]).

В настоящей работе рассматриваются решения более общего уравнения

$$y'(t) + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda_j t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $a > 0,\ \lambda_j > 1,\ b_j \in \mathbb{R}$. Под решением уравнения (2) будем понимать дифференцируемую на $(0, +\infty)$ функцию, обращающую его в тождество.

Вид решения этого уравнения зависит от арифметических свойств чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Рассмотрим три случая.

1. Геометрически разностное уравнение.

Пусть $\lambda_j = \lambda^j, \lambda > 1, j = 1, \ldots, n$, то есть числа λ_j составляют геометрическую прогрессию. Уравнение (2) в этом случае называется дифференциальным геометрически разностным:

$$y'(t) + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda^j t), \quad t > 0, \tag{3}$$

Теорема 1. *Уравнение* (3) *имеет решение*

$$y(t) = c\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k e^{-a\lambda^k t}, \quad t > 0, \tag{4}$$

где c – произвольная постоянная, а коэффициенты β_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_m = \frac{1}{a(1-\lambda^m)}\sum_{k=1}^{n} b_k\beta_{m-k}, \tag{5}$$

в которых $\beta_r = 0$ для $r < 0$.

Доказательство. Предположим, что ряд (4) сходится и его сумма $y(t)$ является решением уравнения (3). Подставив ряд (4) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\beta_k(1-\lambda^k)e^{-a\lambda^k t} = \sum_{j=1}^{n} b_j\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r e^{-a\lambda^{r+j}t},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\beta_k(1-\lambda^k)e^{-a\lambda^k t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_{k-j}\right)e^{-a\lambda^k t}. \tag{6}$$

Сравнив коэффициенты при членах с одинаковыми $e^{-a\lambda^k t}$ в (6), мы видим, что коэффициенты β_k ряда (4) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5).

Докажем, что сумма ряда (4), коэффициенты которого удовлетворяют (5), является решением уравнения (3). Для этого нужно доказать, что этот ряд и ряд, полученный из него путем почленного дифференцирования, равномерно относительно t сходятся на множестве $(0, +\infty)$. Пусть $b = \max\{\,|b_1|, \dots, |b_n|\,\}$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{bn}{a(\lambda^k-1)} = 0$, то найдется такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что при $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\frac{bn}{a(\lambda^k - 1)} < 1. \tag{7}$$

Положим $\beta = \max\{|b_1|, \dots, |b_{k_0}|\}$. Используя (5) и (7), имеем

$$|\beta_{k_0+1}| \le \frac{1}{a(\lambda^{k_0+1}-1)}\sum_{j=1}^{n}|b_j|\cdot|\beta_{k_0+1-j}| < \frac{bn\beta}{a(\lambda^{k_0+1}-1)} < \beta.$$

Пусть при $j = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $|\beta_{k_0+j}| < \beta$. Тогда

$$|\beta_{k_0+m+1}| \le \frac{1}{a(\lambda^{k_0+m+1}-1)}\sum_{j=1}^{n}|b_j|\cdot|\beta_{k_0+m+1-j}| < \frac{bn\beta}{a(\lambda^{k_0+m+1}-1)} < \beta.$$

Значит, $|\beta_k| < |\beta|$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$|\beta_k| < \frac{M}{\lambda^k - 1}, \tag{8}$$

где $M = \dfrac{bn\beta}{a}$. При $t > 0$

$$\left|\beta_k e^{-a\lambda^k t}\right| < |\beta_k| < \frac{M}{\lambda^k - 1}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{M}{\lambda^k - 1}$ сходится, поскольку $\lambda > 1$. Значит, ряд (3) равномерно сходится на множестве $(0, +\infty)$. На этом множестве равномерно сходится и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k(-a\lambda^k)e^{-a\lambda(k)t}$. Действительно, применив (8), получаем, что для $t > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\beta_k(-a\lambda^k)e^{-a\lambda^k t}\right| < \frac{a\lambda^k}{a(\lambda^k - 1)} \sum_{j=1}^{n} |b_j| \cdot |\beta_{k-j}| <$$

$$< \frac{bM\lambda^k}{\lambda^{k-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-j} - 1} < \frac{bM\lambda^k n}{(\lambda^k - 1)(\lambda^{k-n} - 1)}.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{bM\lambda^k n}{(\lambda^k - 1)(\lambda^{k-n} - 1)}$ следует необходимое утверждение. □

2. Случай несоизмеримых показателей.

Определение 1. Ненулевые действительные числа $z_1, \ldots, z_m$ называются несоизмеримыми, если уравнение в целых числах $z_1x_1 + \cdots + z_mx_m = 0$ имеет лишь решение $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Рассмотрим уравнение (2), в котором $\lambda_j = \lambda^{r_j}$, $j = 1, \ldots, n$, $r_1, \ldots, r_n$ – целые положительные числа, $\lambda > 1$, то есть уравнение

$$y'(t) + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda^{r_j} t), \quad t > 0. \tag{9}$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов-наборов из n неотрицательных чисел. Если $k = (k_1, \ldots, k_n)$ и $l = (l_1, \ldots, l_n)$ – мультииндексы, u и v – целые числа, то обозначим $k \cdot l = k_1l_1 + \cdots + k_nl_n$, $uk \pm vl = (uk_1 \pm vl_1, \ldots, uk_n \pm vl_n)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$. Обозначим $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит лишь на j-м месте, $j = 1, \ldots, n$, $\theta = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Теорема 2. *Пусть $r_1, \ldots, r_2$ – несоизмеримые числа. Тогда уравнение (9) имеет решение*

$$y(t) = c \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-at\lambda^{k \cdot r}}, \quad t > 0, \tag{10}$$

где C – произвольная постоянная, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, коэффициенты β_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\beta_\theta = 1, \quad \beta_k = \frac{1}{a(1 - \lambda^{k \cdot r})} \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_{k-e_j}, \tag{11}$$

в которых $\beta_l = 0$ для $l = (l_1, \ldots, l_n) \notin \mathbb{Z}_+^n$.

Доказательство. Подставим ряд (10) в уравнение (9):

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a\beta_k(1 - \lambda^{k \cdot r})e^{-at\lambda^{k \cdot r}} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-a\lambda^{k \cdot r + r_j} t} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \beta_{k-e_j} \right) e^{-at\lambda^{k \cdot r}}.$$

Поскольку числа $r_1, \dots, r_n$ несоизмеримы, из этих равенств следует, что коэффициенты β_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям (11). Сумма ряда (10) с такими коэффициентами β_k удовлетворяет уравнению (9), если этот ряд, а также ряд, полученный из него почленным дифференцированием, равномерно сходятся на множестве $(0, +\infty)$. Как и при доказательстве теоремы 1, обозначим $b = \max\{|b_1|, \dots, |b_n|\}$ и заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{bn}{a(\lambda^{k\cdot r}-1)} = 0$. Существует такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что при $|k| > m_0$ $\dfrac{bn}{a(\lambda^{k\cdot r}-1)} < 1$. Положим $\beta = \max\limits_{k\in\varphi_{m_0}} |\beta_k|$, где $\varphi_{m_0} = \{k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \le m_0\}$.

Пусть $k \in \varphi_{m_0+1}$. Тогда $k - e_j \in \varphi_{m_0}$ для $j = 1, \dots, n$, и

$$|\beta_k| \le \frac{1}{a(\lambda^{k\cdot r}-1)} \sum_{j=1}^{n} |b_j|\,|\beta_k - e_j| \le \frac{bn\beta}{a(\lambda^{k\cdot r}-1)} < \beta. \tag{12}$$

Предположим, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ для всех $k \in \varphi_{m_0+m}$ справедливо неравенство $|\beta_k| < \beta$. Поскольку $k - e_j \in \varphi_{m_0+m}$ для $k \in \varphi_{m_0+m+1}$, то $|\beta_k - e_j| < \beta$, $j = 1, \dots, n$. Значит, для таких k справедливо (12), и, следовательно, $|\beta_k| < \beta$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n$. При $t > 0$ имеем

$$|\beta_k e^{-at\lambda^{k\cdot r}}| \le \frac{bn\beta}{a(\lambda^{k\cdot r}-1)} < \frac{\widetilde{b}}{\lambda^{|k|}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда следует, что на множестве $(0, +\infty)$ ряд (10) сходится равномерно. На этом множестве для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|\beta_k(-a\lambda^{k\cdot r})e^{-at\lambda^{k\cdot r}}\right| < \frac{\lambda^{k\cdot r}}{\lambda^{k\cdot r}-1} \sum_{j=1}^{n} |b_j|\,|\beta_k - e_j| < \frac{\lambda^{k\cdot r} b^2 n\beta}{\lambda^{k\cdot r}-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{(k-e_j)\cdot r}-1} \le d_k,$$

где $d_k = \dfrac{\lambda^{k\cdot r} b^2 n^2 \beta}{\lambda^{k\cdot r}-1} \cdot \dfrac{1}{\lambda^{k\cdot r - r_0}-1}$, $r_0 = \max\limits_{j=1,\dots,n} r_j$.

Поскольку $d_k \sim \dfrac{\widetilde{M}}{\lambda^{|k|}}$ при $|k| \to +\infty$, ряд $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} d_k$ сходится. Значит, ряд $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} \beta_k(-a\lambda^{k\cdot r})e^{-at\lambda^{k\cdot r}}$ равномерно сходится на множестве $(0, +\infty)$. Теорема доказана. □

3. Общий случай.

Определение 2. Пусть дано множество $T \subset \mathbb{R}$. Базисом в T называется любое множество $B \subset T$ несоизмеримых чисел такое, что добавив к B любое число из $T \setminus B$, мы получим множество чисел, не являющихся несоизмеримыми.

Пусть $T = \{r_1, \dots, r_s, \dots, r_n\}$ – заданное множество целых положительных чисел и множество $B = \{r_1, \dots, r_s\}$ является базисом в T. Тогда числа $r_{s+1}, \dots, r_n$ представимы в виде линейных комбинаций элементов базиса:

$$r_p = \sum_{j=1}^{s} \widetilde{a}_{p,j} r_j, \tag{13}$$

где $\widetilde{a}_{p,j}$ – рациональные числа, $p = s{+}1, \dots, n$. Очевидно, что равенство (13) можно записать в виде $r_p = \dfrac{1}{A}\sum\limits_{j=1}^{s} a_{p,j} r_j$, где A и $a_{p,j}$ – целые числа, $p = s+1, \dots, n$.

Рассмотрим уравнение (9), в котором множество B является базисом в T. Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$y(t) = c\sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}}, \tag{14}$$

где c – произвольная постоянная, $k = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $r = (r_1, \dots, r_s)$, $\lambda_0 = \lambda^{1/A}$, $\beta_\theta = 1$. Подставив (14) в уравнение (9), получим

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a\beta_k(1-\lambda_0^{k\cdot r})e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}\lambda^{r_j}}. \tag{15}$$

Имеем, что $\lambda_0^{k\cdot r}\cdot\lambda^{r_j} = \lambda_0^{(k+Ae_j)\cdot r}$ при $j = 1, \dots, s$ и $\lambda_0^{k\cdot r}\cdot\lambda^{r_j} = \lambda_0^{(k+a_j)\cdot r}$ при $j = {}$ $= s+1, \dots, n$, так как $r_j = \dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{s} a_{j,i} r_i = \dfrac{a_j\cdot r}{A}$, где $a_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,s})$. Поэтому равенство (15) можно записать в виде

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a\beta_k(1-\lambda_0^{k\cdot r})e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}} = \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-at\lambda_0^{(k+Ae_j)\cdot r}} +$$
$$+\sum_{j=s+1}^{n} b_j \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k e^{-at\lambda_0^{(k+a_j)\cdot r}} = \sum_{|k|=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\beta_{k-Ae_j} + \sum_{j=s+1}^{n} b_j\beta_{k-a_j}\right)e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}}.$$

Поскольку множество B состоит из несоизмеримых чисел, то, сравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми $e^{-at\lambda_0^{k\cdot r}}$, находим

$$\beta_k = \frac{1}{a(1-\lambda_0^{k\cdot r})}\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\beta_{k-Ae_j} + \sum_{j=s+1}^{n} b_j\beta_{k-a_j}\right), \tag{16}$$

где $\beta_\theta = 1$, $\beta_l = 0$ для $l = (l_1, \dots, l_s) \notin \mathbb{Z}_+^s$.

То, что сумма ряда (14), коэффициенты которого β_k определены в (16), является решением уравнения (9), доказывается так же, как и в теореме 2. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть множество* $\{r_1, \dots, r_s\}$ *является базисом в множестве* $\{r_1, \dots, r_s, \dots, r_n\}$. *Тогда уравнение* (9) *имеет решение* (14), *где* c *– произвольная постоянная, коэффициенты* β_k *определены в* (16).

Замечание 1. Пусть $s = n$, то есть все показатели $\{r_1, \dots, r_n\}$ несоизмеримы. Тогда решение (14), (16) принимает вид (10), (11), если положить $A = 1$.

Если же $r_j = j$, $j = 1, \dots, n$ (геометрически разностное уравнение), то $S = 1$, $A = 1$, $a_j = j$, и, следовательно, равенства (16) переходят в (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00392).

Summary

N.P. Evlampiev, A.M. Sidorov, I.E. Philippov. On a Generalization of Ambartsumyan's Equation.

The paper discusses the functional-differential equation

$$y'(t) + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda_j t), \quad t > 0,$$

where $a > 0,\ b_j \in R,\ \lambda > 1$. Such equation arises from a generalization of Ambartsumyan's model of light absorption in the interstellar space. The existence of the solution to this equation, which can be written in the form of a series, is demonstrated.

Keywords: Ambartsumyan's equation, functional-differential equation, recurrence relation, existence theorem.

Литература

1. *Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е.* Вывод уравнения для плотности распределения яркости света в случае различных облаков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 126–129.
2. *Амбарцумян В.А.* Научные труды: в 3 т. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1960. – Т. 1. – 430 с.
3. *Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П.* О решении на полуоси дифференциально-разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. – 1991. – № 4. – С. 44–47.
4. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 77, No 6. – P. 891–937.
5. *Русаков Г.И.* Флуктуации яркости Млечного пути // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. матем. наук. – 1949. – Вып. 18 – С. 53–79.

Поступила в редакцию
23.07.14

Евлампиев Николай Петрович – директор, ООО «Интек плюс», г. Казань, Россия.

Сидоров Анатолий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Anatoly.Sidorov@kpfu.ru*

Филиппов Игорь Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Igor.Filippov@kpfu.ru*